半線形楕円型方程式の正値解の存在について

静岡大学工学部 足達 慎二
Shinji Adachi
Faculty of Engineering, Shizuoka University

京都産業大学理学部 渡辺 達也
Tatsuya Watanabe
Faculty of Science, Kyoto Sangyo University

1 序

この講究録では, 次の Schrödinger 型の半線形楕円型方程式の正値解の存在について考える：

$$-\Delta u + V(x)u = \lambda f(u) \text{ in } \mathbb{R}^N, \tag{1.1}$$

ただし, $N \geq 2$, $\lambda > 0$ とする. ここでは非線形項 $f(u)$ に対して原点付近でのみ優線形の仮定を課し, 無限遠方での増大度に関する仮定を課さずに正値解の存在を議論する. また, ポテンシャル $V(x)$ についてはある有限群作用のもとで不変性を持つものを考える.

まず, $V(x)$ に対する仮定を述べる. $\mathcal{G} \subset O(N)$ を有限部分群とし, すべての $x \in S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N\,;\, |x| = 1\}$ に対し, ある $g \in \mathcal{G}$ が存在して $gx \neq x$ とする. さらに $m := \min_{x \in S^{N-1}} \mathrm{card}\{gx\,;\, g \in \mathcal{G}\} (\geq 2)$, $x_0 \in S^{N-1}$ を $\mathrm{card}\{gx_0\,;\, g \in \mathcal{G}\} = m$ とし,

$$\{gx_0\,;\, g \in \mathcal{G}\} = \{e_1, \cdots, e_m\}, \quad \alpha_0 = \min_{i \neq j} |e_i - e_j| \in (0, 2] \tag{1.2}$$

とおく. $V(x) \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ に対しては, 次を仮定する.

(v1) ある $V_0 > 0$ が存在して, $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) = V_0$.
(v2) ある $V_\infty > 0$ が存在して, $\lim_{|x| \to \infty} V(x) = V_\infty$.
(v3) すべての $x \in \mathbb{R}^N$, $g \in \mathcal{G}$ に対して, $V(gx) = V(x)$.

(v4) ある $\alpha > \alpha_0\sqrt{V_\infty}$ および $C_0 > 0$ が存在して, すべての $x \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$V_\infty - V(x) \geq -C_0 e^{-\alpha|x|}.$$

(v5) $N \geq 3$ の場合, 次のどちらかを仮定する.

(i) ある $\kappa \in (0,1)$ が存在して, $\|(\nabla V(x) \cdot x)_+\|_{\frac{N}{2}} \leq 2\kappa S$. ここで,

$$S := \inf_{u \in D^{1,2} \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{\frac{2N}{N-2}}^2}.$$

(ii) ある $\kappa \in (0,1)$ が存在して, すべての $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ に対して

$$(\nabla V(x) \cdot x)_+ \leq \frac{(N-2)^2}{2|x|^2}\kappa.$$

次に $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ は $f(t) \equiv 0$ $(t \leq 0)$ および次を満たすとする.

(f1) ある $p \in (2, 2^*)$ が存在して, $\displaystyle\lim_{t \to 0+} \frac{f(t)}{t^{p-1}} = 0$. ここで, $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ $(N \geq 3)$, $2^* = \infty$ $(N = 2)$.

(f2) ある $q \in [p, 2^*)$ が存在して, $\displaystyle\liminf_{t \to 0+} \frac{F(t)}{t^q} > 0$. ここで, $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(\tau)\,d\tau$.

(f3) ある $\delta_0 > 0$ が存在して, $(0, \delta_0]$ において $\dfrac{f(t)}{t}$ は単調増加.

(f4) ある $\delta_1 > 0$ と $\theta \in (2, 2^*)$ が存在して, $(0, \delta_1]$ において $0 < \theta F(t) \leq f(t)t$.

非線形項の無限遠方での増大度について何も仮定していないので, (f1)–(f4) を満たす非線形項として, 例えば, $f(u) = u^{q-1} + u^{r-1}$ $(2 < q < 2^* < r)$ のような Sobolev 優臨界の増大度をもつ非線形項を挙げることができる.

以上の仮定のもとで, 十分大きな $\lambda > 0$ に対して (1.1) は正値解が存在するというのが主結果である.

定理 1.1. *$N \geq 3$ では (v1)–(v5), (f1)–(f3), $N = 2$ では (v1)–(v4), (f1)–(f4) を仮定する. このとき, ある $\lambda_0 > 0$ が存在して, $\lambda \geq \lambda_0$ に対して (1.1) の $\mathcal{G}$-不変な正値解が少なくとも一つ存在する.*

証明の方針は変分解析を用いて (1.1) に対応する汎関数

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2\,dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,dx \,:\, H_G^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$$

の非自明な臨界点として正値解の存在を示すが, まず, 非線形項の無限遠方での増大度について何も仮定していないので $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,dx$ が $H_G^1(\mathbb{R}^N) = \{u \in$

$H^1(\mathbb{R}^N)\,;\,u(gx)=u(x)$ for $x\in\mathbb{R}^N,\ g\in\mathcal{G}\}$ で well defined ではない. そこで, 無限遠方で適切な増大度を持つように非線形項を修正し, 修正した汎関数に対して臨界点 u_λ の存在を示す. さらに u_λ に対して $\|u_\lambda\|_\infty\to 0\ (\lambda\to\infty)$ を示すことによって, 定理の証明が完結する.

注意 1.2. (1.1) の変分解析を行う際に, ポテンシャル $V(x)$ に対する仮定として (v1), (v2) に加えて

$$0<V_0\le V(x)\le V_\infty$$

を仮定することが多い ([6, 13]). この仮定は *trapping* 型と呼ばれ, これによりエネルギー最小レベルにおけるコンパクト性（Palais-Smale 列の収束性）を示すことができる. 我々はこの仮定をせずに（*non-trapping* 型）, 有限群作用 $\mathcal{G}\in O(N)$ に対する不変性のみで正値解の存在を示している.

2　準備

2.1　非線形項の修正

まず, 遠方で適切な増大度を持つように非線形項を修正する. $d\in\left(0,\frac{1}{2}\min\{\delta_0,\delta_1\}\right)$ を任意に選び固定する. (f1), (f2) からある定数 $C_0,\,C_1>0$ が存在して

$$|f(t)|\le C_0|t|^{p-1}\quad(|t|\le d),\tag{2.1}$$

$$F(t)\ge C_1t^q\quad(0\le t\le d)\tag{2.2}$$

が成立する. $\chi_{[0,d]}$ を $[0,d]$ 上の特性関数とし, 修正した非線形項 $\tilde f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ を次で定義する：

$$\tilde f(t)=\chi_{[0,d]}(t)f(t)+\left(1-\chi_{[0,d]}(t)\right)\frac{f(d)}{d^{p-1}}t^{p-1}=\begin{cases}f(t), & t\le d,\\ \frac{f(d)}{d^{p-1}}t^{p-1}, & t\ge d.\end{cases}$$

(2.1)-(2.2), (f3)-(f4) と $\tilde f$ の構成方法から次が成り立つことがわかる.

補題 2.1. $\tilde f$ は次の性質を持つ.

(i) ある $C>0$ が存在して, 任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して, $|\tilde f(t)|\le C|t|^{p-1}$.

(ii) 任意の $T>0$ に対して, ある $C_T>0$ が存在して, $t\in[0,T]$ に対して $\tilde F(t)\ge C_Tt^q$. ここで, $\tilde F(t)=\displaystyle\int_0^t\tilde f(\tau)\,d\tau$. さらに任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して, $\tilde F(t)\ge 0$.

(iii) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\tilde{F}(t)}{t^2}=\infty.$

(iv) $\dfrac{\tilde{f}(t)}{t}$ は $(0,\infty)$ において単調増加.

(v) 任意の $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対して, $0<\alpha\tilde{F}(t)\le\tilde{f}(t)t$. ここで, $\alpha=\min\{p,\theta\}$.

この修正した非線形項を用いて, 次の問題を考える：

$$-\Delta u+V(x)u=\lambda\tilde{f}(u)\quad\text{in }\mathbb{R}^N. \tag{2.3}$$

(2.3) に対応する汎関数 $\tilde{I}:H^1_G(\mathbb{R}^N)\to\mathbb{R}$ は

$$\tilde{I}(u):=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+V(x)u^2\,dx-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}\tilde{F}(u)\,dx \tag{2.4}$$

で与えられる. 補題 2.1 の (i) より, $\tilde{I}$ は C^1-級の汎関数であり, $\tilde{I}$ に対して臨界点理論を適用することにより, (2.3) の解 u_λ を得ることができる. さらに十分大きな $\lambda>0$ に対して, u_λ は (1.1) の解でもあることを示す.

注意 2.2. $\tilde{f}$ の構成方法は関連する既知の結果 [7, 8, 11] のそれとは異なる. これらの論文では適切なカットオフ関数 $\rho(t)$ を用いて $\tilde{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を次で定義している：

$$\tilde{F}(t)=\rho(t)F(t)+\bigl(1-\rho(t)\bigr)C_0t^p.$$

この $\tilde{F}$ に対して (2.4) の修正汎関数は C^2-級となるが, この構成方法では $\tilde{f}(t)=(\tilde{F}(t))'$ が補題 2.1 の (iv) の性質を持つかどうかわからない.

2.2 (2.3) の群不変正値解の存在

修正方程式 (2.3) の群不変正値解 u_λ の存在を concentration compactness 原理を用いて示す. (2.3) に対応する極限方程式

$$-\Delta u+V_\infty u=\lambda\tilde{f}(u)\quad\text{in }\mathbb{R}^N, \tag{2.5}$$

およびその汎関数

$$\tilde{I}_\infty(u):=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+V_\infty u^2\,dx-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}\tilde{F}(u)\,dx \tag{2.6}$$

に対して, そのエネルギー最小レベルを

$$c_\infty:=\inf\{\tilde{I}_\infty(u)\,;\,\tilde{I}'_\infty(u)=0,\ u\in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}\}$$

とおくと, $\tilde{I}_\infty(w)=c_\infty$ をみたす (2.5) の正値球対称解 w が存在することが知られている（[4, 5]）.

補題 2.3. $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ をレベル $c > 0$ の有界な *Palais-Smale* 列とする, つまり,

$$\tilde{I}(u_n) \to c, \quad I'(u_n) \to 0 \ in \ (H^1(\mathbb{R}^N))^{-1}, \quad \|u_n\| \text{ は有界}$$

とする．($\|\cdot\|$ は通常の $H^1(\mathbb{R}^N)$ ノルム．) このとき, 部分列 $\{u_n\}$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{y_n^i\} \subset \mathbb{R}^N$, $i = 1, \cdots, k, w^i \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ に対して次が成立する：

$$\tilde{I}(u_n) \to \tilde{I}(u_0) + \sum_{i=1}^{k} \tilde{I}_\infty(w^i), \quad \tilde{I}'(u_0) = 0, \quad \tilde{I}'_\infty(w^i) = 0,$$
$$\left\| u_n - u_0 - \sum_{i=1}^{k} w^i(\cdot - y_n^i) \right\| \to 0, \quad |y_n^i| \to \infty, \ |y_n^i - y_n^{i'}| \to \infty \ (n \to \infty).$$

補題 2.3 の証明は [13] を参照されたい．(2.4) のエネルギー最小レベルを

$$c := \inf\{\tilde{I}(u) \,;\, \tilde{I}'(u) = 0, \ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}\} \tag{2.7}$$

とおく．c は峠の定理におけるミニマックス値と一致することが知られている．群作用に関する不変性より, レベル c での有界な Palais-Smale 列が存在し, かつ

$$c < mc_\infty \tag{2.8}$$

をみたすならば, 補題 2.3 よりその Palais-Smale 列は収束する部分列を持つ．つまり, 方程式 (2.3) の群不変正値解 u_λ が存在する．Palais-Smale 列の有界性については [12] の *monotonisity trick* を用いて示すことができる．また, (2.8) は次の相互作用評価を用いて示すことができる．

補題 2.4. $\ell \geq 1, \ s \geq 0$ に対して

$$\gamma(s) := s \sum_{i=1}^{m} w(x - \ell e_i) \in H_G^1(\mathbb{R}^N)$$

とおく．ここで, e_i は (1.2) で定義された単位ベクトルである．このとき, ある $\ell_0 > 1$ が存在し, 任意の $\ell \geq \ell_0$ に対して

$$\sup_{s \geq 0} \tilde{I}(\gamma(s)) < mc_\infty$$

が成立する．

補題 2.4 の証明は [1, 2, 3, 9, 10, 14] を参照されたい．

3　主定理の証明 —$N \geq 3$ の場合—

修正方程式 (2.3) の群不変正値解 u_λ に対して, 次の評価式を示す：

$$\|u_\lambda\|_\infty \leq \exists C\lambda^{-\frac{2^*-q}{(2^*-p)(q-2)}}. \tag{3.1}$$

この評価式から $\|u_\lambda\|_\infty \to 0$ $(\lambda \to \infty)$ となり, $\tilde{f}$ の構成方法から $\tilde{f}(t) = f(t)$ $(0 \leq t \leq d)$ なので, 定理 1.1 の証明が完結する. (3.1) を示すために次の 3 つの補題を用意する.

補題 3.1. ある定数 $C_1 > 0$ が存在して, $\tilde{I}(u)$ の任意の臨界点 u に対して,

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq C_1 \tilde{I}(u)$$

が成立する.

補題 3.2. ある定数 $C_2 > 0$ が存在して,

$$\|u_\lambda\|_\infty \leq C_2 \lambda^{\frac{1}{2^*-p}} \|\nabla u_\lambda\|_2^{\frac{2^*-2}{2^*-p}}$$

が成立する.

補題 3.3. ある定数 $C_3 > 0$ が存在して,

$$c \leq C_3 \lambda^{-\frac{2}{q-2}}$$

が成立する. ここで $c > 0$ は (2.7) で定義された $\tilde{I}(u)$ のエネルギー最小レベルである.

補題 3.1–3.3（補題 3.1 においては $u = u_\lambda$, $\tilde{I}(u_\lambda) = c$ として適用する）を組み合わせると (3.1) が成立することが容易にわかる. 補題 3.3 については c が峠の定理におけるミニマックス値であることを利用して, 適切な試験関数を用いて標準的な方法で示すことができる. 補題 3.3 は $N \geq 2$ で成立することに注意されたい. また, 補題 3.1 の証明は Pohozaev の等式を利用し, このとき (v5) を用いる. ここでは Moser の反復法を用いて補題 3.2 を示す.

補題 3.2 の証明. $M > 0$ に対して,

$$u_M := \begin{cases} u_\lambda & (0 < u_\lambda < M), \\ M & (u_\lambda \geq M) \end{cases}$$

とおく．$\alpha > 1$ を任意にとり，$u_M^{2\alpha-1}$ を方程式 (2.3) の両辺にかけて積分すると（$\tilde{I}'(u_\lambda)u_M^{2\alpha-1} = 0$），

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_\lambda \cdot \nabla(u_M^{2\alpha-1})\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_\lambda u_M^{2\alpha-1}\, dx &= \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(u_\lambda) u_M^{2\alpha-1}\, dx \\ &\leq C\lambda \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{p-1} u_M^{2\alpha-1}\, dx\end{aligned}$$

が得られる．ここで, 補題 2.1 の (i) を用いた．したがって, $2\alpha - 1 > 1$ なので,

$$\int_{\{u_\lambda < M\}} u_\lambda^{2\alpha-2} |\nabla u_\lambda|^2\, dx < (2\alpha-1) \int_{\{u_\lambda < M\}} u_\lambda^{2\alpha-2} |\nabla u_\lambda|^2\, dx \leq C\lambda \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{p+2\alpha-2}\, dx$$

となる．ここで, $M \to \infty$ とすれば,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2\alpha-2} |\nabla u_\lambda|^2\, dx \leq C\lambda \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{p+2\alpha-2}\, dx \tag{3.2}$$

が得られる．次に Sobolev の不等式より

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2\alpha-2} |\nabla u_\lambda|^2\, dx = \frac{1}{\alpha^2} \|\nabla(u_\lambda^\alpha)\|_2^2 \geq \frac{S}{\alpha^2} \|u_\lambda^\alpha\|_{2^*}^2.$$

が成立するので, (3.2) と Hölder の不等式より

$$\|u_\lambda\|_{2^*\alpha}^{2\alpha} \leq \frac{\alpha^2 C}{S} \lambda \|u_\lambda\|_{2^*}^{p-2} \|u_\lambda\|_{\frac{2^*}{2^*-p+2}\cdot 2\alpha}^{2\alpha} \leq \frac{\alpha^2 C}{S^{\frac{p}{2}}} \lambda \|\nabla u_\lambda\|_2^{p-2} \|u_\lambda\|_{\frac{2^*}{2^*-p+2}\cdot 2\alpha}^{2\alpha}$$

となる．したがって,

$$\|u_\lambda\|_{2^*\alpha} \leq \left(\frac{C\lambda}{S^{\frac{p}{2}}} \|\nabla u_\lambda\|_2^{p-2} \right)^{\frac{1}{2\alpha}} \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \|u_\lambda\|_{\frac{2^*}{2^*-p+2}\cdot 2\alpha} \tag{3.3}$$

が成立する．(3.3) において $\alpha = \frac{2^*-p+2}{2} (> 1)$ とすると,

$$\|u_\lambda\|_{2^*\cdot\frac{2^*-p+2}{2}} \leq \left(\frac{C\lambda}{S^{\frac{p}{2}}} \|\nabla u_\lambda\|_2^{p-2} \right)^{\frac{1}{2^*-p+2}} \left(\frac{2^*-p+2}{2} \right)^{\frac{2}{2^*-p+2}} \|u_\lambda\|_{2^*} \tag{3.4}$$

となる．(3.3) において $\alpha = \left(\frac{2^*-p+2}{2}\right)^2$ とすると, (3.4) を用いて,

$$\begin{aligned}&\|u_\lambda\|_{2^*\cdot\left(\frac{2^*-p+2}{2}\right)^2} \\ &\leq \left(\frac{C\lambda}{S^{\frac{p}{2}}} \|\nabla u_\lambda\|_2^{p-2} \right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2^*-p+2}\right)^2} \left(\frac{2^*-p+2}{2} \right)^{2\left(\frac{2}{2^*-p+2}\right)^2} \|u_\lambda\|_{2^*\cdot\frac{2^*-p+2}{2}} \\ &\leq \left(\frac{C\lambda}{S^{\frac{p}{2}}} \|\nabla u_\lambda\|_2^{p-2} \right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2^*-p+2} + \left(\frac{2}{2^*-p+2}\right)^2\right)} \left(\frac{2^*-p+2}{2} \right)^{\left(\frac{2}{2^*-p+2} + 2\left(\frac{2}{2^*-p+2}\right)^2\right)} \|u_\lambda\|_{2^*}.\end{aligned}$$

したがって, これらの不等式を繰り返し用いることにより,

$$\begin{aligned}
&\|u_\lambda\|_{2^*\cdot\left(\frac{2^*-p+2}{2}\right)^n} \\
&\le \left(\frac{C\lambda}{S^{\frac{p}{2}}}\|\nabla u_\lambda\|_2^{p-2}\right)^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{2^*-p+2}\right)^k} \left(\frac{2^*-p+2}{2}\right)^{\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{2}{2^*-p+2}\right)^k} \|u_\lambda\|_{2^*}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

が得られる. ここで,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{2}{2^*-p+2}\right)^k = \frac{\frac{2}{2^*-p+2}}{\left(1-\frac{2}{2^*-p+2}\right)^2} = \frac{2(2^*-p+2)}{(2^*-p)^2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{2^*-p+2}\right)^k = \frac{2}{2^*-p}$$

が成り立つので, (3.5) において $n\to\infty$ とすると,

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda\|_\infty &\le \left(\frac{C\lambda}{S^{\frac{p}{2}}}\|\nabla u_\lambda\|_2^{p-2}\right)^{\frac{1}{2^*-p}} \left(\frac{2^*-p+2}{2}\right)^{\frac{2(2^*-p+2)}{(2^*-p)^2}} \|u_\lambda\|_{2^*} \\
&\le \frac{C^{\frac{1}{2^*-p}}}{S^{\frac{2^*}{2(2^*-p)}}}\left(\frac{2^*-p+2}{2}\right)^{\frac{2(2^*-p+2)}{(2^*-p)^2}} \lambda^{\frac{1}{2^*-p}}\|\nabla u_\lambda\|_2^{\frac{2^*-2}{2^*-p}}
\end{aligned}$$

が得られる. ∎

4 主定理の証明 —$N=2$ の場合—

2 次元の場合は (3.1) の代わりに

$$\|u_\lambda\|_\infty \le \exists C\lambda^{-\frac{r-q}{(r-p)(q-2)}} \tag{4.1}$$

を示す. ここで, $r>q$ である. 3 次元以上の場合と同様にして, 補題 3.3 と次の 2 つの補題により, (4.1) が得られる.

補題 4.1. ある定数 $C_1>0$ が存在して, $\tilde{I}(u)$ の任意の臨界点 u に対して,

$$\|u\|^2 \le C_1\tilde{I}(u)$$

が成立する.

補題 4.2. ある定数 $C_2 > 0$ が存在して, 任意の $r > p$ に対して

$$\|u_\lambda\|_\infty \le C_2 \lambda^{\frac{1}{r-p}} \|u_\lambda\|^{\frac{r-2}{r-p}}$$

が成立する.

補題 3.1 の証明では Pohozaev の等式を利用したが, $N = 2$ ではこの議論ではうまくいかない. そこで, 補題 4.1 では Ambrosetti-Rabinowitz 条件（(f4) と補題 2.1 の (v)）を利用する. 補題 4.2 の証明は補題 3.2 のそれとほぼ同じである.

参考文献

[1] S. Adachi, *A positive solution of a nonhomogeneous elliptic equation in $\mathbb{R}^N$ with G-invariant nonlinearity*, Comm. PDE **27** (2002), 1–22.

[2] S. Adachi, T. Watanabe, *G-invariant positive solutions for a quasilinear Schrödinger equation*, Adv. Diff. Eqns. **16** (2011), 289–324.

[3] S. Adachi, T. Watanabe, *G-invariant positive solutions for a class of locally superlinear Schrödinger equations*, to appear in J. Math. Anal. Appl.

[4] H. Berestycki, T. Gallouët, O. Kavian, *Équations de Champs scalaires euclidiens non linéaires dans le plan*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **297** (1983), 307–310.

[5] H. Berestycki, P. L. Lions, *Nonlinear scalar fields equations, I. Existence of a ground state*, Arch. Ration. Mech. Anal. **82** (1983), 313–345.

[6] S. Chen, X. Tang, *Berestycki-Lions conditions on ground state solutions for a nonlinear Schrödinger equation with variable potentials*, Adv. Nonlinear Anal. **9** (2020), 496–515.

[7] D. G. Costa, Z. Q. Wang, *Multiplicity results for a class of superlinear elliptic problems*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2004), 787–794.

[8] J. M. do Ó, E. Medeiros, U. Severo, *On the existence of signed and sign-changing solutions for a class of superlinear Schrödinger equations*, J. Math. Anal. Appl. **342** (2008), 432–445.

[9] J. Hirata, *A positive solution of a nonlinear elliptic equation in $\mathbb{R}^N$ with G-symmetry*, Adv. Diff. Eqns. **12** (2007), 173–199.

[10] J. Hirata, *A positive solution of a nonlinear elliptic equation in $\mathbb{R}^N$ with G-symmetry*, Nonlinear Anal. TMA. **69** (2008), 3174–3189.

[11] C. Huang, G. Jia, *Existence of positive solutions for supercritical quasilinear Schrödinger elliptic equations*, J. Math. Anal. Appl. **472** (2019), 705–727.

[12] L. Jeanjean. *On the existence of bounded Palais-Smale sequences and application to a Landesman-Lazer-type problem set on* $\mathbb{R}$, Proc. Royal Soc. Edin. **129A** (1999), 787–809.

[13] L. Jeanjean, K. Tanaka, *A positive solution for a nonlinear Schrödinger equation on* $\mathbb{R}^N$, Indiana Univ. Math. J. **54** (2005), 443–464.

[14] T. Watanabe, *Two positive solutions for an inhomogeneous scalar field equation*, J. Nonlinear Conv. Anal. **12** (2011), 119–142.