[伊藤の数学が現在どのように発展しているか]

一次元拡散過程

矢野孝次

◉京都大学大学院理学研究科

拡散過程とは，強マルコフ性を持つ連続時間の確率過程であって消滅までの標本路が連続なものを言う．一次元拡散過程とはすなわち一次元数直線に値をとる拡散過程のことだが，その理論はフェラーによる解析的理論を端緒とし，伊藤-マッキーンにより確率過程の理論が構築され，さまざまな研究を経て現在の形に整備された．本稿ではその概要を解説する．

1. 確率微分方程式

ブラウン運動の構成法としては，コルモゴロフの拡張定理と連続性定理を用いる方法や，ランダム係数のフーリエ級数を用いる方法など，いくつか知られている(cf.[1, 第Ⅱ部 §1.2, §1.3])．確率微分方程式とは時間発展にノイズを含む微分方程式であるが，ここでは確率過程(の標本路)を構成するための手段としての側面に着目する．確率微分方程式という道具を使うと，基本のノイズとしてのブラウン運動を材料として，さまざまな確率過程を構成することができる．

以下では特に断らない限り考える過程は実数値とする．B_t をブラウン運動とし，確率微分方程式

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt \qquad (1)$$

を考える．dB_t の項を**拡散項**，dt の項を**ドリフト項**と呼ぶ．σ と b にある程度の都合のよい仮定が必要であるが，ある区間 I に対し点 $x \in I$ を初期値に持つ(1)の解から I 上の拡散過程 X_t が得られる．

例えば，$\delta > 0$ に対し確率微分方程式

$$dQ_t = 2\sqrt{Q_t}dB_t + \delta dt \qquad (2)$$

の解から非負値の拡散過程 Q_t が定まる．その平方根 $R_t = \sqrt{Q_t}$ は次元 δ の**ベッセル過程**[1]と呼ばれる．

Q_t と R_t は本質的に同じ拡散過程だが，確率微分方程式の解としてはまったく異なる．伊藤の公式により，正の点から出発し原点に到達するまでは

$$dR_t = dB_t + \frac{\delta - 1}{2R_t}dt \qquad (3)$$

だが，原点到達で係数が発散し，その後の事情は δ の値で変わる．$\delta \geqq 2$ のときは，原点に到達せず，(3)が成立し，方程式(3)に解の一意性がある．$1 < \delta < 2$ のときは原点到達後も(3)が成立するが，方程式(3)に対する解の一意性はあるともないとも言える[2]．$\delta = 1$ および $0 < \delta < 1$ のときの(3)は，ドリフト項を**局所時間**および**主値積分**にそれぞれ取り換えて成り立つ([9, §Ⅺ.1])．局所時間は有界変動だが絶対連続でなく，主値積分は有界変動ですらないから，それらは通常の意味の確率微分方程式でない．

2. フェラーの標準形

一般にマルコフ過程 X_t に対し，出発点を x とする期待値を $\mathbb{E}_x$ と表すとき，$P_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)]$ によって定まる作用素 P_t は半群性 $P_{t+s} = P_t P_s$ を持つ．粗く言って，作用素半群は**生成作用素** $\mathscr{G} = \lim_{t \downarrow 0} \dfrac{P_t - P_0}{t}$ により $P_t = e^{t\mathscr{G}}$ と表せる([2]等を参照)．拡散過程の生成作用素を特徴づけよう．

確率微分方程式(1)の解が定める区間 I 上の拡散過程に対し，生成作用素 $\mathscr{G}$ は I の内部で局所的に

1） 推移確率が変形ベッセル関数を用いて表されることが名前の由来である．δ を次元と呼ぶ理由は，それが自然数のときの Q_t が δ 次元ブラウン運動の原点からの距離と同分布であるため．δ が自然数でないときは次元としての意味はない．

2） 非負強解は一意だが，分布は一意でない(Cherny 2000)．

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2}\sigma(x)^2\frac{d^2}{dx^2}+b(x)\frac{d}{dx} \qquad (4)$$

で与えられる．関数 $m(x)$ と $s(x)$ をうまくとれば

$$\mathcal{G} = \frac{d}{dm}\frac{d}{ds} \qquad (5)$$

とも表せるが，この表示は一般論につながる．

消滅とは過程が**死点** Δ に跳びそこで止まることを言い，考える時点で死点にいる標本路は期待値に寄与させない．以下では，区間 I 上の拡散過程と言ったら I の内部では消滅しないものを指すとする．

定理 1　区間 I 上の拡散過程に対し，I 上の狭義増加連続関数 $s(x)$ と狭義増加右連続関数 $m(x)$ が存在して，生成作用素が I の内部で局所的に $\mathcal{G} = \frac{d}{dm}\frac{d^+}{ds}$ で与えられる．ただし，$\frac{d^+}{ds}$ および $\frac{d}{dm}$ は

$$\frac{d^+f}{ds}(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{s(x+\varepsilon)-s(x)} \qquad (6)$$

$$\frac{df}{dm}(x) = \lim_{\varepsilon,\varepsilon'\downarrow 0}\frac{f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon')}{m(x+\varepsilon)-m(x-\varepsilon')} \qquad (7)$$

を意味する．

関数 $s(x)$ と $m(x)$ は $x\in(u,v)\subset[u,v]\subset I$ のとき

$$\mathbb{P}_x(T_u > T_v) = \frac{s(x)-s(u)}{s(v)-s(u)} \qquad (8)$$

$$\frac{d^+}{ds}\mathbb{E}_x[T_{(u,v)^c}] = -m(x)+(\text{定数}) \qquad (9)$$

を満たし，一次変換の違いを除いて一意に定まる．ただし，T_A は点または集合 A への到達時刻であり，$\mathbb{P}_x$ は出発点を x とする確率を表す．$s(x)$ は**スケール関数**と呼ばれ，$m(x)$ は，そのスチルチェス測度との同一視により，**スピード測度**と呼ばれる．

一般に，拡散過程 X_t の増加同相による変換 $\phi(X_t)$ もまた拡散過程であり，付随するスケール関数は $s\circ\phi^{-1}$，スピード測度は $m\circ\phi^{-1}$ で与えられる．

3. 境界分類と境界条件

逆に，区間 I 上の狭義増加連続関数 $s(x)$ と狭義増加右連続関数 $m(x)$ が与えられたとき，それらをそれぞれスケール関数とスピード測度に持つ拡散過程が存在するであろうか．この問題に答えるために，区間の端点での挙動による分類を導入する．

区間 I の左端点および右端点をそれぞれ l_- および l_+ とし，$l_- < c < l_+$ として

$$\sigma = \iint_{l_-<y<x<c} dm(x)ds(y) \qquad (10)$$

$$\mu = \iint_{l_-<y<x<c} ds(x)dm(y) \qquad (11)$$

とおき，境界 l_- を以下のように分類する：

	$\mu < \infty$	$\mu = \infty$
$\sigma < \infty$	正則	流出
$\sigma = \infty$	流入	自然

境界 l_+ も同様に分類する．定義により，境界の分類は増加同相による変換について不変である．

例えば，ブラウン運動では $s(x) = x$, $m(x) = 2x$ であり，境界 $l_\pm = \pm\infty$ はいずれも自然である．次元 $\delta > 0$ のベッセル過程では $ds(x) = x^{1-\delta}dx$, $dm(x) = 2x^{\delta-1}dx$ であるが，この形で $\delta \leqq 0$ に対してもベッセル過程を定義する．境界 $l_+ = +\infty$ は自然であるが，境界 $l_- = 0$ の分類は以下の通りである：

$\delta \leqq 0$	$0 < \delta < 2$	$\delta \geqq 2$
流出	正則	流入

境界分類と拡散過程の対応を簡潔に図示する．

	enter 可能	enter 不能
hit 可能	正則	流出
hit 不能	流入	自然

上で，境界出発の過程が存在することを enter 可能，内部出発で境界到達し得ることを hit 可能と呼んだ．

正則境界での挙動には自由度がある．例えば，l_+ が自然，l_- が正則としよう．p_1, p_2, p_3 を非負定数で $p_1+p_2+p_3 = 1$ かつ $p_1 < 1$ とする．このとき，$I = [l_-, l_+)$ 上の拡散過程で $\mathcal{G} = \frac{d}{dm}\frac{d^+}{ds}$ を生成作用素に持つものが，$\mathcal{G}$ の定義域に**境界条件**

$$p_1 f(l_-) - p_2\frac{d^+f}{ds}(l_-) + p_3\mathcal{G}f(l_-) = 0 \qquad (12)$$

を課した下で一意に存在する．p_1, p_2, p_3 はそれぞれ境界 l_- での吸収，反射，停留の度合いを表す．

特に，$p_2=1$ の場合を**反射壁境界条件**と呼ぶ．確率微分方程式(2)から定まる次元 $0<\delta<2$ のベッセル過程においては，原点は反射壁である．

なお，フェラーの関連論文および内部消滅を持つ場合については，解説[4]を参照されたい．

4. 局所時間と時間変更

ブラウン運動からの標本路の構成法としては，確率微分方程式は係数に都合のよい仮定を必要とした．伊藤-マッキーン[7]による**時間変更**は一般論である．

B_t を原点出発ブラウン運動とする．$\mathbb{R}$ 上の非負可測関数 ϕ に対して

$$\int_0^t \phi(B_s)ds = 2\int_{-\infty}^{\infty} \ell(t,x)\phi(x)dx \tag{13}$$

を満たす二変数の確率過程 $\ell(t,x)$ を**局所時間**と呼ぶ．B_t が点 x で過ごす時間は，ルベーグ測度0だが，

$$\ell(t,x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^t 1_{\{|B_s-x|<\varepsilon\}}ds \tag{14}$$

だから，それを $\ell(t,x)$ を用いて測ることができる．

時間変更の結果を述べよう．増加同相による変換によって，$s(x)=x$ (**自然尺度**)のときに帰着する．I の内部から出発する場合を考えよう．平行移動により出発点を $0\in(l_-,l_+)$ としてよい．

定理 2 I の内部で $\mathscr{G}=\dfrac{d}{dm}\dfrac{d^+}{dx}$ であり，原点出発で I の境界で消滅する拡散過程の標本路は

$$A_t = \int_{(l_-,l_+)} \ell(t,x)dm(x), \tag{15}$$

$$X_t = \begin{cases} B_{A_t^{-1}} & (t < T^B_{(l_-,l_+)^c}), \\ \Delta & (t \geqq T^B_{(l_-,l_+)^c}) \end{cases} \tag{16}$$

で与えられる．ただし，A_t^{-1} は A_t の**右連続逆関数**，$T^B_{(l_-,l_+)^c}$ は B_t の $(l_-,l_+)^c$ への到達時刻である．X_t の局所時間は $\ell^X(t,x)=\ell(A_t^{-1},x)$ で与えられ，

$$\int_0^t \phi(X_s)ds = \int_{(l_-,l_+)} \ell^X(t,x)\phi(x)dm(x) \tag{17}$$

を満たす．

式(17)より $v\in(l_-,l_+)$ に対し $\int_0^t 1_{\{X_s=v\}}ds = \ell^X(t,v)\{m(v)-m(v-)\}$ であり，m の点 v での跳びは X_t が点 v に滞在する度合いを表す．

時間変更の方法を利用することによって拡散過程の**極限定理**が得られる．すなわち，m が遠方で正則変動ならば拡散過程の時空間スケール変換がベッセル過程(のスケール関数による変換)に収束する．

5. クレイン理論の応用

クレイン理論はスピード測度(クレイン理論では**弦**と呼ばれる)とスペクトル測度とを結びつける解析的理論である．渡辺信三，小谷眞一，笠原勇二らによりクレイン理論は拡散過程へと応用された．

広義増加右連続関数 $m:[0,\infty)\to[0,\infty]$ の全体を $\mathscr{M}$ とする．$m\in\mathscr{M}$ に対し，$l=\sup\{x\geqq 0 : m(x)<\infty\}$ とする(ただし $\sup\emptyset=0$)．定数関数 $m(x)\equiv c\in[0,\infty]$ を $m=c$ と書く．集合 $\mathscr{M}$ にはコンパクト距離が入り，$m_n\to m$ は m の連続点での各点収束と同値となる．次に，$[0,\infty)$ 上の測度 σ で $\displaystyle\int\frac{\sigma(d\xi)}{1+\xi}<\infty$ を満たすものと定数 $c\in[0,\infty)$ とにより

$$h(\lambda) = c + \int_{[0,\infty)}\frac{\sigma(d\xi)}{\lambda+\xi} \tag{18}$$

で表される関数 $h:(0,\infty)\to[0,\infty)$ の全体に $h(\lambda)\equiv\infty$ を加えたものを $\mathscr{H}$ とする．集合 $\mathscr{H}$ にはコンパクト距離が入り，$h_n\to h$ は各点収束と同値となる．

定理 3 $m\in\mathscr{M}\backslash\{\infty\}$ のとき，$\lambda>0$ に対し方程式

$$\phi(x,\lambda) = 1+\lambda\int_{[0,x)}(x-y)\phi(y,\lambda)dm(y) \tag{19}$$

$$\psi(x,\lambda) = x+\lambda\int_{[0,x)}(x-y)\psi(y,\lambda)dm(y) \tag{20}$$

を満たす $[0,l)$ 上の関数が一意に存在し，

$$h(\lambda) = \lim_{x\uparrow l}\frac{\psi(x,\lambda)}{\phi(x,\lambda)} = \int_0^l\frac{dx}{\phi(x,\lambda)^2} \tag{21}$$

とおくと $h\in\mathscr{H}$ である．さらに $m=\infty$ には $h=0$ を対応させる．以上で定まる対応 $m\mapsto h$ は同相である(**クレイン対応**と呼ぶ)．また，作用素 $\dfrac{d}{dm}\dfrac{d^+}{dx}$ を

$$g = \frac{d}{dm}\frac{d^+}{dx}f \iff p, q \in \mathbb{R} \text{ が存在して}$$
$$f(x) = p+qx+\int_{[0,x)}(x-y)g(y)dm(y) \tag{22}$$

で定義するとき，σ はその原点反射壁基本解の固有関数展開におけるスペクトル測度である．

クレイン対応の確率論的意味は時間変更で与えられる．$m \in \mathcal{M}\backslash\{0, \infty\}$ に対し，$m(0-) = 0$ として

$$A_t = \int_{[0,1)} \ell(t,x)dm(x), \tag{23}$$

$$X_t = \begin{cases} B_{A_t^{-1}} & (t < T_l^B), \\ \Delta & (t \geqq T_l^B) \end{cases} \tag{24}$$

とおくとき，X_t は強マルコフ過程であり，ディンキン生成作用素 $\mathcal{G}$ は $\dfrac{d}{dm}\dfrac{d^+}{dx}$ で与えられる．

特別な場合として，$m \in \mathcal{M}\backslash\{0, \infty\}$ が $[0, l)$ 上で狭義増加なら，X_t は拡散過程である．出発点は原点で正則境界であり，境界条件(12)は

$$-\frac{d^+f}{dx}(0)+m(0)\mathcal{G}f(0) = 0 \tag{25}$$

である．一般に，m は境界条件の情報を含んでいる．なお，独立指数時間をとり原点局所時間がそれに達した時点で消滅させることで，境界条件(12)における $p_1 > 0$ の場合を扱うことができる．

m が $[0, l)$ において定数となる区間を持つ場合は，X_t が跳びを持つので拡散過程ではないが，隣接点にしか跳ばないため拡散過程に近い．そのため，X_t は**一般化拡散過程**と呼ばれる．特に，m が離散的な点でのみ変化する場合として**出生死滅過程**を含む．

クレイン対応の連続性により，m と h との正則変動性の同値が得られる．この応用として，拡散過程の極限定理から m の正則変動性を導く**逆問題**が研究されている．

6. レヴィ過程

拡散過程と密接な関係を持つレヴィ過程について簡単に述べる．詳しくは[6], [10]を参照されたい．

Z_t が**レヴィ過程**とは，独立定常増分を持ち，確率連続で，標本路が右連続かつ左極限を持つものを言う．固定時刻 t における原点出発の Z_t の分布を μ_t と書くと，畳み込み半群性 $\mu_{t+s} = \mu_t * \mu_s$ を持つから，特性関数 $\varphi_t(\xi) = \int e^{i\xi x}\mu_t(dx)$ は $\varphi_{t+s}(\xi) = \varphi_t(\xi)\varphi_s(\xi)$ を満たす．（ただし，$\int_{\mathbb{R}}$ を単に $\int$ と書く．）

定理 4　レヴィ過程に対して定数 $a \geqq 0$ と $b \in \mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ 上の測度 ν で $\nu(\{0\}) = 0$ かつ $\int \dfrac{x^2}{1+x^2}\nu(dx) < \infty$ なるものが一意に対応し，$\tau(x) = x1_{\{|x|<1\}}$ として

$$\Psi(\xi) = a\xi^2-b\xi-\int(e^{i\xi x}-1-i\xi\tau(x))\nu(dx) \tag{26}$$

とおくと $\varphi_t(\xi) = e^{-t\Psi(\xi)}$ と表せる．逆にこの表示を持てば，$\varphi_t(\xi)$ を特性関数に持つレヴィ過程が存在する．さらに，無限遠で消える C^2 級関数 f に対し

$$\mathcal{G}f = a\frac{d^2f}{dx^2}+b\frac{df}{dx} +\int(f(\cdot+y)-f(\cdot)-f'(\cdot)\tau(y))\nu(dy) \tag{27}$$

で与えられる生成作用素 $\mathcal{G}$ を持つ．

a を**拡散係数**，ν を**レヴィ測度**，$\Psi(\xi)$ を**レヴィ-ヒンチン指数**と呼ぶ．問題に応じて $\tau(x)$ を取り換えることがあり，そのとき b の値だけが変わる．例えば $\int \dfrac{|x|}{1+|x|}\nu(dx)$ が無限だと $\tau(x)$ を 0 と取り換えられないが，有限ならそうしてよい．

拡散過程の標本路は連続で，その生成作用素は微分作用素であった．レヴィ過程の標本路は一般に不連続であり，生成作用素はレヴィ測度に関する積分作用素の項を含む．実は，レヴィ測度は標本路の跳びの法則を与える．

定理 5　Z_t の跳びを $\Delta Z_t = Z_t-Z_{t-}$ と書き，$\mathbb{R}$ 上のランダム測度値過程 J_t を次で定める：

$$J_t(A) = \#\{s \in (0,t] : 0 \neq \Delta Z_s \in A\}. \tag{28}$$

このとき，J_t は**ポアソン点過程**である，すなわち，独立定常増分であって，任意のボレル集合 A で $J_1(A)$ はポアソン分布．また，$E[J_1(A)] = \nu(A)$

である．

次の定理はレヴィ過程の標本路が跳びの無限和に分解することを主張している．

定理 6（レヴィ-伊藤分解） ブラウン運動 B_t をとり

$$Z_t = \sqrt{2a}B_t + bt + \int_{(-1,1)} x\tilde{J}_t(dx) + \int_{(-1,1)^c} xJ_t(dx) \qquad (29)$$

と表せ，右辺の四項は独立．ただし，$\tilde{J}_t = J_t - t\nu$.

$\int_{(-1,1)^c} xJ_t(dx)$ はランダム測度 J_t に関する通常の積分（実際は和）である．一方，ランダム符号付き測度 $\tilde{J}_t$ に関して x は可積分でないから，積分 $\int_{(-1,1)} x\tilde{J}_t(dx)$ は確率積分として定まるものである．

7. 周遊理論

拡散過程の標本路のうち原点を出て再び原点に戻るまでの部分を**周遊**（excursion）と呼ぶ．周遊理論について簡単に述べよう．詳しくは[5]等を参照．

X_t は $[0,\infty)$ 上の拡散過程で，第 5 節の意味で $m \in \mathcal{M}$ に対応するとする（よって m は $[0,\infty)$ 上で連続）．原点は正則境界で境界条件(25)が課されている．

m の右連続逆関数 m^* も $\mathcal{M}$ の元であり，これを m の**双対**と呼ぶ．m および m^* にクレイン対応する $\mathcal{H}$ の元をそれぞれ h および h^* と書くとき，

$$\lambda h(\lambda)h^*(\lambda) = 1 \qquad (30)$$

の関係が成立する．

定理 7 X の原点局所時間 L_t の右連続逆関数 $Z_t := L_t^{-1}$ はレヴィ過程であり，レヴィ-ヒンチン指数は

$$\Psi(\xi) = -m(0)\xi + \int_0^\infty (e^{i\xi x} - 1)n(x)dx \qquad (31)$$

である．ただし，$h^* \in \mathcal{H}$ に対する表現(18)を用いて

$$n(x) = \int_{(0,\infty)} e^{-x\xi}\xi\sigma^*(d\xi) \qquad (32)$$

とした．

Z_t に対するレヴィ-伊藤分解はこの場合

$$Z_t = m(0)t + \sum_{s \leq t} \Delta Z_s \qquad (33)$$

とも書ける．ΔZ_s が正のとき，$\{X_t : t \in [Z_{s-}, Z_s]\}$ は一つの周遊をなすから，ΔZ_s は周遊期間を表す．式(33)は Z_t を原点に停留する要素と原点から離れる周遊の要素とに分解している．この分解を X_t の標本路のレベルで行うのが周遊理論である．

定理 8 $D = \{s : \Delta Z_s > 0\}$ とし，X_t の標本路を周遊に分解したものを $\{p(s) : s \in D\}$ と書き，関数空間上のランダム測度値過程 N_t を

$$N_t(A) = \#\{s \in (D \cap (0,t]) : p(s) \in A\} \qquad (34)$$

で定める．このとき，N_t はポアソン点過程である．

N_t の平均測度 $\boldsymbol{n}(A) = E[N_1(A)]$ を**周遊測度**と呼ぶ．周遊測度は関数空間上のシグマ有限な無限測度である．周遊測度の下での周遊期間の分布は L_t^{-1} のレヴィ測度 $n(x)dx$ に一致することがわかる．

以上で与えられた拡散過程を周遊路に分解する理論を述べた．逆に，周遊測度が与えられたとき，それを平均測度に持つポアソン点過程を材料として拡散過程の標本路を構成することができる．

8. 最近の発展と問題

クレイン対応の応用はブラウン運動に対する**逆正弦法則**の拡散過程への拡張とともに論じられ，零再帰的な場合の極限定理が渡辺(1995)により得られ，その後に小谷，笠原，矢野裕子，筆者によりさまざまな発展が得られている．特に，小谷(2007, 2013)によるクレイン理論を左端点が流入の場合に拡張する結果は新しい展開をもたらした．

ところで，定理 7 によれば Z_t から h^* がわかり，双対関係とクレイン対応によって m が知れることから，原点の局所時間が拡散過程の情報をすべて持つことがわかる．しかしながら，それを確率過程の

レベルで明らかにすることは未解決問題である．

本稿では周遊理論を一次元の拡散過程に限って述べたが，周遊理論はもっと一般の強マルコフ過程に対しても有効で応用も広い．集合を基準にした周遊を論ずる理論も特別な場合には可能で，Wentzel境界条件の理論(渡辺，高信敏；[11]の渡辺の記事参照)，darningの理論(Chen，福島正俊；[3])，等角変換を用いた理論(Virág(2003) および Sheffield, Werner；[11]の Werner の記事参照)がある．

レヴィ過程のさまざまな応用と新しい理論の構築も盛んであるが，ここでは一次元で負の跳びのみを持つレヴィ過程の理論のみ触れよう．拡散過程のそれの類似でスケール関数の概念があるが，これは保険の分野で応用されている(詳しくは[8]を参照)．その解析にはレヴィ過程の反射壁過程に対する周遊理論が駆使されていることも注意しておこう．

参考文献

[1] 『確率論ハンドブック』，伊藤清 企画・監修，渡辺信三／重川一郎 編，丸善出版，2012.

[2] 伊藤清.『確率過程』(現代応用数学)，岩波書店，1957(初版)，2007(復刊)．英訳：*Essentials of stochastic processes.* Transl. by Yuji Ito. AMS, Providence, RI, 2006.

[3] Z.-Q. Chen and M. Fukushima. *Symmetric Markov processes, time change, and boundary theory.* LMS Monograph 35, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.

[4] M. Fukushima. Feller's contributions to the one-dimensional diffusion theory and beyond. In: *William Feller-Selected Papers* II, (eds. R. L. Schilling et al.), 63-76, Springer, to appear.

[5] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes.* North-Holland Publishing Co.; Kodansha, Ltd., 1981 (1st ed.); 1989 (2nd ed.).

[6] K. Itô. *Stochastic processes.* Matematisk Institut, Aarhus Universitet, Aarhus 1969; Edited by O. E. Barndorff-Nielsen and K. Sato, Springer-Verlag, Berlin, 2004. 邦訳：『確率過程 ── オルフス大学講義録』，佐藤由身子訳，シュプリンガー数学クラシックス，丸善出版，2009.

[7] K. Itô and H. P. McKean, Jr. *Diffusion processes and their sample paths.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1965 (1st ed.); 1974 (2nd ed.).

[8] A. E. Kyprianou. *Fluctuations of Lévy processes with applications.* Universitext, Springer, Heidelberg, 2006 (1st ed.); 2014 (2nd ed.).

[9] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion.* Springer-Verlag, Berlin, 1991 (1st ed.); 1994 (2nd ed.); 1999 (3rd ed.).

[10] K. Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999 (1st ed.); 2013 (2nd ed.).

[11] A tribute to Kiyosi Itô. *Stochastic Process. Appl.*, **120** (5), 575-766, 2010.

[やの こうじ]