

# 結び目のシャドーコサイクル不変量のサテライト化公式

吉田 真治

## 1 Introduction

カンドルとは集合に結び目の Reidemeister 移動に対応する公理をみたす二項演算を定めたものであり, 1982 年に Joyce と Matveev により独立に導入された [7][9]. 群  $G$  の共役類に二項演算を共役で定義したものはカンドルの典型的な例であり, 共役カンドルという. 3次元球面上の有向結び目  $K$  の補空間の基本群  $\Gamma_K$  に対し, メリディアンの共役類は fundamental quandle  $Q(K)$  を定める.  $\Gamma_K$  から有限群  $G$  への表現の個数 ( $G$ -彩色数という) は結び目の古典的な不変量である. 結び目群の表現のうちメリディアンが特定の共役類  $C$  に移されるものの個数は, カンドル  $Q(K)$  から  $C$  のなす共役カンドルへの準同型の個数 ( $C$ -彩色数という) に等しい. すなわちカンドル  $C$ -彩色数は群  $G$ -彩色数を精密化した不変量である. 一般に有限カンドル  $X$  に対し結び目の  $X$ -彩色数が定義される.  $X$ -彩色は結び目図式の各弧にカンドルの元を対応させたとき, 交点において適切な関係式をみたすものの集合として得られる. カンドルによる彩色数を, カンドルの 2-コサイクルを用いて適切な重み付きで計算したものをカンドルコサイクル不変量という [2]. またカンドルの 3-コサイクルを用いて結び目図式のシャドー彩色に対し適切な重みを定義し, それらのある彩色について足し合わせたものを結び目のシャドーコサイクル不変量という [3]. ここで結び目図式のシャドー彩色とは, 図式の各弧と各領域にカンドルの元を対応させる写像で適切な条件をみたすものをいう. カンドルコサイクル不変量およびシャドーコサイクル不変量はカンドル彩色数を精密化した結び目不変量である.

カンドルコサイクル不変量に対しケーブル化公式が知られている. 枠付き結び目を枠に沿って  $n$  重化すると新たな枠付き結び目が得られる. 成瀬 [11] は  $n$  重化した結び目図式  $D^{(n)}$  の  $X$  彩色をもとの結び目図式  $D$  の  $X^n$  彩色とみなしたとき,  $X^n$  にはラックの構造が入ることを示した. さらに  $n$  重化した交点におけるカンドルコサイクルの重みを足し合わせた値はラック  $X^n$  のコサイクルになることを示し,  $n$  重化した結び目の (シャドー) カンドルコサイクル不変量を元の結び目の (シャドー) ラックコサイクル不変量を用いて表す公式 (多重化公式という) を示した [11]. これを背景に, Ishikawa[6] は  $X^n$  にカンドルの構造を定義し, それを用いてカンドルコサイクル不変量のケーブル化公式を示した. ここで, ケーブル化公式とはケーブル結び目のカンドルコサイクル不変量を元の結び目のカンドルコサイクル不変量を用いて表す公式である. ケーブル結び目とは, 結び目の多重化に捻れを

入れて得られる結び目である。

本論文では，二面体カンドルと八面体カンドルに対して，シャドーコサイクル不変量のサテライト化公式を示した．ここで，二面体カンドル  $R_p$  とは二面体群  $D_{2p}$  の鏡映のなす位数  $p$  の共役カンドルである．八面体カンドル  $Q_6$  とは，正八面体群の元のうち向かい合う二つの頂点を結ぶ直線を軸とする  $90^\circ$  回転からなる位数 6 の共役カンドルである．サテライト化公式とはサテライト結び目のシャドーコサイクル不変量を，コンパニオン結び目とパターン結び目の不変量を用いて表す公式である．サテライト結び目とは，三次元球面上の結び目（コンパニオン結び目という）を、結び目（パターン結び目という）が埋め込まれたソリッドトラスに置き換えて得られる結び目である．本論文では，図 1 のように端点の向き付けが交互になっている 3-タングル  $T$  ((+, -, +)-型タングルという) の閉包をパターン結び目とするサテライト結び目  $K^{(3)}(T)$  に対し，サテライト化公式を示した．

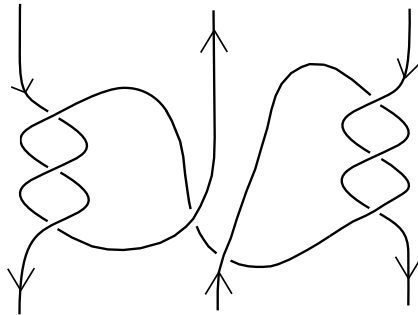


図 1: (+, -, +)-型タングルの例

一般に有限カンドル  $X$  とそのシャドーカンドル 2-コサイクル  $\theta$  に対し，サテライト結び目  $K^{(3)}(T)$  のシャドーコサイクル不変量が  $\theta$  を用いた  $T$  の不変量と，あるコサイクルの族  $\{\psi_i\}$  を用いた  $K$  の不変量を用いて表されることを示す（定理 3.2）．特に，二面体カンドル  $R_p$  の望月 3-コサイクルの場合にシャドーコサイクル不変量のサテライト化公式を示し，サテライト結び目  $K^{(3)}(T)$  のシャドーコサイクル不変量が  $T$  の閉包と  $K$  のシャドーコサイクル不変量の積で表されることを示す（定理 3.4）．また八面体カンドル  $Q_6$  について， $H^3(Q_6; \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  の生成元に対しシャドーコサイクル不変量のサテライト化公式を示す（定理 3.7）．また結び目図式の彩色数のサテライト化公式について， $X$  が有限，連結，忠実な Alexander カンドルの場合にサテライト結び目  $K^{(3)}(T)$  の  $X$ -彩色数が  $K$  の  $X$ -彩色数と  $T$  の閉包の  $X$ -彩色数の積により計算されることを示す（定理 3.3）．結び目を  $n$  重化して一部をタングルに置き換えたサテライト結び目の交点数は元の結び目の交点数の  $n^2$  倍程度であり，サテライト結び目の不変量を直接計算する場合と比較して容易に不変量が計算できるサテライト化公式は有用であると期待している．

定理 3.2 の証明は以下の手順で行う．結び目  $K$  に対し，これを一点で切り開いた 1-タングルの図式を  $\check{D}$  とする．また  $\check{D}$  を 0 枠に沿って三重化し各成分の向きを交互に定めたものを  $\check{D}^{(3)}$  と表す（図 2 参照）．サテライト結び目  $K^{(3)}(T)$  の結び目図式は  $T$  の図式と  $\check{D}^{(3)}$  を合成し，閉包をとることで得られる．よって有限カンドル  $X$  に対し， $K^{(3)}(T)$  の結び目

図式の  $X$ -彩色は  $T$  の図式の  $X$ -彩色と  $\check{D}^{(3)}$  の  $X$ -彩色の組み合わせで表すことができる。このうち  $\check{D}^{(3)}$  の  $X$ -彩色について、図 2 の上向きの弧  $\gamma_2$  に  $X$  の双対カンドル  $\overline{X}$  の元が対応し、下向きの弧  $\gamma_1, \gamma_3$  に  $X$  の元が対応するとみなす。このとき三重化した図式に対する Reidemeister 移動に由来する二項演算を  $X \times \overline{X} \times X$  に定めると、 $X \times \overline{X} \times X$  はカンドルになる。これを  $X^{(3)}$  と表す。このとき、 $\check{D}^{(3)}$  の  $X$ -彩色は  $\check{D}$  の  $X^{(3)}$ -彩色と同一視される。またこのとき、 $X$  のシャドーカンドル 2-コサイクル  $\psi$  に対し  $X^{(3)}$  のシャドーカンドル 2-コサイクル  $\psi^{(3)}$  が得られる。 $X^{(3)}$  を連結成分に分解し、 $\psi^{(3)}$  を各連結成分に制限することでシャドーカンドル 2-コサイクルの族  $\{\psi_i\}$  が得られる。これにより定理 3.2 が示される。

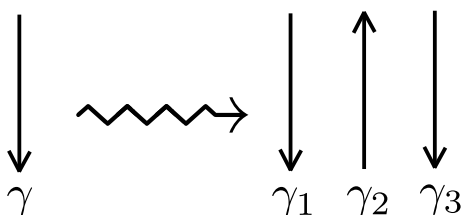


図 2: タングル図式の三重化

論文の構成は以下の通りである。2 節では定理の主張を述べるための準備をする。3 節では主結果を述べる。4 節では定理の証明のための準備をする。5 節では定理の証明を与える。付録の A 節と B 節では八面体カンドルの性質について述べる。

本論文の作成にあたり、終始熱心なご指導を賜った指導教員の大槻知忠教授に深く感謝いたします。また、コホモロジーについての情報をくださった津田塾大学の井上歩准教授、カンドルについての情報をくださった東京学芸大学の田中心准教授、数々の助言を頂いた京都大学数理解析研究所の石川勝巳助教に感謝いたします。最後に、ゼミの際に助力頂いた軽尾浩晃氏、山口貢輝氏に感謝いたします。

## 2 準備

この節では定理の主張を述べるための準備をする。2.1 節ではカンドルと結び目図式のカンドル彩色について復習する。カンドルの例として二面体カンドル、Alexander カンドル、八面体カンドルなどを扱う。2.2 節前半ではカンドルコサイクルの定義を復習し、カンドル 3-コサイクルの例を挙げる。2.2 節後半では結び目のカンドルコサイクル不変量、シャドーコサイクル不変量の定義を復習する。2.3 節では  $(+, -, +)$ -型タングル  $T$  の閉包をパターンとするサテライト結び目  $K^{(3)}(T)$  を定義する。

### 2.1 カンドルと結び目図式の彩色

この節ではカンドルの定義と結び目図式のカンドル彩色を復習する。詳しくは [7] 等を参照せよ。

集合  $X$  上の二つの二項演算  $*, \bar{*}: X \times X \rightarrow X$  が

(Q1) 任意の  $x, y, z \in X$  に対し  $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$

(Q2) 任意の  $x, y \in X$  に対し  $(x * y) \bar{*} y = (x \bar{*} y) * y = x$

(Q3) 任意の  $x \in X$  に対し  $x * x = x$

をみたすとき,  $(X, *)$  をカンドルという. また (Q1), (Q2) をみたすときラックという.  $(X, *)$  をカンドルとすると  $(X, \bar{*})$  もまたカンドルとなる. これを双対カンドルといい, 単に  $\bar{X}$  と表す.

$X, Y$  をカンドルとする. 写像  $f : X \rightarrow Y$  が任意の  $a, b \in X$  に対し  $f(a * b) = f(a) * f(b)$  をみたすとき,  $f$  をカンドル準同型という. 特に任意の  $y \in X$  に対し  $S_y : X \rightarrow X$  を  $S_y(x) = x * y$  と定めると, カンドルの定義よりこれはカンドル同型になる. 集合  $\{S_x | x \in X\}$  で生成される群をカンドル  $X$  の内部自己同型群といい  $\text{Inn}(X)$  と表す. 内部自己同型群の  $X$  への作用による軌道を  $X$  の連結成分といい, 連結成分の個数が一つであるようなカンドルを連結であるという. カンドル  $X$  の連結成分は  $X$  の演算でカンドルになる.  $X$  の各連結成分をその連結成分に分解することを繰り返し,  $X$  を連結なカンドルの不交和で表したものを  $X$  の極大連結部分カンドル分解といい, このときの各成分を (本論文では) 極大成分という.  $s(x) = S_x$  で定まる写像  $s : X \rightarrow \text{Inn}(X)$  が単射であるとき, カンドル  $X$  を忠実であるという. 任意の  $x \in X$  に対し  $S_x^2 = \text{id}_X$  が成り立つとき,  $X$  を圭であるという. カンドル  $X, \tilde{X}$  に対し, カンドル準同型  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  が全射かつ,  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$  に対し  $p(\tilde{x}) = p(\tilde{y})$  ならば  $S_{\tilde{x}} = S_{\tilde{y}}$  が成り立つとき,  $p$  を被覆写像という.

**例 2.1.**  $n$  を正の整数とし, 集合  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  に二項演算  $*$  を  $x * y = 2y - x$  で定めるとこれはカンドルとなる. これを二面体カンドルといい  $R_n$  と書く.  $R_n$  が連結であることと  $n$  が奇数であることは同値である.

**例 2.2.**  $\mathbb{Z}[T, T^{-1}]$  上の加群  $X$  に二項演算  $*$  を  $x * y = Tx + (1 - T)y$  で定めるとこれはカンドルとなる. これを Alexander カンドルという. 特に  $X = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[T, T^{-1}]/(T + 1)$  のとき  $X$  は二面体カンドルである.

**例 2.3.** 写像  $\mu, \tau : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  を

$$\mu(x) = \begin{cases} 2 & (x = 0 \text{ のとき}) \\ -1 & (x \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}, \quad \tau(x) = \begin{cases} 1 & (x = 2 \text{ のとき}) \\ 0 & (x \neq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める. アーベル群  $A$  と任意の  $c \in A$  に対し, 集合  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times A$  に二項演算  $*$  を  $(x, a) * (y, b) = (-x - y, -a + \mu(x - y) \cdot b + \tau(x - y) \cdot c)$  と定めるとこれはカンドルとなる. これを Galkin カンドルといい  $G(A, c)$  と書く [4].  $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  のとき二つのカンドル  $Q_6^a = G(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1), Q_6^b = G(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 0)$  が得られる.  $Q_6^a$  を八面体カンドルという. いずれも連結であるが,  $Q_6^a$  は圭ではなく,  $Q_6^b$  は圭であるので二つは異なるカンドルである. それぞれの演算を集合  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  上で実現したときのカンドル演算を表 1, 2 に示す.

**例 2.4.** 位数 12 のカンドル  $Q_{12}^a, Q_{12}^b$  が付録 A の表 3, 4 で定義される. これらは連結カ

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	6	5	3	4
2	2	2	5	6	4	3
3	5	6	3	3	2	1
4	6	5	4	4	1	2
5	4	3	1	2	5	5
6	3	4	2	1	6	6

表 1: カンドル  $Q_6^a$  の演算

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	5	6	3	4
2	2	2	6	5	4	3
3	5	6	3	3	1	2
4	6	5	4	4	2	1
5	3	4	1	2	5	5
6	4	3	2	1	6	6

表 2: カンドル  $Q_6^b$  の演算

ドルであり, それぞれ  $Q_6^a, Q_6^b$  への被覆写像  $f_a : Q_{12}^a \rightarrow Q_6^a, f_b : Q_{12}^b \rightarrow Q_6^b$  が存在する.  $Q_{12}^a$  は  $Q_6^a$  の中心拡大である (補題 A.1).  $Q_{12}^b$  は  $Q_6^b$  の中心拡大である (補題 A.2). また  $Q_{12}^a, Q_{12}^b$  はいずれも忠実ではない.

$(X, *)$  をラック (カンドル) とする. 集合  $M$  が  $X$ -集合であるとは, 二つの演算  $\triangleleft, \bar{\triangleleft} : M \times X \rightarrow M$  が

$$(Q1)' \text{ 任意の } w \in M, x, y \in X \text{ に対し } (w \triangleleft x) \triangleleft y = (w \triangleleft y) \triangleleft (x * y)$$

$$(Q2)' \text{ 任意の } w \in M, x \in X \text{ に対し } (w \triangleleft x) \bar{\triangleleft} x = (w \bar{\triangleleft} x) \triangleleft x = w$$

をみたすときをいう. 定義より任意のラック (カンドル)  $X$  は  $X$ -集合である.

$X, Y$  をカンドルとし,  $M$  を  $X$ -集合,  $N$  を  $Y$ -集合とする. 写像  $f : M \rightarrow N, g : X \rightarrow Y$  に対し,  $(f, g)$  が  $(X, Y)$ -集合射であるとは,  $g$  がカンドル準同型であり, かつ任意の  $m \in M, x \in X$  に対し

$$f(m \triangleleft x) = f(m) \triangleleft g(x)$$

であるときをいう.

$X$  をカンドルとし,  $D$  を結び目  $K$  の図式とする.  $D$  の弧の集合を  $\text{Arc}(D)$  とし, 写像  $\mathcal{C} : \text{Arc}(D) \rightarrow X$  で各交点において図 3 の左図のような関係をもたすものを  $D$  の  $X$ -彩色という. また  $D$  の全ての  $X$ -彩色の集合を  $\text{Col}_X(D)$  とし, その濃度を  $D$  の  $X$ -彩色数という.  $X$ -彩色数は結び目  $K$  の図式の取り方によらない  $K$  の不変量であり, 単に  $\text{col}_X(K)$  と表す.

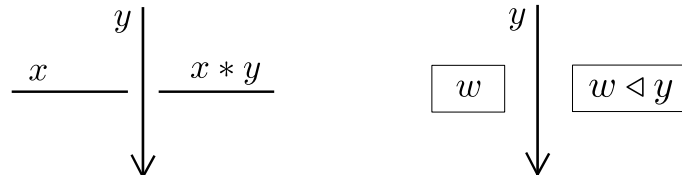


図 3: カンドル彩色とシャドー彩色

$\mathbb{R}^2$  における  $D$  の補空間の領域の集合を  $\text{Reg}(D)$  とする.  $M$  を  $X$ -集合とする. 写像

$\mathcal{C}'_1 : \text{Arc}(D) \rightarrow X$  と  $\mathcal{C}'_2 : \text{Reg}(D) \rightarrow M$  の組  $\mathcal{C}' = (\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2)$  で  $\mathcal{C}'_1$  が  $D$  の  $X$ -彩色, かつ隣接する領域において図 3 の右図のような関係をみたすものを  $D$  の  $M$ -シャドー  $X$ -彩色という.  $D$  の全ての  $M$ -シャドー  $X$ -彩色の集合を  $\text{Col}_{X,M}^s(D)$  とする.  $M = X, \triangleleft = *$  のときは単に  $\text{Col}_X^s(D)$  と表す. シャドー彩色は  $\text{Arc}(D)$  への制限  $\mathcal{C} \in \text{Col}_X(D)$  と外部領域  $D^{ex}$  の色  $r \in M$  が与えられると全ての領域に対し  $\mathcal{C}'_2$  の値が図 3 の右図の関係により帰納的に定められる. すなわち  $\text{Col}_{X,M}^s(D)$  は  $\text{Col}_X(D) \times M$  と一対一に対応する.

結び目と同様にタングル  $T$  に対してもカンドル  $X$  による彩色が定義できる.  $T$  を  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  上のタングルとし,  $D$  を  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  への射影とする. 二つのタングル図式  $D, D'$  がイソトピーなタングルを表すことは,  $D$  に Reidemeister 移動を有限回施すことで  $D'$  が得られることと同値である. よって交点において結び目の場合と同じ関係式を満たす写像の集合として  $X$ -彩色集合  $\text{Col}_X(D)$  が定義される. タングル図式のシャドー彩色は, 図式の左側の非有界領域の色  $r \in M$  を定めると全ての領域に対し  $\mathcal{C}'_2$  の値が帰納的に定まる.

被覆写像  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  が存在するとき, 1-タングルの  $X$ -彩色と  $\tilde{X}$ -彩色について, 次が知られている.

**補題 2.5** ([5]).  $D$  を 1-タングルの図式とし, その始点を  $s$  と表す. また  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  をカンドルの被覆写像とする. このとき,  $D$  の任意の  $X$ -彩色  $\mathcal{C}$  と  $p(\tilde{x}) = \mathcal{C}(s)$  なる  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  に対し  $D$  の  $\tilde{X}$ -彩色  $\tilde{\mathcal{C}}$  で  $\tilde{\mathcal{C}}(s) = \tilde{x}$  かつ  $\mathcal{C} = p \circ \tilde{\mathcal{C}}$  となるものが唯一つ存在する.

## 2.2 カンドルコサイクル不変量

この節ではカンドルコサイクルやカンドルの中心拡大の定義を復習する. またカンドルコサイクル不変量とシャドーコサイクル不変量の定義や不変性の証明を復習する. 詳しくは [8] 等を参照.

$X$  をラックとし,  $A$  をアーベル群とする. 写像  $\phi: X^2 \rightarrow A$  に対し  $d_2\phi: X^3 \rightarrow A$  を

$$d_2\phi(x, y, z) = \phi(x, z) - \phi(x, y) - \phi(x * y, z) + \phi(x * z, y * z)$$

で定める.  $d_2\phi$  をラック **3**-コバンドリという. また  $X$  をカンドルとし,  $\phi: X^2 \rightarrow A$  が

$$(B1) \quad \text{任意の } x \in X \text{ に対し } \phi(x, x) = 0$$

をみたすとき,  $d_2\phi$  をカンドル **3**-コバンドリという. またカンドル  $X$  に対し  $\phi$  が (B1) および

$$(B2) \quad \text{任意の } x, y, z \in X \text{ に対し } d_2\phi(x, y, z) = 0$$

をみたすとき,  $\phi$  をカンドル **2**-コサイクルという.

カンドル **2**-コサイクル  $\phi: X^2 \rightarrow A$  に対し, 集合  $A \times X$  に演算を

$$(a_1, x_1) * (a_2, x_2) = (a_1 + \phi(x_1, x_2), x_1 * x_2)$$

で定める. このとき  $A \times X$  はカンドルになる. これを  $X$  の中心拡大という. またこのとき, 射影  $A \times X \rightarrow X$  は被覆写像である. 詳細は [1] 等を参照.

**例 2.6.** カンドル  $Q_{12}^a$  は非自明な 2-コサイクル  $\phi_a \in H_Q^2(Q_6^a, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  に関する  $Q_6^a$  の中心拡大である. 詳細は補題 A.1 を参照. またカンドル  $Q_{12}^b$  は非自明な 2-コサイクル  $\phi_b \in H_Q^2(Q_6^b, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  に関する  $Q_6^b$  の中心拡大である. 詳細は補題 A.2 を参照.

$X$  をカンドルとし,  $A$  をアーベル群とする. 写像  $\theta: X^3 \rightarrow A$  が次の条件

(C1) 任意の  $w, x, y, z \in X$  に対し

$$\theta(w, x, y) + \theta(w, y, z) + \theta(w * y, x * y, z) = \theta(w, x, z) + \theta(w * x, y, z) + \theta(w * z, x * z, y * z)$$

(C2) 任意の  $x, y \in X$  に対し  $\theta(x, y, y) = 0$

(C3) 任意の  $x, y \in X$  に対し  $\theta(x, x, y) = 0$

をみたすとき,  $\theta$  をカンドル 3-コサイクルという. またラック  $X$  に対して写像  $\theta: X^3 \rightarrow A$  が (C1) をみたすとき,  $\theta$  をラック 3-コサイクルという.

$X$  をカンドル,  $M$  を  $X$ -集合とし,  $A$  をアーベル群とする. 写像  $\theta: M \times X^2 \rightarrow A$  が次の条件

(C1)' 任意の  $w \in M, x, y, z \in X$  に対し

$$\theta(w, x, y) + \theta(w, y, z) + \theta(w \triangleleft y, x * y, z) = \theta(w, x, z) + \theta(w \triangleleft x, y, z) + \theta(w \triangleleft z, x * z, y * z).$$

(C2)' 任意の  $w \in M, x \in X$  に対し  $\theta(w, x, x) = 0$ .

をみたすとき,  $\theta$  を  $M$ -シャドーカンドル 2-コサイクルという.

**例 2.7.**  $p$  を奇素数とし, 二面体カンドル  $R_p$  に対し写像  $\bar{\psi}: R_p^2 \rightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$  を

$$\bar{\psi}(x, y) = \bar{x}^p + (2\bar{y} - \bar{x})^p - 2\bar{y}^p$$

で定め,  $\psi: R_p^3 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  を

$$\psi(w, x, y) = (w - x) \frac{\bar{\psi}(x, y)}{p}$$

と定める. ただし  $x \in R_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  の  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$  へのリフトを  $\bar{x}$  と表す.  $\bar{\psi}$  は  $x, y$  のリフトの取り方によらず定まり,  $x, y$  によらず  $\bar{\psi}(x, y)$  は  $p$  で割り切れるので  $\psi$  は well-defined である. また  $\psi$  はカンドル 3-コサイクルの公理をみたす.  $\psi$  を望月 3-コサイクルという. カンドルコホモロジー群  $H_Q^3(R_p, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  は  $\psi$  の定めるコホモロジー類により生成される. 詳しくは [10] を参照.

**例 2.8.**  $Q_6^a$  から  $R_3 = \{0, 1, 2\}$  への全射準同型  $j_a$  が  $j_a(1) = j_a(2) = 0, j_a(3) = j_a(4) = 1, j_a(5) = j_a(6) = 2$  により定められる. この写像による望月 3-コサイクル  $\psi: R_3^3 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

の引き戻し  $\psi_a = \psi \circ (j_a \times j_a \times j_a)$  は  $Q_6^a$  のカンドル 3-コサイクルである. 3章の trefoil knot  $K_{3_1}$  に対するシャドーコサイクル不変量の計算より  $0 \neq [\psi_a] \in H_Q^3(Q_6^a, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$  であることが分かる. さらに  $H_Q^3(Q_6^a, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  であることが計算機により分かるので,  $j_a^* : H_Q^3(R_3; \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rightarrow H_Q^3(Q_6^a, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$  は同型である.

$Q_6^b$  から  $R_3 = \{0, 1, 2\}$  への全射準同型  $j_b$  が  $j_b(1) = j_b(2) = 0, j_b(3) = j_b(4) = 1, j_b(5) = j_b(6) = 2$  により定められる. この写像による望月 3-コサイクル  $\psi : R_3^3 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  の引き戻し  $\psi_b = \psi \circ (j_b \times j_b \times j_b)$  は  $Q_6^b$  のカンドル 3-コサイクルである. 付録 B の全射準同型  $J_a : Q_{12}^a \rightarrow R_3$  を用いて定義される写像  $\psi_{12}^a = \psi \circ (J_a \times J_a \times J_a) : (Q_{12}^a)^3 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , および  $J_b : Q_{12}^b \rightarrow R_3$  を用いて定義される写像  $\psi_{12}^b = \psi \circ (J_b \times J_b \times J_b) : (Q_{12}^b)^3 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  はいずれもカンドル 3-コサイクルである.

**例 2.9.** 任意のラック 3-コバンダリはラック 3-コサイクルである. またカンドル  $X$  と  $X$ -集合  $M$  と写像  $g : M \times X \rightarrow A$  に対し  $dg(w, x, y) = g(w, y) - g(w, x) - g(w \triangleleft x, y) + g(w \triangleleft y, x * y)$  と定めるとこれはシャドーカンドル 2-コサイクルである.

**例 2.10.** 任意のシャドーカンドル 2-コサイクル  $\theta : M \times X^2 \rightarrow A$  と  $a \in X$  に対し  $\theta_a : M \times X^2 \rightarrow A$  を  $\theta_a(w, x, y) = \theta(w \triangleleft a, x * a, y * a)$  と定めるとこれはシャドーカンドル 2-コサイクルになる. このとき,  $\xi_a(w, x) = \theta(w, x, a)$  とおくとシャドーカンドル 2-コサイクルの定義より  $\theta_a - \theta = d\xi_a$  が成り立つ.

カンドル 2-コサイクルが与えられると結び目のカンドルコサイクル不変量が定義できる.

$X$  をカンドルとし,  $\phi : X^2 \rightarrow A$  を  $X$  のカンドル 2-コサイクルとする. 結び目  $K$  の図式  $D$  に対し,  $D$  の  $X$ -彩色  $\mathcal{C}$  についての各交点  $\alpha$  でのウェイト  $B_\phi(\alpha, \mathcal{C})$  を図 4 のように定める.

$$B_\phi \left( \begin{array}{c} x \quad y \\ \swarrow \quad \searrow \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ x * y \end{array} \right) = \phi(x, y), \quad B_\phi \left( \begin{array}{c} y \quad x * y \\ \swarrow \quad \searrow \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ x \end{array} \right) = \phi(x, y)^{-1}$$

図 4: カンドル 2-コサイクルを用いた各交点におけるウェイト

また  $\Phi_\phi(D, \mathcal{C})$  を  $D$  の全ての交点におけるウェイト  $B_\phi$  の  $A$  での和と定める. さらに  $D$  の全ての  $X$  彩色についてのウェイトを  $\mathbb{Z}[A]$  において足し合わせたものを  $\Phi_\phi(D)$  とおく. つまり

$$\Phi_\phi(D) = \sum_{\mathcal{C} \in \text{Col}_X(D)} \Phi_\phi(D, \mathcal{C}) \in \mathbb{Z}[A].$$

このとき次が知られている.

**補題 2.11** ([8] 参照).  $\Phi_\phi(D)$  は  $K$  の不変量. つまり  $D, D'$  がともに  $K$  の図式るとき  $\Phi_\phi(D) = \Phi_\phi(D')$ .



$\Phi_\phi(D)$  を  $\Phi_\phi(K)$  と表し,  $K$  のカンドルコサイクル不変量という.

$X$  を有限カンドルとし,  $\phi: X \times X \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  をカンドル 2-コサイクルとする. また,  $Y$  を  $\phi$  により定義される  $X$  の中心拡大とし,  $p: Y \rightarrow X$  を射影とする. このとき, 結び目図式の彩色の持ち上げについて次が知られている.

**補題 2.12** ([1]).  $K$  を結び目とし,  $D$  をその図式とする. このとき,  $D$  の  $X$ -彩色  $\mathcal{C}$  に対し次は同値.

- (1)  $\Phi_\phi(D, \mathcal{C}) = 0$ .
- (2)  $p \circ \mathcal{C}' = \mathcal{C}$  となる  $\mathcal{C}' \in \text{Col}_Y(D)$  が存在する.

シャドーカンドル 2-コサイクルが与えられると結び目のシャドーコサイクル不変量が定義できる.

$X$  をカンドル,  $M$  を  $X$ -集合とし,  $\theta: M \times X^2 \rightarrow A$  を  $X$  の  $M$ -シャドーカンドル 2-コサイクルとする. 結び目  $K$  の図式  $D$  に対し, シャドー彩色  $(\mathcal{C}, r) \in \text{Col}_{X, M}^s(D)$  についての各交点でのウェイト  $W_\theta$  を図 5 のように定める.

$$W_\theta \left( \begin{array}{c} x \quad y \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{w} \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \quad x * y \end{array} \right) = \theta(w, x, y), \quad W_\theta \left( \begin{array}{c} y \quad x * y \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{w} \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \quad x \end{array} \right) = \theta(w, x, y)^{-1}$$

図 5: シャドーカンドル 2-コサイクルを用いた各交点におけるウェイト

また  $W_\theta(D, \mathcal{C}; r)$  を  $D$  の全ての交点におけるウェイトの  $A$  での和と定める. さらに  $r \in X$  に対し外部領域の色が  $r$  であるような全てのシャドー彩色についてのウェイトを  $\mathbb{Z}[A]$  において足し合わせたものを  $\Psi_\theta(D, r)$  とおく. つまり

$$\Psi_\theta(D, r) = \sum_{\mathcal{C} \in \text{Col}_X(D)} W_\theta(D, \mathcal{C}; r) \in \mathbb{Z}[A].$$

このとき次が成り立つ.

**補題 2.13** ([8] 参照).  $\Psi_\theta(D, r)$  は  $K$  の不変量. つまり  $D, D'$  がともに  $K$  の図式のとき  $\Psi_\theta(D, r) = \Psi_\theta(D', r)$ .

**証明.** [8] に沿って証明を復習する.  $RI, RII, RIII$  移動での不変性を示す.

$RI$  移動での不変性は  $(C2)'$  より従う.

$RII$  移動での不変性は  $W_\theta$  の定義より得られる.

$RIII$  移動での不変性を示す. 図 6 において, 左図のウェイトの和は  $\theta(w, x, y) + \theta(w, y, z) + \theta(w \triangleleft y, x * y, z)$  であり右図のウェイトの和は  $\theta(w, x, z) + \theta(w \triangleleft x, y, z) + \theta(w \triangleleft z, x * z, y * z)$  である.  $(C1)'$  より 2 式は等しい. よって  $RIII$  移動での不変性は示された.  $\square$

$\Psi_\theta(D, r)$  を  $\Psi_\theta(K, r)$  と表し,  $K$  のシャドーコサイクル不変量という.

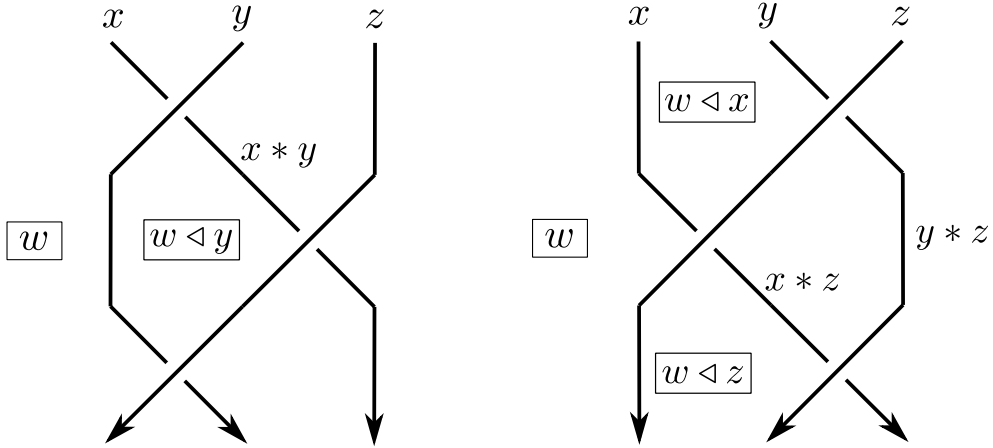


図 6:  $R_{III}$  移動によるシャドー彩色の変化

補題 2.14 ([8] 参照).  $X$  がカンドル,  $\theta : X^3 \rightarrow A$  がシャドーカンドル 2-コサイクル,  $f$  がラック 3-コバンダリするとき  $\Psi_\theta(K, r) = \Psi_{\theta+f}(K, r)$ .

証明. [8] に沿って証明を復習する. 任意の彩色に対しラック 3-コバンダリのウェイトへの寄与の総和が 0 となることを示す.

$f$  がラック 3-コバンダリするとき  $f(x, y, z) = g(x, z) - g(x, y) - g(x * y, z) + g(x * z, y * z)$  となる関数  $g : X^2 \rightarrow A$  が存在する. 結び目関式  $D$  の  $X$ -シャドー  $X$  彩色  $\mathcal{C}$  に対し,  $D$  の全ての交点を 4 個頂点に置き換えて得られる有向グラフの各辺に図 7 のように  $g$  の値を対応させる. このとき頂点回りの値の和が対応する交点におけるウェイトに等しいことに注意する. 得られた各辺における値は  $\pm g(\text{辺の右側領域の色}, \text{辺の色})$  であり, 一つの辺での

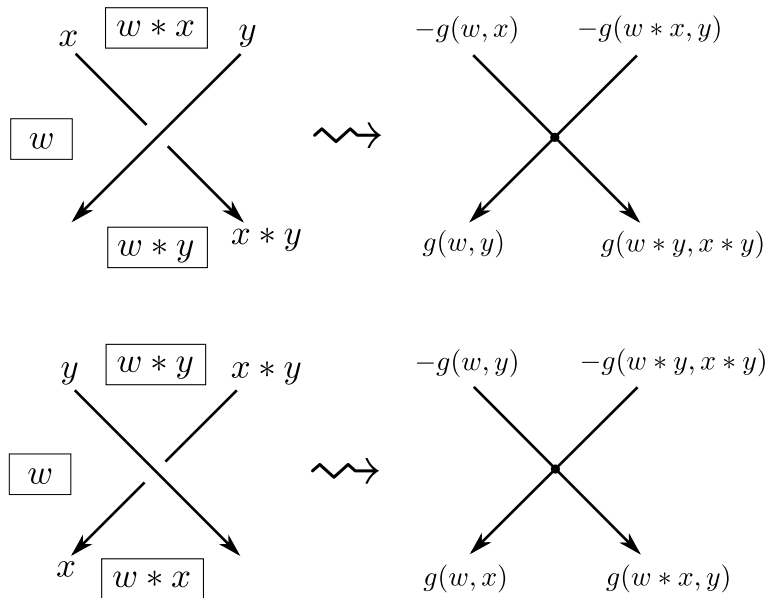


図 7: ラック 3-コバンダリの各交点におけるウェイトの分配

値の和は0になる．よって全ての辺に対し足し合わせることで  $f$  に対応するウェイトの総和が0であることが示される．  $\square$

$\theta$  がカンドル 3-コバンダリ のとき,  $\Psi_\theta(K, r)$  は  $K$  の  $X$  彩色数  $\text{col}_X(K)$  に等しい．

望月 3-コサイクル  $\psi$  については  $\Psi_\psi(K, r)$  は外部領域の色によらない．より詳細には次が成り立つ．

**補題 2.15** ([12]).  $X = R_p$  が二面体カンドル,  $\psi$  が望月 3-コサイクル のとき  $W_\psi(D, \mathcal{C}; r)$  は外部領域の色  $r$  によらない．

**証明.** [12] に沿って証明する．  $W_\psi(D, \mathcal{C}; r)$  と  $W_\psi(D, \mathcal{C}; r+1)$  が等しいことを示す．

外部領域  $D^{ex}$  を黒く塗り,  $D^{ex}$  と隣接する全ての領域を白く塗り, 白い領域に隣接する全ての領域を黒く塗る．色を交互に塗ることを繰り返すことで全ての領域は黒または白で塗られる．彩色  $\mathcal{C}$  の下で外部領域に  $r+1$  を対応させるシャドー彩色において, 黒い領域の色は元のシャドー彩色に  $+1$  したものの, 白い領域の色は元のシャドー彩色に  $-1$  したものに置き換わる．シャドー彩色  $(\mathcal{C}, r)$  と  $(\mathcal{C}, r+1)$  に対する交点のウェイトの差分は, 図 8 の 1,4 行目については  $\bar{\psi}(x, y)/p$  であり, 2,3 行目については  $-\bar{\psi}(x, y)/p$  である．

結び目図式  $D$  の全ての交点を 4 価頂点に置き換えて得られる有向グラフの各辺に図 8 の 3 列目のように  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$  の値を対応させる．このとき頂点まわりの 4 つの値を足し合わせて  $p$  で割ったものはその交点におけるウェイトの差分に等しい．各有向辺について, 辺の属する弧の  $R_p$  彩色が  $x$  とする．辺の右側領域が黒色のとき, 有向辺の始点での値は  $-x^p$ , 終点での値は  $x^p$  である．また辺の右側領域が白色のとき, 有向辺の始点での値は  $x^p$ , 終点での値は  $-x^p$  である．よって任意の有向辺について, 対応する  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$  値の和は 0 となる．これらを全ての辺について足し合わせて  $p$  で割ったものが  $W_\psi(D, \mathcal{C}; r+1) - W_\psi(D, \mathcal{C}; r)$  であるので,  $W_\psi(D, \mathcal{C}; r+1) = W_\psi(D, \mathcal{C}; r)$  が成り立つ．  $\square$

シャドーコサイクル不変量はタングルに対しても定義される．  $\theta : M \times X^2 \rightarrow A$  をシャドーカンドル 2-コサイクル とする．タングル図式  $D$  に対し  $\mathcal{C} \in \text{Col}_X(D), r \in M$  をとり, 左側領域の色が  $r$  であるシャドー彩色  $(\mathcal{C}, r)$  に対する各交点でのウェイトの和を  $W_\theta(D, \mathcal{C}; r)$  とする．このとき

$$\Psi_\theta(D, r) = \sum_{\mathcal{C} \in \text{Col}_X(D)} W_\theta(D, \mathcal{C}; r) \in \mathbb{Z}[A]$$

はタングルのイソトピー不変量である．証明は補題 2.13 と同様．

### 2.3 サテライト結び目

この節ではサテライト結び目の定義を復習する．また  $(+, -, +)$ -型タングルを定義する．

$V = S^1 \times D^2$  を solid torus とし,  $K_1$  を  $V$  内の結び目,  $K_2$  を  $S^3$  内の枠付き結び目とする．  $f : V \rightarrow S^3$  を  $f(S^1 \times \{0\}) = K_2$  かつ  $f$  による  $V$  の longitude の像が  $K_2$  の枠に一致するような埋め込みとする．このとき,  $f$  による  $K_1$  の像をサテライト結び目という．また

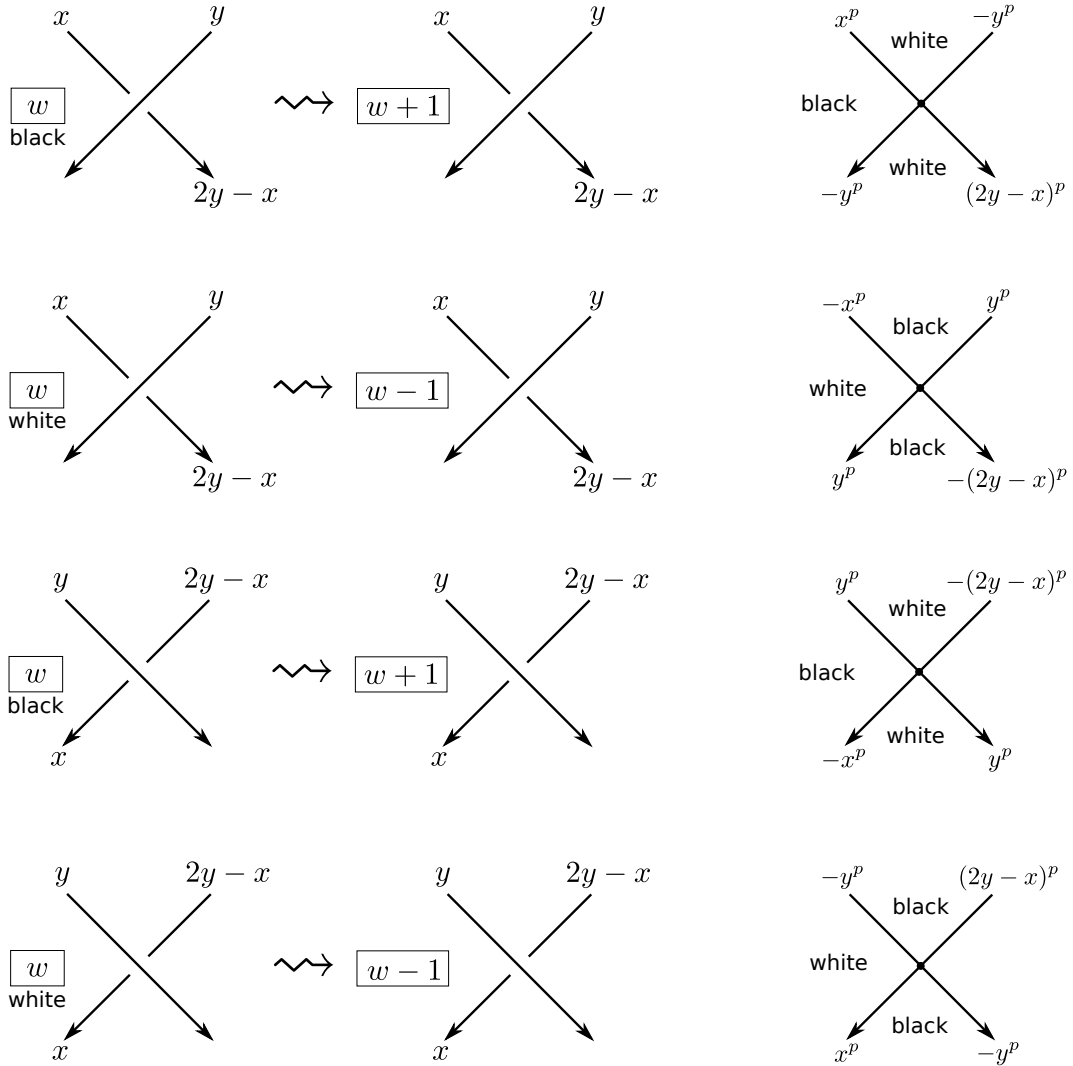


図 8: 望月 3-コサイクルに対するウェイトの各交点における差分

このとき  $K_1$  をパターン,  $K_2$  をコンパニオンという.

(3, 3) タングルであり端点における向きが図 9 の左図のようなタングルを  $(+, -, +)$ -型であるという. また  $(+, -, +)$ -型のタングル  $T$  に対し図 9 の右図で与えられる結び目を  $T$  の solid torus  $V$  における閉包といい,  $\hat{T}$  と表す.

**定義 2.16.**  $K$  を結び目とし,  $T$  を  $(+, -, +)$ -型のタングルとする.  $\hat{T}$  をパターンとし  $K$  の 0 枠をコンパニオンとするサテライト結び目を  $K^{(3)}(T)$  と表す.

$K^{(3)}(T)$  の図式は次のようにして得られる. 結び目  $K$  上に基点  $b$  を取り,  $b$  が外部領域に接するような結び目図式  $D$  を  $b$  で切断して得られる  $(1, 1)$  タングル図式を  $\check{D}$  と表す. また  $\check{D}$  を 0 枠に沿って三重化した図式を  $\check{D}^{(3)}$  とする. ただし  $\check{D}^{(3)}$  が  $(+, -, +)$ -型タングルとなるよう各成分に向きを定める.  $\check{D}^{(3)}$  を  $(+, -, +)$ -型のタングル  $T$  と合成し, その閉包

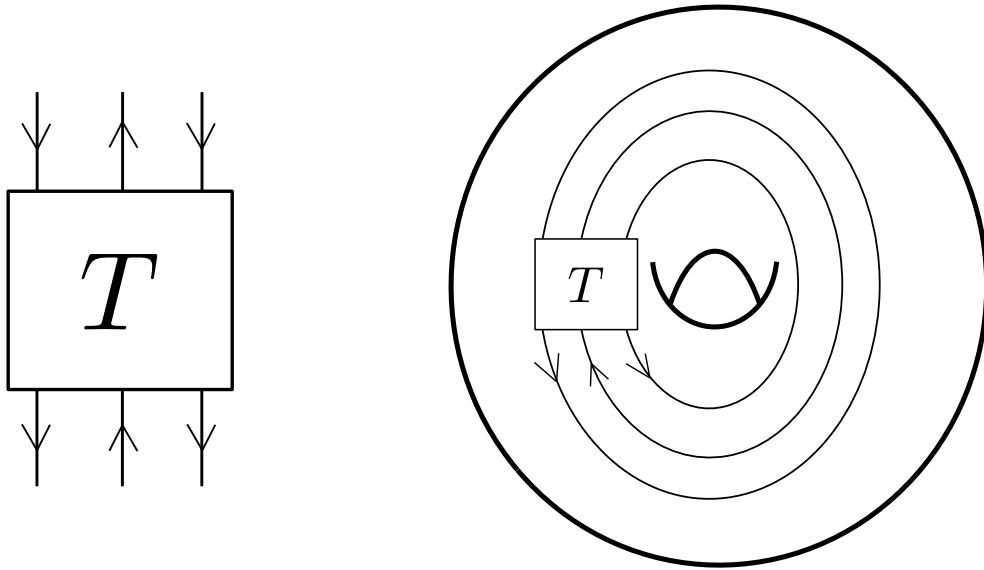


図 9:  $(+, -, +)$ -型のタングルとその閉包

を取ったものが  $K^{(3)}(T)$  の図式である。

### 3 主結果

この節では 2 節で定義したサテライト結び目に対し、カンドル彩色数およびシャドーコサイクル不変量のサテライト化公式を述べる。3.1 節では一般のカンドルに対する結果を与える。3.2 節では Alexander カンドルによる彩色数についてのサテライト化公式と、二面体カンドルの望月 3-コサイクルで定義されるシャドーコサイクル不変量のサテライト化公式を与える。3.3 節では八面体カンドルについての結果を与える。

#### 3.1 一般のカンドルの場合

この節では一般のカンドルに対し彩色数のサテライト化公式を与える。また一般のシャドーカンドル 2-コサイクルに対しシャドーコサイクル不変量のサテライト化公式を与える。

$X$  を有限かつ連結なカンドルとする。  $K^{(3)}(T)$  の  $X$ -彩色数についてのサテライト化公式を与える。  $T$  の上端と下端の色がそれぞれ  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X^3$  であるような  $T$  の彩色の集合を  $\text{Col}_X(T; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  と表し、その濃度を  $\text{col}_X(T; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  とかく。

**定理 3.1.**  $K$  を結び目とし、  $T$  を  $(+, -, +)$ -型のタングルとする。  $X$  を有限かつ連結なカンドルとする。 このとき、ある連結カンドルの有限族  $\{X_i\}_{i \in I}$  が存在し

$$\text{col}_X(K^{(3)}(T)) = \sum_{i \in I} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_i} \text{col}_X(T; \mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \text{col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$$

と表される。

次にシャドーコサイクル不変量についてのサテライト化公式を与える。

**定理 3.2.**  $K$  を結び目とし,  $T$  を  $(+, -, +)$ -型のタングルとする.  $X$  を有限かつ連結なカンドル,  $M$  を  $X$ -集合とし,  $\psi : M \times X^2 \rightarrow A$  をシャドーカンドル 2-コサイクルとする. このとき, ある連結カンドルの有限族  $\{X_i\}_{i \in I}$  とシャドーカンドル 2-コサイクルの族  $\{\psi_i\}_{i \in I}$  が存在し

$$\Psi_\psi(K^{(3)}(T), r) = \sum_{i \in I} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_i} \Psi_\psi(T; \mathbf{y}, \mathbf{x}, r) \cdot \Psi_{\psi_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y}, r)$$

と表される. ここで  $\Psi_\psi(T; \mathbf{y}, \mathbf{x}, r) = \sum_{\mathcal{C} \in \text{Col}_X(T; \mathbf{x}, \mathbf{y})} W_\psi(T, \mathcal{C}; r)$  と表す.

### 3.2 Alexander カンドルの場合

この節では一般の Alexander カンドルによる彩色数のサテライト化公式と, 奇素数位数の二面体カンドルの望月 3-コサイクルについてのシャドーコサイクル不変量のサテライト化公式を与える.

まずは Alexander カンドルによる彩色数についてのサテライト化公式を与える.

**定理 3.3.**  $K$  を結び目とし,  $T$  を  $(+, -, +)$ -型のタングルとする. また  $\hat{T}$  を  $T$  の  $S^3$  における閉包とする. このとき任意の有限, 連結かつ忠実な Alexander カンドル  $X$  に対し

$$\text{col}_X(K^{(3)}(T)) = \text{col}_X(K) \cdot \text{col}_X(\hat{T})/|X| \in \mathbb{Z}$$

が成り立つ.

次にシャドーコサイクル不変量について, 奇素数位数の二面体カンドルの望月 3-コサイクルに対しサテライト化公式を与える. 補題 2.15 より外部領域の色を省略して表す.

**定理 3.4.**  $K$  を結び目とし,  $T$  を  $(+, -, +)$ -型のタングルとする. また  $\hat{T}$  を  $T$  の  $S^3$  における閉包とする.  $\psi : R_p^3 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  を望月 3-コサイクルとすると

$$\Psi_\psi(K^{(3)}(T)) = \Psi_\psi(K) \cdot \Psi_\psi(\hat{T})/p \in \mathbb{Z}[t]/(t^p - 1)$$

が成り立つ. ここで  $\mathbb{Z}[t]/(t^p - 1)$  は  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \langle t \mid t^p = 1 \rangle$  の群環である.

### 3.3 八面体カンドルの場合

この節では八面体カンドル  $Q_6^a$  による彩色数についてのサテライト化公式と, 八面体カンドルの  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  係数のコホモロジー類に対するシャドーコサイクル不変量のサテライト化公式を与える.

まずは  $Q_6^a$ -彩色数についてのサテライト化公式を与える.

定理 3.5.  $K$  を結び目とし,  $T$  を  $(+, -, +)$ -型のタングルとする. このとき

$$\begin{aligned} \text{col}_{Q_6^a}(K^{(3)}(T)) &= \left\{ \sum_{i=1}^4 c_{i,0} + 4 \sum_{i=3}^6 c_{2i,0} \right\} \cdot C_0(K, Q_6^a) \\ &\quad + \left\{ \sum_{i=1}^4 c_{i,0} + 4 \sum_{i=3}^6 c_{2i,1} \right\} \cdot C_1(K, Q_6^a) \\ &\quad + \sum_{i=7}^{10} 4c_{i,0} \cdot \text{col}_{Q_6^b}(K) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで  $c_{i,0}, c_{i,1}$  は付録の  $X_i$  から任意に選んだ基点  $x_{0,i} \in X_i$  に対し  $c_{i,0} = \text{col}_{Q_6^a}(T; \mathbf{x}_{0,i}, \mathbf{x}_{0,i}) (1 \leq i \leq 20)$ ,  $c_{i,1} = \text{col}_{Q_6^a}(T; \widetilde{\mathbf{x}}_{0,i}, \mathbf{x}_{0,i}) (5 \leq i \leq 12)$  となるような定数. また  $C_0(K, Q_6^a), C_1(K, Q_6^a)$  は 2-コサイクル  $\phi_a : (Q_6^a)^2 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  により定義されるカンドルコサイクル不変量の定数項と生成元の係数, つまり

$$\Phi_{\phi_a}(K) = C_0(K, Q_6^a) + C_1(K, Q_6^a) \cdot t \in \mathbb{Z}[t]/(t^2 - 1)$$

となる非負整数である.

具体例として, 図 10 のタングル  $T_{m,n}$  に対しサテライト結び目  $K^{(3)}(T_{m,n})$  の  $Q_6^a$  彩色数を  $K$  の彩色数の式で表す. 簡単のため  $K^{(3)}(T_{m,n})$  が結び目となる場合, すなわち  $m, n$  がともに奇数のときのみを考える.

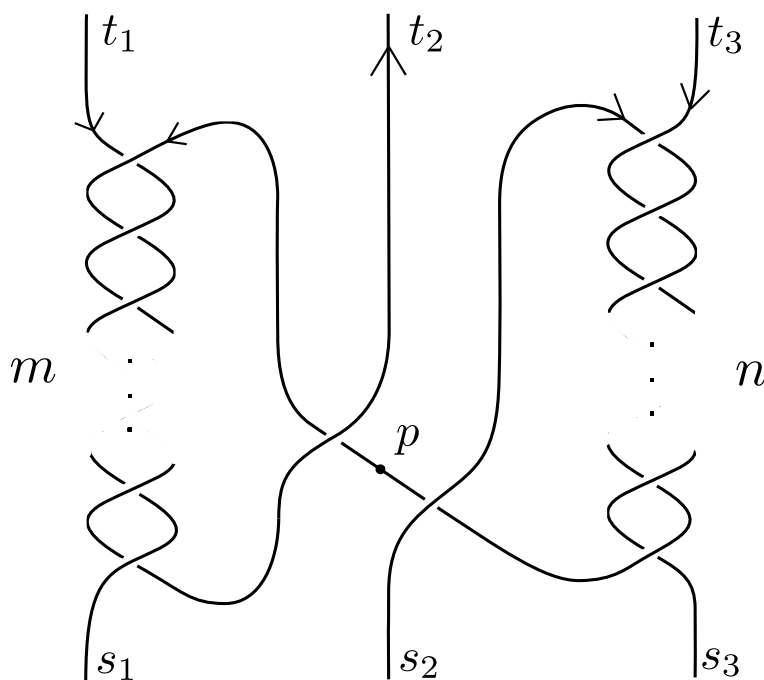


図 10: タングル  $T_{m,n}$

**例 3.6.**  $T_{m,n}$  により定義されるサテライト結び目  $K^{(3)}(T_{m,n})$  の  $Q_6^a$  彩色数について、以下が成立する.

(1)  $m, n \notin 3\mathbb{Z}$  のとき

$$\text{col}_{Q_6^a}(K^{(3)}(T_{m,n})) = \text{col}_{Q_6^a}(K).$$

(2)  $m \in 3\mathbb{Z}, n \notin 3\mathbb{Z}$  または  $m \notin 3\mathbb{Z}, n \in 3\mathbb{Z}$  のとき

$$\text{col}_{Q_6^a}(K^{(3)}(T_{m,n})) = 5 \text{col}_{Q_6^a}(K).$$

(3)  $m, n \in 3\mathbb{Z}$  のとき

$$\text{col}_{Q_6^a}(K^{(3)}(T_{m,n})) = 9 \text{col}_{Q_6^a}(K) + 8C_0(K, Q_6^a) + 8 \text{col}_{Q_6^b}(K).$$

次にシャドーコサイクル不変量について、望月 3-コサイクルの引き戻しとして得られるカンドル 3-コサイクル  $\psi_a : (Q_6^a)^3 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  に対する公式を与える.  $\psi_{12}^a : (Q_{12}^a)^3 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ,  $\psi_b : (Q_6^b)^3 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  を例 2.8 で定義したカンドル 3-コサイクルとする. いずれのカンドル 3-コサイクルも望月 3-コサイクルの引き戻しであるので外部領域の色を省略して表す.

**定理 3.7.**  $(Q_6^a)^{(3)}$  の付録 A の各連結成分  $X_i$  から基点  $x_{0,i}$  を任意にとる. このとき任意の結び目  $K$  と  $(+, -, +)$ -型のタングル  $T$  に対し

$$\begin{aligned} \Psi_{\psi_a}(K^{(3)}(T)) &= \left\{ \sum_{i=1}^4 \Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{x}_{0,i}, \mathbf{x}_{0,i}) + 4 \sum_{i=3}^6 \Psi_{\psi_a}(T; \tilde{\mathbf{x}}_{0,2i}, \mathbf{x}_{0,2i}) \right\} \cdot \Psi_{\psi_a}(K) \\ &+ \left\{ 2 \sum_{i=3}^6 \Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{x}_{0,2i}, \mathbf{x}_{0,2i}) - 2 \sum_{i=3}^6 \Psi_{\psi_a}(T; \tilde{\mathbf{x}}_{0,2i}, \mathbf{x}_{0,2i}) \right\} \cdot \Psi_{\psi_{12}^a}(K) \\ &+ 4 \sum_{i=7}^{10} \Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{x}_{0,2i}, \mathbf{x}_{0,2i}) \cdot \Psi_{\psi_b}(K) \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし

$$\Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\mathcal{C}_T \in \text{Col}_{Q_6^a}(T; \mathbf{x}, \mathbf{y})} W_{\psi_a}(T, \mathcal{C}_T)$$

と定める.

具体例として、図 10 のタングル  $T_{m,n}$  に対するサテライト結び目  $K^{(3)}(T_{m,n})$  のシャドーコサイクル不変量を  $K$  のシャドーコサイクル不変量の式で表す. 定理 3.6 と同様、 $m, n$  がともに奇数のときのみを考える.

**例 3.8.**  $T_{m,n}$  により定義されるサテライト結び目  $K^{(3)}(T_{m,n})$  のシャドーコサイクル不変量について、以下が成立する.

(1)  $m, n \notin 3\mathbb{Z}$  のとき

$$\Psi_{\psi_a}(K^{(3)}(T_{m,n})) = \Psi_{\psi_a}(K).$$



(2)  $m = 3M \in 3\mathbb{Z}, n \notin 3\mathbb{Z}$  のとき

$$\Psi_{\psi_a}(K^{(3)}(T_{m,n})) = (1 + 4t^{-M})\Psi_{\psi_a}(K).$$

(3)  $n = 3N \in 3\mathbb{Z}, m \notin 3\mathbb{Z}$  のとき

$$\Psi_{\psi_a}(K^{(3)}(T_{m,n})) = (1 + 4t^{-N})\Psi_{\psi_a}(K).$$

(4)  $m = 3M, n = 3N \in 3\mathbb{Z}$  のとき

$$\Psi_{\psi_a}(K^{(3)}(T_{m,n})) = (1 + 4t^{-M} + 4t^{-N})\Psi_{\psi_a}(K) + 4t^{-M-N} \cdot \Psi_{\psi_{12}^a}(K) + 8t^{-M-N} \cdot \Psi_{\psi_b}(K).$$

例 3.8 の応用として、タングル  $T_{m,n}$  に対し特にコンパニオンが trefoil knot  $K_{3_1}$  の場合にシャドーコサイクル不変量を具体的に計算する。

**例 3.9.**  $T_{m,n}$  により定義されるサテライト結び目  $K^{(3)}(T_{m,n})$  のシャドーコサイクル不変量について、以下が成立する。

(1)  $m, n \notin 3\mathbb{Z}$  のとき

$$\Psi_{\psi_a}(K_{3_1}^{(3)}(T_{m,n})) = 6(1 + 4t^2).$$

(2)  $m = 3M \in 3\mathbb{Z}, n \notin 3\mathbb{Z}$  のとき

$$\Psi_{\psi_a}(K_{3_1}^{(3)}(T_{m,n})) = 6(1 + 4t^2)(1 + 4t^{-M}).$$

(3)  $n = 3N \in 3\mathbb{Z}, m \notin 3\mathbb{Z}$  のとき

$$\Psi_{\psi_a}(K_{3_1}^{(3)}(T_{m,n})) = 6(1 + 4t^2)(1 + 4t^{-N}).$$

(4)  $m = 3M, n = 3N \in 3\mathbb{Z}$  のとき

$$\Psi_{\psi_a}(K_{3_1}^{(3)}(T_{m,n})) = 6(1 + 4t^2)(1 + 4t^{-M} + 4t^{-N}) + 96t^{-M-N}(1 + 2t^2).$$

**証明.** 計算により

$$\Psi_{\psi_a}(K_{3_1}) = 6(1 + 4t^2)$$

$$\Psi_{\psi_{12}^a}(K_{3_1}) = 12$$

$$\Psi_{\psi_b}(K_{3_1}) = 6(1 + 4t^2)$$

であることが確かめられるので、例 3.8 の右辺にそれぞれ値を代入すればよい。  $\square$

## 4 定理の証明の準備

この節では定理の証明をするための準備をする。4.1 節では  $X \times \overline{X} \times X$  にカンドルの構造が入ることを示し、 $X$  が Alexander カンドルの場合に  $X^{(3)}$  の連結成分を求める。4.2 節では  $X$  のシャドーカンドル 2-コサイクル  $\psi$  に対し  $X^{(3)}$  のシャドーカンドル 2-コサイクル  $\psi^{(3)}$  を定義する。4.3 節では  $R_p$  の望月 3-コサイクル  $\psi$  に対し、 $\psi^{(3)}$  を  $(R_p)^{(3)}$  の連結成分に制限したコサイクルが  $\psi$  にコホモロガスであることを示す。

#### 4.1 カンドルの三重化

この節では 1-タングルを 0-枠に沿って三重化し  $(+, -, +)$ -型のタングルとなるように向きを入れたとき, 下向きの成分にカンドル  $X$ , 上向きの成分に双対カンドル  $\bar{X}$  を対応させると  $X$  の三重化カンドル  $X^{(3)}$  が得られることを示す.

**定義 4.1.** カンドル  $X$  と双対カンドル  $\bar{X}$  に対し  $X^{(3)} = X \times \bar{X} \times X$  とおく.  $X^{(3)}$  の二項演算  $*' : X^{(3)} \times X^{(3)} \rightarrow X^{(3)}$  を

$$(x_1, x_2, x_3) *' (y_1, y_2, y_3) = (x_1^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y_1 \bar{y}_2 y_3}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y_1 \bar{y}_2 y_3}, x_3^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y_1 \bar{y}_2 y_3})$$

で定める. ここで  $x^y = x * y, x^{\bar{y}} = x * \bar{y}$  であり,  $w^{\bar{x}yz} = ((w^{\bar{x}})^y)^z$  のように表す.

以下では  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  などと表す.  $\mathbf{x} * \mathbf{y}$  は正の交点からなるタングル図式を 0 枠に沿って三重化し向きを図 11 の右図のように定めたとき, 三重化した図式の  $X$  彩色において上の端点の色が  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  となっているときの下の端点の色として現れる.

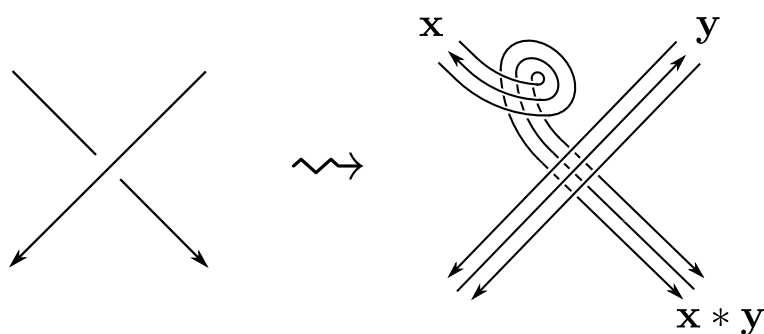


図 11: 交点の 0 枠に沿った三重化と  $X$ -彩色

**補題 4.2.**  $(X^{(3)}, *')$  はカンドル.

**証明.** (Q1)(Q2)(Q3) が成り立つことを示す.

(Q1) について, 任意の  $x, z \in X$  に対し  $z^{x\bar{x}} = z = z^{\bar{x}x}$  より

$$z^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_3} = ((z^{\bar{x}_3 x_2})^{\bar{x}_1 x_1})^{\bar{x}_2 x_3} = ((z^{\bar{x}_3})^{x_2 \bar{x}_2})^{x_3} = z^{\bar{x}_3 x_3} = z$$

よって  $\mathbf{x} *' \mathbf{x} = \mathbf{x}$  が成り立つ.

(Q2) については  $X$  上の写像  $z \mapsto z^{y_1 \bar{y}_2 y_3}$  が全単射であることと,  $w_i = x_i^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}$  とおくと  $x_i = w_i^{w_1 \bar{w}_2 w_3}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) となることから従う.

(Q3) について,  $(\mathbf{x} *' \mathbf{y}) *' \mathbf{z}$  の第  $i$  成分は  $X, \bar{X}$  の分配法則および  $(x * y)^{\bar{z}} = x^{\bar{z}} * y^{\bar{z}}, (x * \bar{y})^z =$

$x^z \bar{*} y^z$  を繰り返し用いて

$$\begin{aligned} & \left( \left( \left( \left( x_i^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y_1 \bar{y}_2 y_3} \bar{*} x_3^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y_1 \bar{y}_2 y_3} \right) * x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y_1 \bar{y}_2 y_3} \right) \bar{*} x_1^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y_1 \bar{y}_2 y_3} \right) \right)^{z_1 \bar{z}_2 z_3} \\ & = \left( \left( \left( x_i \bar{*} x_3 \right) * x_2 \right) \bar{*} x_1 \right)^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y_1 \bar{y}_2 y_3 z_1 \bar{z}_2 z_3} \end{aligned}$$

と変形できる. 一方  $(\mathbf{x} *' \mathbf{z}) *' (\mathbf{y} *' \mathbf{z})$  の第  $i$  成分は,  $v_j = y_j^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}$  とおくと

$$\begin{aligned} & \left( \left( \left( \left( \left( x_i^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 z_1 \bar{z}_2 z_3} \bar{*} x_3^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 z_1 \bar{z}_2 z_3} \right) * x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 z_1 \bar{z}_2 z_3} \right) \bar{*} x_1^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 z_1 \bar{z}_2 z_3} \right) * v_1^{z_1 \bar{z}_2 z_3} \right) \bar{*} v_2^{z_1 \bar{z}_2 z_3} \right) * v_3^{z_1 \bar{z}_2 z_3} \\ & = \left( \left( \left( \left( \left( x_i^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1} \bar{*} x_3^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1} \right) * x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1} \right) \bar{*} x_1^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1} \right) * v_1 \right) \bar{*} v_2 \right) * v_3 \right)^{z_1 \bar{z}_2 z_3} \\ & = \left( \left( \left( \left( x_i \bar{*} x_3 \right) * x_2 \right) \bar{*} x_1 \right)^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1} * v_1 \right) \bar{*} v_2 \right) * v_3 \right)^{z_1 \bar{z}_2 z_3} \\ & = \left( \left( \left( \left( x_i \bar{*} x_3 \right) * x_2 \right) \bar{*} x_1 \right)^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1} * y_1^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1} \right) \bar{*} y_2^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1} \right) * y_3^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1} \right)^{z_1 \bar{z}_2 z_3} \end{aligned}$$

となる. よって 2 式が等しいことを示すには任意の  $w \in X$  に対し  $w^{y_1 \bar{y}_2 y_3} = ((w * y_1^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}) \bar{*} y_2^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}) * y_3^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}$  を示せば十分. 実際,

$$\begin{aligned} ((w * y_1^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}) \bar{*} y_2^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}) * y_3^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1} & = ((w^{y_1 \bar{y}_2 y_3} \bar{*} y_1^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}) \bar{*} y_2^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}) * y_3^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1} \\ & = (((w^{y_1 \bar{y}_2 y_3} * y_1) \bar{*} y_2) * y_3)^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1} \\ & = w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 y_1 \bar{y}_2 y_3 y_1 \bar{y}_2 y_3 y_1} = w^{y_1 \bar{y}_2 y_3} \end{aligned}$$

と変形できるので等式が成り立つ.

ゆえに (Q1), (Q2), (Q3) 全てをみたすので  $X^{(3)}$  はカンドルである. □

幾つかの連結カンドル  $X$  に対し  $X^{(3)}$  の連結成分を求める.

**補題 4.3.**  $X$  が有限かつ連結な Alexander カンドルのとき

$$X^{(3)} = \bigsqcup_{i,j \in X} O_{i,j}.$$

ここで  $O_{i,j} = \{x_{i,j} = (x + i, x + i + j, x + j) | x \in X\}$  は  $X$  に同型なカンドル.

**証明.** 集合として  $X^{(3)} = \bigsqcup_{i,j \in X} O_{i,j}$  であることに注意する.  $x \bar{*} y = T^{-1}x + (1 - T^{-1})y$  より

$$\begin{aligned} z^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y_1 \bar{y}_2 y_3} & = (T^{-1}z + (1 - T^{-1})x_3)^{x_2 \bar{x}_1 y_1 \bar{y}_2 y_3} \\ & = (z + (T - 1)x_3 + (1 - T)x_2)^{\bar{x}_1 y_1 \bar{y}_2 y_3} \\ & = (T^{-1}z + (1 - T^{-1})(x_3 - x_2 + x_1))^{y_1 \bar{y}_2 y_3} \\ & = (z + (T - 1)(x_3 - x_2 + x_1 - y_1))^{\bar{y}_2 y_3} \\ & = (T^{-1}z + (1 - T^{-1})(x_3 - x_2 + x_1 - y_1 + y_2))^{y_3} \\ & = z + (T - 1)(x_3 - x_2 + x_1 - y_1 + y_2 - y_3) \end{aligned}$$

であるので  $x_{i,j} *' (y_1, y_2, y_3)$  は  $x_{i,j}$  の各成分に同じ元  $\exists a \in X$  を加えたものになる。よって  $x_{i,j} *' (y_1, y_2, y_3) \in O_{i,j}$  であり、これより任意の  $s \in \text{Inn}(X)$  に対し  $s(x_{i,j}) \in O_{i,j}$  が成り立つ。ゆえに  $O_{i,j} (i, j \in X)$  は  $X^{(3)}$  の連結成分である。

$O_{i,j}$  が  $X$  と同型であることを示すために  $x_{i,j}, y_{i,j} \in O_{i,j}$  に対し  $x_{i,j} *' y_{i,j}$  を計算する。

$$\begin{aligned} x_{i,j} *' y_{i,j} &= (x + i + (T - 1)(x - y), x + i + j + (T - 1)(x - y), x + j + (T - 1)(x - y)) \\ &= (Tx + (1 - T)y + i, Tx + (1 - T)y + i + j, Tx + (1 - T)y + j). \end{aligned}$$

最後の式は  $(x * y)_{i,j}$  に等しいので  $X$  と自然な同型  $h_{i,j} : X \rightarrow O_{i,j}$  が  $h_{i,j}(x) = x_{i,j}$  により定まる。ゆえに全ての連結成分は  $X$  と同型なカンドルである。  $\square$

Alexander カンドル以外の連結カンドルについては  $X^{(3)}$  の連結成分が  $X$  と同型なカンドルだけであるとは限らない。

例 4.4.  $(Q_6^a)^{(3)}$  を連結カンドルに分解すると位数 12 の連結カンドル  $Q_{12}^a, Q_{12}^b$  に対し

$$(Q_6^a)^{(3)} = 4Q_6^a \sqcup 8Q_{12}^a \sqcup 8Q_{12}^b$$

となる。詳細は付録 A を見よ。

## 4.2 カンドルの三重化により得られるシャドールカンドル 2-コサイクル

この節では任意のカンドル  $X$  とシャドールカンドル 2-コサイクル  $\psi$  に対し、三重化カンドル  $X^{(3)}$  上のシャドールカンドル 2-コサイクル  $\psi^{(3)}$  が誘導されることを示す。

以下では  $w \triangleleft x$  を単に  $w^x$  と表す。  $X$ -集合  $M$  には  $X^{(3)}$ -集合としての構造が  $w \triangleleft \mathbf{x} = w^{x_1 \bar{x}_2 x_3}$  で入る。

定義 4.5.  $X$  上のシャドールカンドル 2-コサイクル  $\psi : M \times X^2 \rightarrow A$  に対し写像  $\psi_{\text{twist}}^{(3)} : M \times X^{(3)} \rightarrow A$ ,  $\theta : M \times X^{(3)} \times X \rightarrow A$ ,  $\eta : M \times X \times X^{(3)} \rightarrow A$  および  $\psi_{\text{cross}}^{(3)} : M \times X^{(3)} \times X^{(3)} \rightarrow A$  を

$$\begin{aligned} \psi_{\text{twist}}^{(3)}(w, \mathbf{x}) &= \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_1}, x_1) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_1}, x_1) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_1}) \\ &\quad + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1}, x_1, x_2^{\bar{x}_1}) - \psi(w, x_1^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_2 \bar{x}_1}) \\ &\quad + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_2 \bar{x}_1}) \end{aligned}$$

$$\theta(w, \mathbf{x}, y) = \psi(w, x_1, y) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_2, y) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_3, y)$$

$$\eta(w, x, \mathbf{y}) = \psi(w, x, y_1) - \psi(w^{y_1 \bar{y}_2}, x^{y_1 \bar{y}_2}, y_2) + \psi(w^{y_1 \bar{y}_2}, x^{y_1 \bar{y}_2}, y_3)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{cross}}^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \theta(w, \mathbf{x}, y_1) - \theta(w^{y_1 \bar{y}_2}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2}, y_2) + \theta(w^{y_1 \bar{y}_2}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2}, y_3) \\ &= \eta(w, x_1, \mathbf{y}) - \eta(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_2, \mathbf{y}) + \eta(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_3, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

で定める。さらに  $\psi^{(3)} : M \times X^{(3)} \times X^{(3)} \rightarrow A$  を以下で定める。

$$\psi^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \psi_{\text{twist}}^{(3)}(w, \mathbf{x}) + \psi_{\text{cross}}^{(3)}(w, \mathbf{x}^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, \mathbf{y}).$$

ここで  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  に対し  $\mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2 \dots} = (x_1^{y_1 \bar{y}_2 \dots}, x_2^{y_1 \bar{y}_2 \dots}, x_3^{y_1 \bar{y}_2 \dots})$  などと表記する。

定義より  $\psi^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  の値は図 12 のタングルの  $M$ -シャドー  $X$ -彩色について、図の全ての交点におけるウェイトの和をとったものに等しい。

$$\psi^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = W_\psi \left( \begin{array}{c} \mathbf{x} \quad \mathbf{y} \\ \text{[Diagram: A tangle with a box labeled } w \text{ and strands labeled } \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x} * \mathbf{y} \text{]} \\ \mathbf{x} * \mathbf{y} \end{array} \right)$$

図 12:  $\psi^{(3)}$  と図式のウェイトの関係

以下では  $\psi^{(3)}$  がシャドーカンドル 2-コサイクルとなることを示す。まずは次の補題を証明する。

**補題 4.6.** 任意の  $w \in M, \mathbf{x} \in X^{(3)}, y \in X$  に対し次が成り立つ。

- (1)  $\psi_{twist}^{(3)}(w, \mathbf{x}) + \theta(w, \mathbf{x}^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, y) = \psi_{twist}^{(3)}(w^y, \mathbf{x}^y) + \theta(w, \mathbf{x}, y)$ .
- (2)  $\psi_{twist}^{(3)}(w, \mathbf{x}) - \theta(w^{\bar{y}}, \mathbf{x}^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 \bar{y}}, y) = \psi_{twist}^{(3)}(w^{\bar{y}}, \mathbf{x}^{\bar{y}}) - \theta(w^{\bar{y}}, \mathbf{x}^{\bar{y}}, y)$ .

**証明.** (1)  $\psi_{twist}^{(3)}, \theta$  の定義より

$$\begin{aligned} & \psi_{twist}^{(3)}(w, \mathbf{x}) + \theta(w, \mathbf{x}^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, y) \\ &= \psi_{twist}^{(3)}(w, x_1, x_2, x_3) + \psi(w, x_1^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, y) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, y) \\ & \quad + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, y) \\ &= \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_1}, x_1) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_1}, x_1) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_1}) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1}, x_1, x_2^{\bar{x}_1}) \\ & \quad - \psi(w, x_1^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_3^{x_2 \bar{x}_1}) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_3^{x_2 \bar{x}_1}) \\ & \quad + \psi(w, x_1^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, y) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, y) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_3^{x_2 \bar{x}_1}, y) \end{aligned}$$

と変形できる。  $\psi$  はシャドーカンドル 2-コサイクルより関係式 (C1)' を用いると

$$\begin{aligned} & \psi_{twist}^{(3)}(w, \mathbf{x}) + \theta(w, \mathbf{x}^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, y) \\ &= \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_1}, x_1) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_1}, x_1) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_1}) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1}, x_1, x_2^{\bar{x}_1}) \end{aligned}$$

となる。繰り返し (C1)' を用いて変形すると

$$\begin{aligned} & \psi_{twist}^{(3)}(w, \mathbf{x}) + \theta(w, \mathbf{x}^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, y) \\ & \quad - \psi(w, x_1^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_3^{x_2 \bar{x}_1}) + \psi(w, x_1^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, y) \\ & \quad + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_1 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_3^{x_2 \bar{x}_1}, y) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3}, x_2^{\bar{x}_1}, y) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y}, x_3^{x_2 \bar{x}_1 y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_1}, x_1) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_1}, x_1) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_1}) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1}, x_1, x_2^{\bar{x}_1}) \\
&\quad - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3}, x_2^{\bar{x}_1}, y) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y}, x_3^{x_2 \bar{x}_1 y}) \\
&\quad + \psi(w, x_3^{x_2 \bar{x}_1}, y) - \psi(w^y, x_1^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y}, x_3^{x_2 \bar{x}_1 y}) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_2 \bar{x}_1}, x_1^{x_2 \bar{x}_1}, y) \\
&= \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_1}, x_1) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_1}, x_1) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_1}) \\
&\quad + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y}, x_3^{x_2 \bar{x}_1 y}) + \psi(w, x_3^{x_2 \bar{x}_1}, y) - \psi(w^y, x_1^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y}, x_3^{x_2 \bar{x}_1 y}) \\
&\quad + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1 y}, x_1^y, x_2^{\bar{x}_1 y}) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_1}, y) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1}, x_1, y) \\
&= \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_1}, x_1) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_1}, x_1) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y}, x_3^{x_2 \bar{x}_1 y}) \\
&\quad - \psi(w^y, x_1^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y}, x_3^{x_2 \bar{x}_1 y}) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1 y}, x_1^y, x_2^{\bar{x}_1 y}) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1}, x_1, y) \\
&\quad + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1 y}, x_3^{\bar{x}_1 y}, x_2^{\bar{x}_1 y}) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_1}, y) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_1}, y) \\
&= \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_1}, x_1) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y}, x_3^{x_2 \bar{x}_1 y}) - \psi(w^y, x_1^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y}, x_3^{x_2 \bar{x}_1 y}) \\
&\quad + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1 y}, x_3^{\bar{x}_1 y}, x_2^{\bar{x}_1 y}) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_1}, y) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1 y}, x_1^y, x_2^{\bar{x}_1 y}) \\
&\quad + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_1, y) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1 y}, x_3^{\bar{x}_1 y}, x_1^y) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_3, y) \\
&= \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y}, x_3^{x_2 \bar{x}_1 y}) - \psi(w^y, x_1^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y}, x_3^{x_2 \bar{x}_1 y}) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_3, y) \\
&\quad + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1 y}, x_3^{\bar{x}_1 y}, x_2^{\bar{x}_1 y}) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1 y}, x_1^y, x_2^{\bar{x}_1 y}) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1 y}, x_3^{\bar{x}_1 y}, x_1^y) \\
&\quad + \psi(w, x_1, y) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_2, y) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1 y}, x_2^{\bar{x}_1 y}, x_1^y) \\
&= \psi_{twist}^{(3)}(w^y, x_1^y, x_2^y, x_3^y) + \psi(w, x_1, y) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_2, y) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_3, y)
\end{aligned}$$

となり (1) が成り立つ。

(2) は (1) において  $w, x_1, x_2, x_3$  をそれぞれ  $w^{\bar{y}}, x_1^{\bar{y}}, x_2^{\bar{y}}, x_3^{\bar{y}}$  に置き換えると同値な等式が得られる。  $\square$

**補題 4.7.** 任意の  $w \in M, x \in X, \mathbf{y} \in X^{(3)}$  に対し次が成り立つ。

- (1)  $\psi_{twist}^{(3)}(w, \mathbf{y}) + \eta(w, x, \mathbf{y}) = \psi_{twist}^{(3)}(w^x, \mathbf{y}) + \eta(w, x, \mathbf{y}^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1})$ .
- (2)  $\psi_{twist}^{(3)}(w, \mathbf{y}) - \eta(w^{\bar{x}}, x, \mathbf{y}) = \psi_{twist}^{(3)}(w^{\bar{x}}, \mathbf{y}) - \eta(w^{\bar{x}}, x, \mathbf{y}^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1})$ .

**証明.** (1)  $\psi_{twist}^{(3)}, \eta$  の定義より

$$\begin{aligned}
&\psi_{twist}^{(3)}(w, \mathbf{y}) + \eta(w, x, \mathbf{y}) \\
&= \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_1}, y_1) - \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_3^{\bar{y}_1}, y_1) + \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_3^{\bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_1}) + \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 \bar{y}_1}, y_1, y_2^{\bar{y}_1}) \\
&\quad - \psi(w, y_1^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_3^{y_2 \bar{y}_1}) + \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_3^{y_2 \bar{y}_1}) \\
&\quad + \psi(w, x, y_1) - \psi(w^{y_1 \bar{y}_2}, x^{y_1 \bar{y}_2}, y_2) + \psi(w^{y_1 \bar{y}_2}, x^{y_1 \bar{y}_2}, y_3)
\end{aligned}$$

と表される.  $\psi$  がシャドールカンドル 2-コサイクルであるので関係式 (C1)' を用いると

$$\begin{aligned} & \psi_{twist}^{(3)}(w, \mathbf{y}) + \eta(w, x, \mathbf{y}) \\ &= -\psi(w^{y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_3^{\bar{y}_1}, y_1) + \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_3^{\bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_1}) + \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 \bar{y}_1}, y_1, y_2^{\bar{y}_1}) \\ & \quad - \psi(w, y_1^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_3^{y_2 \bar{y}_1}) + \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_3^{y_2 \bar{y}_1}) + \psi(w^{y_1 \bar{y}_2}, x^{y_1 \bar{y}_2}, y_3) \\ & \quad - \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, x^{y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_1}) + \psi(w^{x y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_1}, y_1) + \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, x^{y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_1) \end{aligned}$$

と変形できる. 繰り返し (C1)' を用いて変形すると

$$\begin{aligned} & \psi_{twist}^{(3)}(w, \mathbf{y}) + \eta(w, x, \mathbf{y}) \\ &= \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_3^{\bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_1}) + \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 \bar{y}_1}, y_1, y_2^{\bar{y}_1}) - \psi(w, y_1^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_3^{y_2 \bar{y}_1}) \\ & \quad + \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_3^{y_2 \bar{y}_1}) - \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, x^{y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_1}) + \psi(w^{x y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_1}, y_1) \\ & \quad + \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, x^{y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_3^{\bar{y}_1}) - \psi(w^{x y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_3^{\bar{y}_1}, y_1) + \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 \bar{y}_1}, x^{y_1 \bar{y}_2 y_3 \bar{y}_1}, y_1) \\ &= \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 \bar{y}_1}, y_1, y_2^{\bar{y}_1}) - \psi(w, y_1^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_3^{y_2 \bar{y}_1}) + \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_3^{y_2 \bar{y}_1}) \\ & \quad + \psi(w^{x y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_1}, y_1) - \psi(w^{x y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_3^{\bar{y}_1}, y_1) + \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 \bar{y}_1}, x^{y_1 \bar{y}_2 y_3 \bar{y}_1}, y_1) \\ & \quad + \psi(w, x, y_3^{y_2 \bar{y}_1}) + \psi(w^{x y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_3^{\bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_1}) - \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 \bar{y}_1}, x^{y_1 \bar{y}_2 y_3 \bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_1}) \\ &= -\psi(w, y_1^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_3^{y_2 \bar{y}_1}) + \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_3^{y_2 \bar{y}_1}) + \psi(w^{x y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_1}, y_1) \\ & \quad - \psi(w^{x y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_3^{\bar{y}_1}, y_1) + \psi(w, x, y_3^{y_2 \bar{y}_1}) + \psi(w^{x y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_3^{\bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_1}) \\ & \quad + \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 y_2 \bar{y}_1}, x^{y_1 \bar{y}_2 y_3 y_2 \bar{y}_1}, y_1^{y_2 \bar{y}_1}) + \psi(w^{x y_1 \bar{y}_2 y_3 \bar{y}_1}, y_1, y_2^{\bar{y}_1}) - \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3}, x^{y_1 \bar{y}_2 y_3}, y_2^{\bar{y}_1}) \\ &= \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_3^{y_2 \bar{y}_1}) + \psi(w^{x y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_1}, y_1) - \psi(w^{x y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_3^{\bar{y}_1}, y_1) \\ & \quad + \psi(w^{x y_1 \bar{y}_2 y_3 \bar{y}_1}, y_1, y_2^{\bar{y}_1}) - \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3}, x^{y_1 \bar{y}_2 y_3}, y_2^{\bar{y}_1}) + \psi(w^{x y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_3^{\bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_1}) \\ & \quad + \psi(w, x, y_1^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}) - \psi(w^x, y_1^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_3^{y_2 \bar{y}_1}) + \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, x^{y_1 \bar{y}_2 y_3 y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_3^{y_2 \bar{y}_1}) \\ &= \psi(w^{x y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_1}, y_1) - \psi(w^{x y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_3^{\bar{y}_1}, y_1) + \psi(w^{x y_1 \bar{y}_2 y_3 \bar{y}_1}, y_1, y_2^{\bar{y}_1}) \\ & \quad + \psi(w^{x y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_1}, y_3^{\bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_1}) + \psi(w, x, y_1^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}) - \psi(w^x, y_1^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_3^{y_2 \bar{y}_1}) \\ & \quad - \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, x^{y_1 \bar{y}_2 y_3 y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}) + \psi(w^{x y_1 \bar{y}_2 y_3 y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_2^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_3^{y_2 \bar{y}_1}) \\ & \quad + \psi(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, x^{y_1 \bar{y}_2 y_3 y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}, y_3^{y_2 \bar{y}_1}) \\ &= \psi_{twist}^{(3)}(w^x, \mathbf{y}) + \eta(w, x, \mathbf{y}^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}) \end{aligned}$$

となる. よって (1) の等式が成り立つ. (2) は (1) において  $w$  を  $w^x$  に置き換えることで得られる.  $\square$

**補題 4.8.** 任意の  $w \in M, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X^{(3)}$  に対し次が成り立つ.

- (1)  $\psi^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \psi_{twist}^{(3)}(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2 y_3}) + \psi_{cross}^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ .
- (2)  $\psi_{twist}^{(3)}(w, \mathbf{y}) + \psi_{cross}^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \psi_{twist}^{(3)}(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3}, \mathbf{y}) + \psi_{cross}^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y}^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1})$ .

証明. 補題 4.6 より (1) の左辺は

$$\begin{aligned}
\psi^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \psi_{twist}^{(3)}(w, \mathbf{x}) + \psi_{cross}^{(3)}(w, \mathbf{x}^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, \mathbf{y}) \\
&= \psi_{twist}^{(3)}(w, \mathbf{x}) + \theta(w, \mathbf{x}^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, y_1) - \theta(w^{y_1 \bar{y}_2}, \mathbf{x}^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y_1 \bar{y}_2}, y_2) + \theta(w^{y_1 \bar{y}_2}, \mathbf{x}^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y_1 \bar{y}_2}, y_3) \\
&= \theta(w, \mathbf{x}, y_1) + \psi_{twist}^{(3)}(w^{y_1}, \mathbf{x}^{y_1}) - \theta(w^{y_1 \bar{y}_2}, \mathbf{x}^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y_1 \bar{y}_2}, y_2) + \theta(w^{y_1 \bar{y}_2}, \mathbf{x}^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y_1 \bar{y}_2}, y_3) \\
&= \theta(w, \mathbf{x}, y_1) - \theta(w^{y_1 \bar{y}_2}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2}, y_2) + \psi_{twist}^{(3)}(w^{y_1 \bar{y}_2}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2}) + \theta(w^{y_1 \bar{y}_2}, \mathbf{x}^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y_1 \bar{y}_2}, y_3) \\
&= \theta(w, \mathbf{x}, y_1) - \theta(w^{y_1 \bar{y}_2}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2}, y_2) + \theta(w^{y_1 \bar{y}_2}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2}, y_3) + \psi_{twist}^{(3)}(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2 y_3}) \\
&= \psi_{twist}^{(3)}(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2 y_3}) + \psi_{cross}^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y})
\end{aligned}$$

と変形できる. よって (1) が成り立つ. また補題 4.7 より (2) の左辺は

$$\begin{aligned}
&\psi_{twist}^{(3)}(w, \mathbf{y}) + \psi_{cross}^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
&= \psi_{twist}^{(3)}(w, \mathbf{y}) + \eta(w, x_1, \mathbf{y}) - \eta(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_2, \mathbf{y}) + \eta(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_3, \mathbf{y}) \\
&= \eta(w, x_1, \mathbf{y}^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}) + \psi_{twist}^{(3)}(w^{x_1}, \mathbf{y}) - \eta(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_2, \mathbf{y}) + \eta(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_3, \mathbf{y}) \\
&= \eta(w, x_1, \mathbf{y}^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}) - \eta(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_2, \mathbf{y}^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}) + \psi_{twist}^{(3)}(w^{x_1 \bar{x}_2}, \mathbf{y}) + \eta(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_3, \mathbf{y}) \\
&= \eta(w, x_1, \mathbf{y}^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}) - \eta(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_2, \mathbf{y}^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}) + \eta(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_3, \mathbf{y}^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1}) + \psi_{twist}^{(3)}(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3}, \mathbf{y}) \\
&= \psi_{twist}^{(3)}(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3}, \mathbf{y}) + \psi_{cross}^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y}^{\bar{y}_3 y_2 \bar{y}_1})
\end{aligned}$$

と変形できる. ゆえに (2) も成り立つ. □

補題 4.9. 任意の  $w \in M, \mathbf{x} \in X^{(3)}, y, z \in X$  に対し次が成り立つ.

- (1)  $\theta(w, \mathbf{x}, y) + \theta(w^y, \mathbf{x}^y, z) + \psi(w, y, z) = \theta(w, \mathbf{x}, z) + \theta(w^z, \mathbf{x}^z, y^z) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3}, y, z).$
- (2)  $\theta(w^{\bar{y}}, \mathbf{x}^{\bar{y}}, z) - \theta(w^{\bar{y}}, \mathbf{x}^{\bar{y}}, y) - \psi(w^{\bar{y}}, y, z) = \theta(w, \mathbf{x}, z) - \theta(w^{\bar{y}z}, \mathbf{x}^{\bar{y}z}, y^z) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{y}}, y, z).$

証明. (2) は (1) において  $w, \mathbf{x}$  をそれぞれ  $w^{\bar{y}}, \mathbf{x}^{\bar{y}}$  に置き換えると得られる. よって (1) だけを示す.

$\psi$  はシャドール 2-コサイクルより

$$\begin{aligned}
&\theta(w, \mathbf{x}, y) + \theta(w^y, \mathbf{x}^y, z) + \psi(w, y, z) \\
&= \psi(w, x_1, y) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_2, y) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_3, y) + \psi(w^y, x_1^y, z) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 y}, x_2^y, z) \\
&\quad + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 y}, x_3^y, z) + \psi(w, y, z) \\
&= \psi(w, x_1, z) + \psi(w^{x_1}, y, z) + \psi(w^z, x_1^z, y^z) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_2, y) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_3, y) \\
&\quad - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 y}, x_2^y, z) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 y}, x_3^y, z) \\
&= \psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, y, z) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 z}, x_2^z, y^z) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_2, z) + \psi(w, x_1, z) + \psi(w^z, x_1^z, y^z) \\
&\quad + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_3, y) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 y}, x_3^y, z) \\
&= \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 z}, x_3^z, y^z) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3}, y, z) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_3, z) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 z}, x_2^z, y^z) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_2, z) \\
&\quad + \psi(w, x_1, z) + \psi(w^z, x_1^z, y^z)
\end{aligned}$$



$$= \theta(w, \mathbf{x}, z) + \theta(w^z, \mathbf{x}^z, y^z) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3}, y, z)$$

と変形できる. よって (1) が成り立つ. □

**補題 4.10.** 任意の  $w \in M, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X^{(3)}$  に対し次が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \psi_{cross}^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \psi_{cross}^{(3)}(w, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + \psi_{cross}^{(3)}(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2 y_3}, \mathbf{z}) \\ &= \psi_{cross}^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{z}) + \psi_{cross}^{(3)}(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + \psi_{cross}^{(3)}(w^{z_1 \bar{z}_2 z_3}, \mathbf{x}^{z_1 \bar{z}_2 z_3}, \mathbf{y}^{z_1 \bar{z}_2 z_3}). \end{aligned}$$

**証明.** まずは次を示す.

$$\psi_{cross}^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \theta(w, \mathbf{y}, z) + \theta(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2 y_3}, z) = \psi_{cross}^{(3)}(w^z, \mathbf{x}^z, \mathbf{y}^z) + \theta(w, \mathbf{x}, z) + \theta(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3}, \mathbf{y}, z).$$

補題 4.9 より

$$\begin{aligned} & \psi_{cross}^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \theta(w, \mathbf{y}, z) + \theta(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2 y_3}, z) \\ &= \theta(w, \mathbf{x}, y_1) - \theta(w^{y_1 \bar{y}_2}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2}, y_2) + \theta(w^{y_1 \bar{y}_2}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2}, y_3) \\ &+ \psi(w, y_1, z) - \psi(w^{y_1 \bar{y}_2}, y_2, z) + \psi(w^{y_1 \bar{y}_2}, y_3, z) + \theta(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2 y_3}, z) \\ &= \theta(w^{y_1 \bar{y}_2}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2}, z) + \theta(w^{y_1 \bar{y}_2 z}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2 z}, y_3^z) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 y_1 \bar{y}_2}, y_3, z) \\ &+ \theta(w, \mathbf{x}, y_1) + \psi(w, y_1, z) - \psi(w^{y_1 \bar{y}_2}, y_2, z) - \theta(w^{y_1 \bar{y}_2}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2}, y_2) \\ &= \theta(w^{y_1}, \mathbf{x}^{y_1}, z) - \theta(w^{y_1 \bar{y}_2 z}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2 z}, y_2^z) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 y_1 \bar{y}_2}, y_2, z) \\ &+ \theta(w^{y_1 \bar{y}_2 z}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2 z}, y_3^z) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 y_1 \bar{y}_2}, y_3, z) + \theta(w, \mathbf{x}, y_1) + \psi(w, y_1, z) \\ &= \theta(w, \mathbf{x}, z) + \theta(w^z, \mathbf{x}^z, y_1^z) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3}, y_1, z) \\ &- \theta(w^{y_1 \bar{y}_2 z}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2 z}, y_2^z) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 y_1 \bar{y}_2}, y_2, z) + \theta(w^{y_1 \bar{y}_2 z}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2 z}, y_3^z) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 y_1 \bar{y}_2}, y_3, z) \\ &= \psi_{cross}^{(3)}(w^z, \mathbf{x}^z, \mathbf{y}^z) + \theta(w, \mathbf{x}, z) + \theta(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3}, \mathbf{y}, z) \end{aligned}$$

である. よって等式が成り立つ.

また上式において  $w, \mathbf{x}, \mathbf{y}$  をそれぞれ  $w^z, \mathbf{x}^z, \mathbf{y}^z$  に置き換えた式

$$\begin{aligned} & \psi_{cross}^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \theta(w^z, \mathbf{y}^z, z) - \theta(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 z}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2 y_3 z}, z) \\ &= \psi_{cross}^{(3)}(w^z, \mathbf{x}^z, \mathbf{y}^z) - \theta(w^z, \mathbf{x}^z, z) - \theta(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 z}, \mathbf{y}^z, z) \end{aligned}$$

に注意して示すべき等式の左辺を変形する.

$$\begin{aligned} & \psi_{cross}^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \psi_{cross}^{(3)}(w, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + \psi_{cross}^{(3)}(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2 y_3}, \mathbf{z}) \\ &= \psi_{cross}^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \theta(w, \mathbf{y}, z_1) - \theta(w^{z_1 \bar{z}_2}, \mathbf{y}^{z_1 \bar{z}_2}, z_2) + \theta(w^{z_1 \bar{z}_2}, \mathbf{y}^{z_1 \bar{z}_2}, z_3) \\ &+ \theta(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2 y_3}, z_1) - \theta(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 z_1 \bar{z}_2}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2 y_3 z_1 \bar{z}_2}, z_2) + \theta(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 z_1 \bar{z}_2}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2 y_3 z_1 \bar{z}_2}, z_3) \\ &= \psi_{cross}^{(3)}(w^{z_1}, \mathbf{x}^{z_1}, \mathbf{y}^{z_1}) + \theta(w, \mathbf{x}, z_1) + \theta(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3}, \mathbf{y}, z_1) - \theta(w^{z_1 \bar{z}_2}, \mathbf{y}^{z_1 \bar{z}_2}, z_2) \\ &+ \theta(w^{z_1 \bar{z}_2}, \mathbf{y}^{z_1 \bar{z}_2}, z_3) - \theta(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 z_1 \bar{z}_2}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2 y_3 z_1 \bar{z}_2}, z_2) + \theta(w^{y_1 \bar{y}_2 y_3 z_1 \bar{z}_2}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2 y_3 z_1 \bar{z}_2}, z_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \psi_{\text{cross}}^{(3)}(w^{z_1\bar{z}_2}, \mathbf{x}^{z_1\bar{z}_2}, \mathbf{y}^{z_1\bar{z}_2}) - \theta(w^{z_1\bar{z}_2}, \mathbf{x}^{z_1\bar{z}_2}, z_2) - \theta(w^{x_1\bar{x}_2x_3z_1\bar{z}_2}, \mathbf{y}^{z_1\bar{z}_2}, z_2) \\
&\quad + \theta(w, \mathbf{x}, z_1) + \theta(w^{x_1\bar{x}_2x_3}, \mathbf{y}, z_1) + \theta(w^{z_1\bar{z}_2}, \mathbf{y}^{z_1\bar{z}_2}, z_3) + \theta(w^{y_1\bar{y}_2y_3z_1\bar{z}_2}, \mathbf{x}^{y_1\bar{y}_2y_3z_1\bar{z}_2}, z_3) \\
&= \psi_{\text{cross}}^{(3)}(w^{z_1\bar{z}_2z_3}, \mathbf{x}^{z_1\bar{z}_2z_3}, \mathbf{y}^{z_1\bar{z}_2z_3}) + \theta(w^{z_1\bar{z}_2}, \mathbf{x}^{z_1\bar{z}_2}, z_3) + \theta(w^{x_1\bar{x}_2x_3z_1\bar{z}_2}, \mathbf{y}^{z_1\bar{z}_2}, z_3) \\
&\quad - \theta(w^{z_1\bar{z}_2}, \mathbf{x}^{z_1\bar{z}_2}, z_2) - \theta(w^{x_1\bar{x}_2x_3z_1\bar{z}_2}, \mathbf{y}^{z_1\bar{z}_2}, z_2) + \theta(w, \mathbf{x}, z_1) + \theta(w^{x_1\bar{x}_2x_3}, \mathbf{y}, z_1) \\
&= \psi_{\text{cross}}^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{z}) + \psi_{\text{cross}}^{(3)}(w^{x_1\bar{x}_2x_3}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + \psi_{\text{cross}}^{(3)}(w^{z_1\bar{z}_2z_3}, \mathbf{x}^{z_1\bar{z}_2z_3}, \mathbf{y}^{z_1\bar{z}_2z_3}).
\end{aligned}$$

よって題意は示された。  $\square$

上記の補題を用いて次の命題を証明する。

**命題 4.11.** 任意のカンドル  $X$  とそのシャドーカンドル 2-コサイクル  $\psi : M \times X^2 \rightarrow A$  に対し、 $\psi^{(3)}$  はシャドーカンドル 2-コサイクル。

**証明.** まず  $(C1)'$  を示す。補題 4.8 および補題 4.10 より

$$\begin{aligned}
&\psi^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \psi^{(3)}(w, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + \psi^{(3)}(w^{y_1\bar{y}_2y_3}, \mathbf{x} * \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\
&= \psi_{\text{twist}}^{(3)}(w, \mathbf{x}) + \psi_{\text{cross}}^{(3)}(w, \mathbf{x}^{\bar{x}_3x_2\bar{x}_1}, \mathbf{y}) + \psi_{\text{twist}}^{(3)}(w, \mathbf{y}) + \psi_{\text{cross}}^{(3)}(w, \mathbf{y}^{\bar{y}_3y_2\bar{y}_1}, \mathbf{z}) \\
&\quad + \psi_{\text{twist}}^{(3)}(w^{y_1\bar{y}_2y_3z_1\bar{z}_2z_3}, (\mathbf{x} * \mathbf{y})^{z_1\bar{z}_2z_3}) + \psi_{\text{cross}}^{(3)}(w^{y_1\bar{y}_2y_3}, \mathbf{x} * \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\
&= \psi_{\text{twist}}^{(3)}(w, \mathbf{x}) + \psi_{\text{twist}}^{(3)}(w^{x_1\bar{x}_2x_3}, \mathbf{y}) + \psi_{\text{cross}}^{(3)}(w, \mathbf{x}^{\bar{x}_3x_2\bar{x}_1}, \mathbf{y}^{\bar{y}_3y_2\bar{y}_1}) + \psi_{\text{cross}}^{(3)}(w, \mathbf{y}^{\bar{y}_3y_2\bar{y}_1}, \mathbf{z}) \\
&\quad + \psi_{\text{twist}}^{(3)}(w^{y_1\bar{y}_2y_3z_1\bar{z}_2z_3}, (\mathbf{x} * \mathbf{y})^{z_1\bar{z}_2z_3}) + \psi_{\text{cross}}^{(3)}(w^{y_1\bar{y}_2y_3}, \mathbf{x} * \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\
&= \psi_{\text{twist}}^{(3)}(w, \mathbf{x}) + \psi_{\text{twist}}^{(3)}(w^{x_1\bar{x}_2x_3}, \mathbf{y}) + \psi_{\text{twist}}^{(3)}(w^{y_1\bar{y}_2y_3z_1\bar{z}_2z_3}, (\mathbf{x} * \mathbf{y})^{z_1\bar{z}_2z_3}) \\
&\quad + \psi_{\text{cross}}^{(3)}(w, \mathbf{x}^{\bar{x}_3x_2\bar{x}_1}, \mathbf{z}) + \psi_{\text{cross}}^{(3)}(w^{x_1\bar{x}_2x_3}, \mathbf{y}^{\bar{y}_3y_2\bar{y}_1}, \mathbf{z}) + \psi_{\text{cross}}^{(3)}(w^{z_1\bar{z}_2z_3}, \mathbf{x} * \mathbf{z}, \mathbf{y} * \mathbf{z}) \\
&= \psi^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{z}) + \psi^{(3)}(w^{x_1\bar{x}_2x_3}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + \psi^{(3)}(w^{z_1\bar{z}_2z_3}, \mathbf{x} * \mathbf{z}, \mathbf{y} * \mathbf{z}).
\end{aligned}$$

よって条件  $(C1)'$  が成立する。次に  $(C2)'$  を示す。

$$\begin{aligned}
&\psi_{\text{cross}}^{(3)}(w, \mathbf{x}^{\bar{x}_3x_2\bar{x}_1}, \mathbf{x}) \\
&= \theta(w, \mathbf{x}^{\bar{x}_3x_2\bar{x}_1}, x_1) - \theta(w^{x_1\bar{x}_2}, \mathbf{x}^{\bar{x}_3}, x_2) + \theta(w^{x_1\bar{x}_2}, \mathbf{x}^{\bar{x}_3}, x_3) \\
&= \psi(w, x_1^{\bar{x}_3x_2\bar{x}_1}, x_1) - \psi(w^{x_1\bar{x}_2x_3x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_2\bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_3x_2\bar{x}_1}, x_1) + \psi(w^{x_1\bar{x}_2x_3x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_2\bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_3x_2\bar{x}_1}, x_1) \\
&\quad - \psi(w^{x_1\bar{x}_2}, x_1^{\bar{x}_3}, x_2) + \psi(w^{x_1\bar{x}_2x_3x_1\bar{x}_2\bar{x}_3}, x_2^{\bar{x}_3}, x_2) - \psi(w^{x_1\bar{x}_2x_3x_1\bar{x}_2\bar{x}_3}, x_3, x_2) \\
&\quad + \psi(w^{x_1\bar{x}_2}, x_1^{\bar{x}_3}, x_3) - \psi(w^{x_1\bar{x}_2x_3x_1\bar{x}_2\bar{x}_3}, x_2^{\bar{x}_3}, x_3) \\
&= \psi(w, x_1^{\bar{x}_3x_2\bar{x}_1}, x_1) - \psi(w^{x_1\bar{x}_2x_3x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_2\bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_3x_2\bar{x}_1}, x_1) + \psi(w^{x_1\bar{x}_2x_3x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_2\bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_3x_2\bar{x}_1}, x_1) \\
&\quad - \psi(w^{x_1\bar{x}_2}, x_1^{\bar{x}_3}, x_2) + \psi(w^{x_1\bar{x}_2}, x_1^{\bar{x}_3}, x_3) \\
&\quad - \psi(w^{x_1\bar{x}_2x_3x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_2}, x_2^{\bar{x}_3x_2}, x_3^{\bar{x}_3x_2}) - \psi(w^{x_1\bar{x}_2x_3x_1\bar{x}_2\bar{x}_3}, x_3, x_2) + \psi(w^{x_1\bar{x}_2x_3x_1\bar{x}_2}, x_2, x_2) \\
&= \psi(w, x_1^{\bar{x}_3x_2\bar{x}_1}, x_1) - \psi(w^{x_1\bar{x}_2x_3x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_2\bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_3x_2\bar{x}_1}, x_1) + \psi(w^{x_1\bar{x}_2x_3x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_2\bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_3x_2\bar{x}_1}, x_1) \\
&\quad - \psi(w^{x_1\bar{x}_2x_3x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_2}, x_2^{\bar{x}_3x_2}, x_3^{\bar{x}_3x_2}) + \psi(w^{x_1}, x_1^{\bar{x}_3x_2}, x_3^{\bar{x}_3x_2}) - \psi(w^{x_1\bar{x}_2}, x_3, x_2) - \psi(w^{x_1\bar{x}_2x_3}, x_1, x_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \psi(w, x_1^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_1) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_1) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_3^{x_2 \bar{x}_1}, x_1) \\
&\quad - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_3, x_2) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2}, x_1^{\bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2}, x_2^{\bar{x}_3 x_2}) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2}, x_2^{\bar{x}_3 x_2}, x_3^{x_2}) \\
&\quad + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2}, x_1^{\bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2}, x_3^{x_2}) \\
&= \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_3^{x_2 \bar{x}_1}, x_1) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2}, x_1^{\bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2}, x_3^{x_2}) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_3, x_2) \\
&\quad - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2}, x_2^{\bar{x}_3 x_2}, x_3^{x_2}) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_1^{\bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}) \\
&\quad - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_1) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_1^{\bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_1) \\
&= -\psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_3, x_2) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2}, x_2^{\bar{x}_3 x_2}, x_3^{x_2}) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_1^{\bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}) \\
&\quad - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_1) \\
&\quad + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_1^{\bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_3^{x_2 \bar{x}_1}) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_3^{x_2 \bar{x}_1}, x_1) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1}, x_1, x_1) \\
&= -\psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_3, x_2) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_1^{\bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_1^{\bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_3^{x_2 \bar{x}_1}) \\
&\quad - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_3^{x_2 \bar{x}_1}) + \psi(w, x_3^{x_2 \bar{x}_1}, x_1) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_1}, x_1) \\
&= -\psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_3, x_2) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_1}, x_1) + \psi(w, x_3^{x_2 \bar{x}_1}, x_1) \\
&\quad - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1}, x_1, x_2^{\bar{x}_1}) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_3^{x_2 \bar{x}_1}) + \psi(w, x_1^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_3^{x_2 \bar{x}_1}) \\
&= -\psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_1}) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_1}, x_1) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_1}, x_1) \\
&\quad - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1}, x_1, x_2^{\bar{x}_1}) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_3^{x_2 \bar{x}_1}) + \psi(w, x_1^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_3^{x_2 \bar{x}_1}) \\
&= -\psi_{twist}^{(3)}(w, \mathbf{x}).
\end{aligned}$$

よって  $\psi^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \psi_{twist}^{(3)}(w, \mathbf{x}) + \psi_{cross}^{(3)}(w, \mathbf{x}^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, \mathbf{x}) = 0$ , つまり (C2)' が成立する。  
従って  $\psi^{(3)}$  はシャドーカンドル 2-コサイクルである。  $\square$

### 4.3 二面体カンドルの場合

この節では奇素数位数の二面体カンドル  $R_p$  の望月 3-コサイクル  $\psi$  に対し,  $\psi^{(3)}$  を  $R_p^{(3)}$  の各連結成分に制限して得られるシャドーカンドル 2-コサイクルが全て  $\psi$  とコホモロガスであることを示す。

$X = R_p$  ( $p$  は奇素数) とし,  $\psi : R_p^3 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  は望月 3-コサイクル

$$\psi(w, x, y) = (w - x) \frac{x^p + (2y - x)^p - 2y^p}{p}$$

とする.  $f : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$  を  $f(w, x, y) = (w - x)(x^p + (2y - x)^p - 2y^p)$  と定めたとき,  $w, x, y \in R_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  の  $\mathbb{Z}$  へのリフト  $\bar{w}, \bar{x}, \bar{y}$  に対し  $f(\bar{w}, \bar{x}, \bar{y})/p \pmod{p}$  は well-defined.

$R_p^{(3)}$  の連結成分  $(R_p)_{i,j}$  上の点に対する  $\psi^{(3)}$  の値を計算する.

$$\begin{aligned}
\psi^{(3)}(w, x_{i,j}, y_{i,j}) &= \psi(-w + 2(x + i - j), x + i - j, x + i) \\
&\quad - \psi(-w + 2(x + i - j), x + 2i - j, x + i) \\
&\quad + \psi(-w + 2(x + i - j), x + 2i - j, x + i - j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \psi(w, x - i, y + i) - \psi(w, x - i, x - j) + \psi(w + 2i, x + i, x + i - j) \\
& + \psi(w - 2j, x - (i + j), x - j) + \psi(w - 2j, x - j, y + i) \\
& - \psi(w - 2j, x - (i + j), y + i) \\
& + \psi(w, x - i + j, y + i + j) - \psi(w, x - i + j, y + j) \\
& + \psi(w, x + j, y + j) - \psi(w, x + j, y + i + j) \\
& - \psi(w + 2j, x - i + 2j, y + i + j) \\
& + \psi(w + 2j, x - i + 2j, y + j).
\end{aligned}$$

$\hat{\psi}_{i,j} = \psi^{(3)} \circ (\text{id} \times h_{i,j} \times h_{i,j})$  とおく.  $\psi$  が 3-コサイクルであることを用いて変形すると次の式が得られる.

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_{i,j}(w, x, y) = & \psi(w + 2i, x + i, x + i - j) + \psi(w, x - i, y + i) - \psi(w, x - i, x - j) \\
& - \psi(w + 2j, x - i + 2j, y + i + j) + \psi(w + 2j, x - i + 2j, y + j) \\
& + \psi(w, x - i + j, y + i + j) - \psi(w, x - i + j, y + j) \\
& + \psi(w - 2j, x - i - j, x - j) - \psi(w - 2j, x - i - j, y + i) \\
& + \psi(w, x + j, y + j) - \psi(w, x + j, y + i + j) + \psi(w - 2j, x - j, y + i) \\
& + \psi(w + 2j, x + j, x + i + j) - \psi(w, x - j, x + i) + \psi(w + 2i, x + i - j, x + i).
\end{aligned}$$

これらの和は,  $\psi$  を  $f$  に置き換えたものの  $\mathbb{Z}$  における和を  $p$  で割ったものと値が等しい. 幾つかのまとまりに分けて和を計算する.

$$\begin{aligned}
& f(w + 2i, x + i, x + i - j) + f(w, x - i, y + i) - f(w, x - i, x - j) \\
& - f(w + 2j, x - i + 2j, y + i + j) + f(w + 2j, x - i + 2j, y + j) \\
& = (w - x + i)((x + i)^p + (2y - x + i)^p - 2(x + i - j)^p - 2(y + i)^p + 2(x - j)^p \\
& + 2(y + i + j)^p - 2(y + j)^p).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f(w, x - i + j, y + i + j) - f(w, x - i + j, y + j) \\
& + f(w - 2j, x - i - j, x - j) - f(w - 2j, x - i - j, y + i) \\
& = (w - x + i - j)((x + i - j)^p - (2y - x + i + j)^p + 2(y + i)^p - 2(x - j)^p \\
& - 2(y + i + j)^p + 2(y + j)^p).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f(w, x + j, y + j) - f(w, x + j, y + i + j) + f(w - 2j, x - j, y + i) \\
& = (w - x - j)((x - j)^p + (2y - x + j)^p - 2(y + i)^p + 2(y + i + j)^p - 2(y + j)^p).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f(w + 2j, x + j, x + i + j) - f(w, x - j, x + i) \\
& = (w - x + j)(2(x + i)^p - (x - j)^p + (x + j)^p - 2(x + i + j)^p).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f(w + 2i, x + i - j, x + i) \\
& = (w - x + i + j)((x + i - j)^p + (x + i + j)^p - 2(x + i)^p).
\end{aligned}$$

これらを全て足し合わせたものを  $\hat{f}_{i,j}(w, x, y)$  とおく.

$$\begin{aligned}\hat{f}_{i,j}(w, x, y) &= (w - x - i)(x + i)^p + (w - x + j)(x + j)^p - (w - x - i + j)(x + i + j)^p \\ &\quad - 2(w - x)(y + i)^p - 2(w - x)(y + j)^p + 2(w - x)(y + i + j)^p \\ &\quad + (w - x + i)(2y - x + i)^p + (w - x - j)(2y - x + j)^p \\ &\quad - (w - x + i - j)(2y - x + i + j)^p.\end{aligned}$$

$\hat{\psi}_{i,j}(w, x, y) = \hat{f}_{i,j}(w, x, y)/p \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  である.

命題 4.11 より  $\hat{\psi}_{i,j}$  はシャドーカンドル 2-コサイクルであるが,  $i \neq 0, j \neq 0, i \neq j$  のときカンドル 3-コサイクルではない. しかし以下に示すように適当なラック 3-コバンドリを加えることでカンドル 3-コサイクルになる.

**補題 4.12.** 任意の  $i, j \in R_p$  に対し  $\hat{\psi}_{i,j} + \xi_{i,j}$  がカンドル 3-コサイクルとなるようなラック 3-コバンドリ  $\xi_{i,j}$  が存在する.

**証明.** 以下の手順で  $\xi_{i,j}$  を構成する. まず

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_{i,j}(x, x, y) &= i \frac{(x + i + j)^p - (x + i)^p - j^p}{p} - i \frac{(2y - x + i + j)^p - (2y - x + i)^p - j^p}{p} \\ &\quad - j \frac{(x + i + j)^p - (x + j)^p - i^p}{p} + j \frac{(2y - x + i + j)^p - (2y - x + j)^p - i^p}{p}\end{aligned}$$

であることに注意する. ここで任意の関数  $f : R_p^2 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  に対し  $df(x, x, y) = f(2y - x, 2y - x) - f(x, x)$  であることから,

$$f(x, x) = \frac{(x + i + j)^p - (x + i)^p - j^p}{p}, \quad g(x, x) = \frac{(x + i + j)^p - (x + j)^p - i^p}{p}$$

であるような  $f, g$  に対し  $\xi_{i,j} = idf - jdg$  とすればよいと予想される. 実際,

$$f(x, y) = \frac{(x + i + j)^p - (x + i)^p - j^p}{p}, \quad g(x, y) = \frac{(x + i + j)^p - (x + j)^p - i^p}{p}$$

と定めるとこれらは  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  値関数として well-defined であり, シャドーカンドル 2-コサイクルであるので  $\hat{\psi}_{i,j}$  との線形和  $\hat{\psi}_{i,j} + \xi_{i,j}$  もシャドーカンドル 2-コサイクル. さらに上の計算により  $\hat{\psi}_{i,j}(x, x, y) + \xi_{i,j}(x, x, y) = 0$  も従うので, よって題意は示された.  $\square$

次に  $[\psi] = [\hat{\psi}_{i,j} + \xi_{i,j}] \in H_Q^3(R_p, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  であることを示す. そのためには  $(2, p)$ -トーラス結び目に対するシャドーコサイクル不変量を  $\psi, \hat{\psi}_{i,j}$  それぞれについて計算し, 両者の値が等しいことを示せばよい.

まずは  $\hat{\psi}_{i,j}$  に対する値を計算する. そのために次の補題を証明する.

**補題 4.13.** 任意の  $i, j, w, x, a \in R_p$  に対し

$$\sum_{k \in R_p} \hat{\psi}_{i,j}(w, x + (k - 1)a, x + ka) = -a^2$$

が成り立つ.

証明.  $a = 0$  のときは  $\hat{\psi}_{i,j}$  がシャドーカンドル 2-コサイクルであることから従う.

$a \neq 0$  のとき,  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$  において  $\sum_{k=1}^p \hat{f}_{i,j}(w, x + (k-1)a, x + ka)$  を計算する.  $\hat{f}_{i,j}$  の定義より

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^p \hat{f}_{i,j}(w, x + (k-1)a, x + ka) \\
&= \sum_{k=1}^p ((w-x-i-(k-1)a)(x+i+(k-1)a)^p + (w-x+j-(k-1)a)(x+j+(k-1)a)^p \\
&\quad - (w-x-i+j-(k-1)a)(x+i+j+(k-1)a)^p \\
&\quad - 2(w-x-(k-1)a)(x+i+ka)^p - 2(w-x-(k-1)a)(x+j+ka)^p \\
&\quad + 2(w-x-(k-1)a)(x+i+j+ka)^p \\
&\quad + (w-x+i-(k-1)a)(x+i+(k+1)a)^p + (w-x-j-(k-1)a)(x+j+(k+1)a)^p \\
&\quad - (w-x+i-j-(k-1)a)(x+i+j+(k+1)a)^p)
\end{aligned}$$

となる. 一般に数列  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  に対し  $\sum_{k=1}^p a_k = \sum_{k=0}^{p-1} a_{k+1} = \sum_{k=2}^{p+1} a_{k-1}$  より

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^p \hat{f}_{i,j}(w, x + (k-1)a, x + ka) \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} ((w-x-i-ka)(x+i+ka)^p + (w-x+j-ka)(x+j+ka)^p \\
&\quad - (w-x-i+j-ka)(x+i+j+ka)^p) \\
&\quad + \sum_{k=1}^p 2((w-x-(k-1)a)(x+i+j+ka)^p - 2(w-x-(k-1)a)(x+i+ka)^p \\
&\quad - 2(w-x-(k-1)a)(x+j+ka)^p) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{p+1} ((w-x+i-(k-2)a)(x+i+ka)^p + (w-x-j-(k-2)a)(x+j+ka)^p \\
&\quad - (w-x+i-j-(k-2)a)(x+i+j+ka)^p)
\end{aligned}$$

と変形できる.  $(x+i+ka)^p, (x+j+ka)^p, (x+i+j+ka)^p$  それぞれについてまとめると

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^p \hat{f}_{i,j}(w, x + (k-1)a, x + ka) \\
&= (w-x-i)(x+i)^p + (w-x+j)(x+j)^p - (w-x-i+j)(x+i+j)^p \\
&\quad + (w-x-i-a)(x+i+a)^p + (w-x+j-a)(x+j+a)^p \\
&\quad + 2(w-x)(x+i+j+a)^p - 2(w-x)(x+i+a)^p - 2(w-x)(x+j+a)^p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2(w - x - (p - 1)a)(x + i + j + pa)^p - 2(w - x - (p - 1)a)(x + i + pa)^p \\
& - 2(w - x - (p - 1)a)(x + j + pa)^p - (w - x - i + j - a)(x + i + j + a)^p \\
& + (w - x + i - (p - 2)a)(x + i + pa)^p + (w - x - j - (p - 2)a)(x + j + pa)^p \\
& - (w - x + i - j - (p - 2)a)(x + i + j + pa)^p \\
& + (w - x + i - (p - 1)a)(x + i + (p + 1)a)^p + (w - x - j - (p - 1)a)(x + j + (p + 1)a)^p \\
& - (w - x + i - j - (p - 1)a)(x + i + j + (p + 1)a)^p \\
& = pa(x + i)^p + pa(x + j)^p - pa(x + i + j)^p - pa(x + i + a)^p - pa(x + j + a)^p \\
& + pa(x + i + j + a)^p
\end{aligned}$$

となる．ここで最後の等号で  $(x + py)^p \equiv x^p \pmod{p^2}$  を用いた．これを  $p$  で割ると

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \in R_p} \hat{\psi}_{i,j}(w, x + (k - 1)a, x + ka) \\
& = a\{(x + i)^p - (x + i + a)^p\} + a\{(x + j)^p - (x + j + a)^p\} + a\{(x + i + j + a)^p - (x + i + j)^p\} \\
& = -a^{p+1} - a^{p+1} + a^{p+1} = -a^2
\end{aligned}$$

と変形できる．ただし  $(x + a)^p \equiv x^p + a^p \pmod{p}$  および  $a \neq 0$  に対し  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  を用いた．  $\square$

次に  $\psi$  についてのシャドールコサイクル不変量を計算するため，次の補題を証明する．

**補題 4.14.** 任意の  $i, j, w, x, a \in R_p$  に対し

$$\sum_{k \in R_p} \psi(w, x + (k - 1)a, x + ka) = -a^2$$

が成り立つ．

**証明.**  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$  において

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^p (w - x - (k - 1)a)\{(x + (k - 1)a)^p + (x + (k + 1)a)^p - 2(x + ka)^p\} \\
& = \sum_{k=0}^{p-1} (w - x - ka)(x + ka)^p + \sum_{k=2}^{p+1} (w - x - (k - 2)a)(x + ka)^p \\
& \quad - 2 \sum_{k=1}^p (w - x - (k - 1)a)(x + ka)^p \\
& = (w - x)x^p - (w - x + a)(x + a)^p - (w - x - pa)(x + pa)^p \\
& \quad + (w - x - (p - 1)a)(x + (p + 1)a)^p \\
& = pax^p - pa(x + a)^p
\end{aligned}$$

よって

$$\sum_{k \in R_p} \psi(w, x + (k-1)a, x + ka) = ax^p - a(x+a)^p = -a^{p+1} = -a^2.$$

□

系 4.15.  $(2, p)$ -torus knot  $T(2, p)$  ( $p$  は奇素数) に対し

$$\Psi_{\hat{\psi}_{i,j}}(T(2, p)) = \Psi_{\psi}(T(2, p))$$

が成り立つ. 特に  $[\hat{\psi}_{i,j} + \xi_{i,j}] = [\psi] \in H_Q^3(R_p, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ , つまり  $\hat{\psi}_{i,j}$  は望月 3-コサイクルとコホモロガス.

証明.  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \langle t | t^p = 1 \rangle$  とする. 補題 4.13, 4.14 より

$$\Psi_{\hat{\psi}_{i,j}}(T(2, p)) = \sum_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \sum_{a=1}^p t^{-a^2} = \Psi_{\psi}(T(2, p)).$$

□

注釈.  $p = 3$  のときは真の等号  $\hat{\psi}_{i,j} + \xi_{i,j} = \psi$  が成立する.

## 5 主結果の証明

この節では主結果の証明を与える. 5.1 節では図式  $\check{D}^{(3)}$  の  $X$ -彩色が  $\check{D}$  の  $X^{(3)}$  彩色と一対一に対応することを示し, それを用いて一般のカンドルの彩色数のサテライト化公式 (定理 3.1) の証明を与える. 5.2 節では一般のシャドーカンドル 2-コサイクルに対するシャドーコサイクル不変量のサテライト化公式 (定理 3.2) の証明を与える. 5.3 節では Alexander カンドルによる彩色数のサテライト化公式 (定理 3.3) の証明を与える. 5.4 節では八面体カンドルによる彩色数のサテライト化公式 (定理 3.5) の証明を与える. 5.5 節では二面体カンドルの望月 3-コサイクルに対するシャドーコサイクル不変量のサテライト化公式 (定理 3.4) の証明を与える. 5.6 節では八面体カンドルの 3-コサイクルに対するシャドーコサイクル不変量のサテライト化公式 (定理 3.7) の証明を与える. 5.7 節と 5.8 節では八面体カンドルとタングル  $T_{m,n}$  についてサテライト化公式 (例 3.6, 例 3.8) の係数を計算する.

### 5.1 定理 3.1 の証明

この節では 1-タングルの図式  $\check{D}$  とその 0-枠に沿った三重化で  $(+, -, +)$ -型のタングル  $\check{D}^{(3)}$  について,  $\check{D}^{(3)}$  の連結カンドル  $X$  による彩色が  $\check{D}$  の  $X^{(3)}$  による彩色と対応することを示す. その結果として定理 3.1 の証明を与える.

1-タングルの図式  $\check{D}$  について, 連結カンドル  $X$  による彩色の集合を  $\text{Col}_X(\check{D})$  と表し,  $\check{D}$  の上端, 下端それぞれにおける色が  $x, y \in X$  であるような彩色の集合を  $\text{Col}_X(\check{D}; x, y)$  と表す.  $X^{(3)}$  の極大成分の集合を  $\{X_i\}_{i \in I}$  と表す.



図式の三重化により弧  $a \in \text{Arc}(\check{D})$  には  $\check{D}^{(3)}$  の弧  $a_1, a_2, a_3$  が対応する. ただし  $a$  が下向きの自明な 1-タングルとして表されるとき,  $a_1, a_2, a_3$  はこの順で左から並ぶ自明な 3-タングルで向きは順に下, 上, 下であるとする. (図 13 参照)

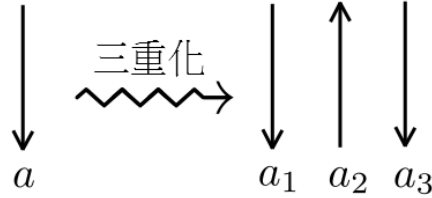


図 13:  $\check{D}$  の三重化

写像  $\gamma : \text{Col}_X(\check{D}^{(3)}) \rightarrow \text{Col}_{X^{(3)}}(\check{D})$  を  $\mathcal{C}^{(3)} \in \text{Col}_X(\check{D}^{(3)})$  に対し

$$\gamma(\mathcal{C}^{(3)})(a) = (\mathcal{C}^{(3)}(a_1), \mathcal{C}^{(3)}(a_2), \mathcal{C}^{(3)}(a_3))$$

で定める.  $\gamma(\mathcal{C}^{(3)})$  は  $X^{(3)}$  の定義より  $X^{(3)}$ -彩色となるので  $\gamma$  は well-defined である. また  $\delta : \text{Col}_{X^{(3)}}(\check{D}) \rightarrow \text{Col}_X(\check{D}^{(3)})$  を  $\mathcal{C} \in \text{Col}_{X^{(3)}}(\check{D})$  に対し  $\mathcal{C}(a) = (x_1, x_2, x_3)$  であるとき

$$\delta(\mathcal{C})(a_1) = x_1, \delta(\mathcal{C})(a_2) = x_2, \delta(\mathcal{C})(a_3) = x_3$$

と定める. このとき次が成立する.

**補題 5.1.**  $\gamma$  は全単射である.

**証明.** 定義より  $\gamma \circ \delta = \text{id}, \delta \circ \gamma = \text{id}$  であるので主張が成り立つ. □

$\mathcal{C} \in \text{Col}_{X^{(3)}}(\check{D})$  について, ある弧  $a \in \text{Arc}(\check{D})$  に対し  $\mathcal{C}(a) = x$  とすると,  $a$  と交点を挟んで隣接する弧  $b$  の色  $y = \mathcal{C}(b)$  は  $x$  と同じ  $X^{(3)}$  の極大成分に含まれている必要がある. よって全ての弧に対する色が同じ極大成分に含まれるので,  $\check{D}$  の彩色集合は

$$\text{Col}_{X^{(3)}}(\check{D}) = \bigsqcup_{i \in I} \text{Col}_{X_i}(\check{D})$$

と表される. よって次の系が成立する.

**系 5.2.**  $\text{Col}_X(\check{D}^{(3)})$  から  $\bigsqcup_{i \in I} \text{Col}_{X_i}(\check{D})$  への全単射が存在する.

また上端と下端の色を制限した彩色について次が成り立つ.

**系 5.3.**  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X^{(3)}$  について,  $\mathbf{x} \in X_i, \mathbf{y} \in X_j$  とすると  $\text{Col}_X(\check{D}^{(3)}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq \emptyset$  であるのは  $i = j$  のときに限る. またこのとき  $\text{Col}_X(\check{D}^{(3)}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  から  $\text{Col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  への全単射が存在する.

系 5.2, 系 5.3 より  $\text{Col}_{X_i}(\check{D}) = \bigsqcup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_i} \text{Col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  である. 以上を踏まえて  $K^{(3)}(T)$  の  $X$ -彩色数を計算する.

定理 3.1 の証明. 任意の  $\mathcal{C} \in \text{Col}_X(K^{(3)}(T))$  について,  $T$  の上端, 下端における色がそれぞれ  $\mathbf{y}, \mathbf{x} \in X^3$  とする. このとき  $\mathcal{C}$  は  $T$  の  $X$ -彩色  $\mathcal{C}_T \in \text{Col}_X(T; \mathbf{y}, \mathbf{x})$  と  $\check{D}^{(3)}$  の  $X$ -彩色  $\mathcal{C}_{(3)} \in \text{Col}_X(\check{D}^{(3)}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  の組とみなせる. 補題 5.1 より  $\mathcal{C}^{(3)}$  はある  $\mathcal{C}_{\check{D}} \in \text{Col}_{X^{(3)}}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  と同一視される.  $X^{(3)} = \bigsqcup_{i \in I} X_i$  を  $X^{(3)}$  の極大連結部分カンドル分解とすると系 5.3 よりある  $i \in I$  に対し  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_i$  かつ  $\mathcal{C}_{\check{D}} \in \text{Col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  となる. ゆえに  $\mathcal{C} \in \text{Col}_X(K^{(3)}(T))$  の元はある  $i \in I$  に対する  $\text{Col}_X(T; \mathbf{y}, \mathbf{x}) \times \text{Col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  に含まれる. 逆に  $\mathcal{C}_T \in \text{Col}_X(T; \mathbf{y}, \mathbf{x}), \mathcal{C}_{\check{D}} \in \text{Col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  とするとこれらを組み合わせて  $K^{(3)}(T)$  の  $X$ -彩色が得られる. つまり

$$\text{Col}_X(K^{(3)}(T)) = \bigsqcup_{i \in I} \bigsqcup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_i} \text{Col}_X(T; \mathbf{y}, \mathbf{x}) \times \text{Col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$$

と同一視される. 両辺の集合の濃度を考えると

$$\text{col}_X(K^{(3)}(T)) = \sum_{i \in I} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_i} \text{col}_X(T; \mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \text{col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$$

と表される. よって題意は示された.  $\square$

定理の右辺の項について, 以下の補題を用いればカンドルの情報のみから右辺を簡略化することができる.

**補題 5.4.**  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_i$  とし,  $t \in \text{Aut}(X^{(3)})$  とする.  $t(\mathbf{x}) \in X_j$  のとき全単射  $t_* : \text{Col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \text{Col}_{X_j}(\check{D}; t(\mathbf{x}), t(\mathbf{y}))$  が存在する.

**証明.** 写像  $t_* : \text{Col}_{X^{(3)}}(\check{D}) \rightarrow \text{Col}_{X^{(3)}}(\check{D})$  を  $\mathcal{C} \in \text{Col}_{X^{(3)}}(\check{D}), a \in \text{Arc}(\check{D})$  に対し

$$t_*(\mathcal{C})(a) = t(\mathcal{C}(a))$$

で定めると,  $t$  がカンドル準同型より  $t_*$  は well-defined である. このとき系 5.2 より  $\mathcal{C} \in \text{Col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  に対し  $t_*(\mathcal{C})$  はある  $\text{Col}_{X_k}(\check{D})$  に含まれる.  $t(\mathbf{x}) \in X_j$  であるから  $t_*(\mathcal{C}) \in \text{Col}_{X_j}(\check{D})$  である. また  $t_*$  の定義より  $\check{D}$  の始点と終点における  $t_*(\mathcal{C})$  の値はそれぞれ  $t(\mathbf{x}), t(\mathbf{y})$  である, つまり  $t_*(\mathcal{C}) \in \text{Col}_{X_j}(\check{D}; t(\mathbf{x}), t(\mathbf{y}))$  が成り立つ. これより  $t_*$  を制限した写像  $t_* : \text{Col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \text{Col}_{X_j}(\check{D}; t(\mathbf{x}), t(\mathbf{y}))$  が得られる.  $t^{-1}$  についても同様の議論により写像  $(t^{-1})_* : \text{Col}_{X_j}(\check{D}; t(\mathbf{x}), t(\mathbf{y})) \rightarrow \text{Col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  が得られる. 定義より  $(t^{-1})_*$  は  $t_*$  の逆写像であるから, 主張が成り立つ.  $\square$

**系 5.5.**  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}' \in X_i$  のとき,  $t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$  となる  $t \in \text{Inn}(X_i)$  が存在する. このとき全単射  $t_* : \text{Col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \text{Col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}', t(\mathbf{y}))$  が存在する.

**証明.**  $t \in \text{Inn}(X_i)$  の存在は  $X_i$  が連結より従う.  $t \in \text{Inn}(X_i)$  は  $X_i \subset X^{(3)}$  の有限個の元の作用により表されるので  $t \in \text{Inn}(X^{(3)})$  とみなせる. よって  $t \in \text{Aut}(X^{(3)})$  より補題 5.4 で定められる  $t_* : \text{Col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \text{Col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}', t(\mathbf{y}))$  は全単射である.  $\square$

(+, -, +)-型のタングル  $T$  に対し上端, 下端それぞれにおける色が  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X^{(3)}$  であるような  $X$ -彩色の集合を  $\text{Col}_X(T; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  と表す. このとき補題 5.4 と同様に次が成立する.

**補題 5.6.**  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_i$  とし,  $u \in \text{Aut}(X)$  とする. このとき全単射  $u_* : \text{Col}_X(T; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \text{Col}_X(T; u(\mathbf{x}), u(\mathbf{y}))$  が存在する. ただし  $u(\mathbf{x}) = (u(x_1), u(x_2), u(x_3))$  と表す.

**証明.** 写像  $u_* : \text{Col}_X(T) \rightarrow \text{Col}_X(T)$  を  $\mathcal{C} \in \text{Col}_X(T), a \in \text{Arc}(T)$  に対し

$$u_*(\mathcal{C})(a) = u(\mathcal{C}(a))$$

で定めると,  $u$  がカンドル準同型より  $u_*$  は well-defined である. これを  $\text{Col}_X(T; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  に制限すると写像  $u_* : \text{Col}_X(T; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \text{Col}_X(T; u(\mathbf{x}), u(\mathbf{y}))$  が得られる. 同様に  $u^{-1}$  に対し写像  $(u^{-1})_* : \text{Col}_X(T; u(\mathbf{x}), u(\mathbf{y})) \rightarrow \text{Col}_X(T; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  が得られる. 定義より  $(u^{-1})_*$  は  $u_*$  の逆写像であるから, 主張が成り立つ.  $\square$

## 5.2 定理 3.2 の証明

この節では  $\check{D}^{(3)}$  に対するシャドーカンドル 2-コサイクル  $\psi$  を用いたウェイトと  $\check{D}$  に対するシャドーカンドル 2-コサイクル  $\psi^{(3)}$  を用いたウェイトの対応について述べる. その対応により  $K^{(3)}(T)$  のシャドーコサイクル不変量が  $K, T$  の不変量を用いて表されることを示す.

まずは  $\check{D}^{(3)}$  の部分のウェイトについて, 次が成立する.

**補題 5.7.**  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_i, \mathcal{C} \in \text{Col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  とし,  $\delta(\mathcal{C}) \in \text{Col}_X(\check{D}^{(3)})$  を対応する彩色とする. このとき

$$W_{\psi^{(3)}}(\check{D}, \mathcal{C}; r) = W_{\psi}(\check{D}^{(3)}, \delta(\mathcal{C}); r)$$

が成り立つ.

**証明.** 補題 5.1 における  $\check{D}$  の  $X^{(3)}$ -彩色と  $\check{D}^{(3)}$  の  $X$ -彩色の対応について,  $\psi^{(3)}$  の定義より  $\check{D}$  の各交点での  $\psi^{(3)}$  を用いた  $X$ -シャドー  $X^{(3)}$ -彩色についてのウェイトは, 関式  $\check{D}^{(3)}$  の  $X$ -シャドー  $X$ -彩色についての  $\psi$  を用いたウェイトに等しい. よって全ての交点についてのウェイトを足し合わせた式も等しいので, 示すべき等式が成り立つ.  $\square$

**定理 3.2 の証明.** 任意の  $\mathcal{C} \in \text{Col}_X(K^{(3)}(T))$  について,  $T$  の上端, 下端における色がそれぞれ  $\mathbf{y}, \mathbf{x} \in X^3$  とする. このとき  $\mathcal{C}$  は  $T$  の  $X$ -彩色  $\mathcal{C}_T \in \text{Col}_X(T; \mathbf{y}, \mathbf{x})$  と  $\check{D}^{(3)}$  の  $X$ -彩色  $\mathcal{C}^{(3)} \in \text{Col}_X(\check{D}^{(3)}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  の組とみなせる. よって

$$\Psi_{\psi}(K^{(3)}(T), r) = \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X^3} \sum_{\mathcal{C}_T \in \text{Col}_X(T; \mathbf{y}, \mathbf{x})} \sum_{\mathcal{C}^{(3)} \in \text{Col}_X(\check{D}^{(3)}; \mathbf{x}, \mathbf{y})} W_{\psi}(T, \mathcal{C}_T; r) \cdot W_{\psi}(\check{D}^{(3)}, \mathcal{C}^{(3)}; r)$$

と表される. 補題 5.1 より  $\mathcal{C}^{(3)} \in \text{Col}_X(\check{D}^{(3)}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  は  $\gamma(\mathcal{C}^{(3)}) \in \text{Col}_{X^{(3)}}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  と対応し, 補題 5.7 より  $W_{\psi}(\check{D}^{(3)}, \mathcal{C}^{(3)}; r) = W_{\psi^{(3)}}(\check{D}, \delta(\mathcal{C}^{(3)}); r)$  が成り立つ. また  $\text{Col}_X(\check{D}^{(3)}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq \emptyset$  であるのはある  $i \in I$  に対し  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_i$  となる時に限るので,

$$\Psi_{\psi}(K^{(3)}(T), r) = \sum_{i \in I} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_i} \sum_{\mathcal{C}_T \in \text{Col}_X(T; \mathbf{y}, \mathbf{x})} \sum_{\mathcal{C} \in \text{Col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y})} W_{\psi}(T, \mathcal{C}_T; r) \cdot W_{\psi_i}(\check{D}, \mathcal{C}; r)$$

$$= \sum_{i \in I} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_i} \Psi_{\psi}(T; \mathbf{y}, \mathbf{x}, r) \cdot \Psi_{\psi_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y}, r)$$

と変形できる. ただし  $\psi^{(3)} : X \times X^{(3)} \times X^{(3)} \rightarrow A$  を  $X_i \subset X^{(3)}$  に制限したシャドーカンドル 2-コサイクルを  $\psi_i : X \times X_i \times X_i \rightarrow A$  とおいた.  $\square$

具体的な  $\psi$  に対しては以下の補題を用いれば右辺を簡略化することができる.

**補題 5.8.**  $T$  を任意のタングルとする.  $X$  を連結カンドル,  $M$  を  $X$ -集合とし,  $\theta : M \times X^2 \rightarrow A$  をシャドーカンドル 2-コサイクルとする.  $\mathcal{C} \in \text{Col}_X(T), s \in \text{Inn}(X)$  に対し  $s(\mathcal{C}) \in \text{Col}_X(T)$  を任意の弧  $a$  に  $s(\mathcal{C}(a))$  を対応させる彩色とする. このとき

$$W_{\theta}(T, \mathcal{C}; r) = W_{\theta}(T, s(\mathcal{C}); s(r))$$

が成り立つ. ただし  $s(x) = x^{y_1 y_2 \dots}$  のとき  $s$  は  $r \in M$  に  $s(r) = r^{y_1 y_2 \dots}$  で作用する.

**証明.**  $s(x) = x * z (\exists z \in X)$  の場合に示す.

$\theta_z : M \times X^2 \rightarrow A$  を  $\theta_z(w, x, y) = \theta(w^z, x^z, y^z)$  とおく.  $\theta_z$  は  $\theta$  とコホモロガスであるから  $W_{\theta}(T, s(\mathcal{C}); s(r)) = W_{\theta_z}(T, \mathcal{C}; r) = W_{\theta}(T, \mathcal{C}; r)$  が成り立つ.  $\square$

**系 5.9.**  $\check{D}$  を 1-タングルの図式とし,  $X_i$  を有限な連結カンドル,  $X$  を  $X_i$ -集合とする. また  $\psi_i : X \times X_i \times X_i \rightarrow A$  をシャドーカンドル 2-コサイクルとする. このとき任意の  $x, y \in X_i, r \in X, s \in \text{Inn}(X_i)$  に対し

$$\Psi_{\psi_i}(\check{D}; x, y, r) = \Psi_{\psi_i}(\check{D}; s(x), s(y), s(r))$$

が成り立つ.

**証明.** 補題 5.8 より

$$\begin{aligned} \Psi_{\psi_i}(\check{D}; x, y, r) &= \sum_{\mathcal{C} \in \text{Col}_{X_i}(\check{D}; x, y)} W_{\psi_i}(\check{D}, \mathcal{C}; r) \\ &= \sum_{\mathcal{C} \in \text{Col}_{X_i}(\check{D}; x, y)} W_{\psi_i}(\check{D}, s(\mathcal{C}); s(r)) \\ &= \Psi_{\psi_i}(\check{D}; s(x), s(y), s(r)) \end{aligned}$$

であるので等式が成り立つ.  $\square$

### 5.3 定理 3.3 の証明

この節では定理 3.1 の結果を有限, 連結, 忠実な Alexander カンドル  $X$  の場合に適用し, サテライト結び目  $K^{(3)}(T)$  の  $X$ -彩色公式を示す.

補題 4.3 より  $X^{(3)}$  は  $X$  と同型な連結カンドル  $\{X_{i,j}\}_{i,j \in X}$  に分解される. 各  $X_{i,j}$  から基点  $0_{i,j}$  をとる. 仮定より  $X$  は忠実なので  $\text{col}_{X_{i,j}}(\check{D}; x_{i,j}, y_{i,j}) \neq \emptyset$  となるのは  $x = y$  のとき

に限る．よって定理 3.1 より

$$\text{col}_X(K^{(3)}(T)) = \sum_{i,j \in X} \sum_{x_{i,j} \in X_{i,j}} \text{col}_X(T; x_{i,j}, x_{i,j}) \cdot \text{col}_{X_{i,j}}(\check{D}; x_{i,j}, x_{i,j})$$

と表される．系 5.5 より

$$\begin{aligned} \text{col}_X(K^{(3)}(T)) &= \sum_{i,j \in X} \sum_{x_{i,j} \in X_{i,j}} \text{col}_X(T; x_{i,j}, x_{i,j}) \cdot \text{col}_{X_{i,j}}(\check{D}; 0_{i,j}, 0_{i,j}) \\ &= \sum_{i,j \in X} \sum_{x_{i,j} \in X_{i,j}} \text{col}_X(T; x_{i,j}, x_{i,j}) \cdot \text{col}_X(\check{D}; 0, 0) \end{aligned}$$

と変形できる．ここで集合  $\{x_{i,j} | x, i, j \in X\}$  は  $X^3$  であるから

$$\sum_{i,j \in X} \sum_{x_{i,j} \in X_{i,j}} \text{col}_X(T; x_{i,j}, x_{i,j}) = \text{col}_X(\hat{T})$$

が成り立つ．よって

$$\text{col}_X(K^{(3)}(T)) = \text{col}_X(\hat{T}) \cdot \text{col}_X(\check{D}; 0, 0)$$

である．ここで系 5.5 より

$$\text{col}_X(\check{D}) = \sum_{x \in X} \text{col}_X(\check{D}; x, x) = \sum_{x \in X} \text{col}_X(\check{D}; 0, 0) = |X| \cdot \text{col}_X(\check{D}; 0, 0)$$

である．また  $X$  は忠実なので  $\text{Col}_X(K)$  と  $\text{Col}_X(\check{D})$  を同一視できる．ゆえに

$$\text{col}_X(K^{(3)}(T)) = \text{col}_X(K) \cdot \text{col}_X(\hat{T}) / |X|$$

となり，示すべき等式が成り立つ．

#### 5.4 定理 3.5 の証明

この節では定理 3.1 の結果を八面体カンドル  $Q_6^a$  の場合に適用し，サテライト結び目  $K^{(3)}(T)$  の  $Q_6^a$  彩色公式を示す．

付録 A より  $(Q_6^a)^{(3)}$  の極大連結部分カンドル分解は  $4Q_6^a \sqcup 8Q_{12}^a \sqcup 8Q_{12}^b$  である． $Q_6^a$  は忠実なので  $1 \leq i \leq 4$  のとき  $\text{col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq \emptyset$  となるのは  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$  のときに限る． $Q_{12}^b$  は補題 A.3 より共役カンドルなので  $13 \leq i \leq 20$  のとき  $\text{col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq \emptyset$  となるのは  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$  のときに限る． $Q_{12}^a$  は  $Q_6^a$  の中心拡大より，射影  $f_a : Q_{12}^a \rightarrow Q_6^a$  は被覆写像である． $f_a$  は彩色集合の写像  $(f_a)_* : \text{Col}_{Q_{12}^a}(\check{D}) \rightarrow \text{Col}_{Q_6^a}(\check{D})$  を誘導する． $\check{D}$  の始点，終点をそれぞれ  $s, t$  とすると  $\mathcal{C} \in \text{Col}_{Q_{12}^a}(\check{D})$  に対し  $(f_a)_*(\mathcal{C}(s)) = (f_a)_*(\mathcal{C}(t))$  でなければならない．よって  $5 \leq i \leq 12$  のとき  $\text{col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq \emptyset$  となるのは  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$  または  $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{x}}$  のときに限る．ただし  $\mathbf{x} \in Q_{12}^a$  に対し  $\tilde{\mathbf{x}} \in Q_{12}^a$  は  $\tilde{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}, f_a(\tilde{\mathbf{x}}) = f_a(\mathbf{x})$  となる唯一つの元である．

これらをまとめると、定理 3.1 より

$$\begin{aligned} \text{col}_{Q_6^a}(K^{(3)}(T)) &= \sum_{i=1}^4 \sum_{\mathbf{x} \in X_i} \text{col}_{Q_6^a}(T; \mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot \text{col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{x}) \\ &\quad + \sum_{i=5}^{12} \sum_{\mathbf{x} \in X_i} \left\{ \text{col}_{Q_6^a}(T; \mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot \text{col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{x}) + \text{col}_{Q_6^a}(T; \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \cdot \text{col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) \right\} \\ &\quad + \sum_{i=13}^{20} \sum_{\mathbf{x} \in X_i} \text{col}_{Q_6^a}(T; \mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot \text{col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで各  $i$  に対し  $X_i$  は連結より  $\mathbf{x} \in X_i$  のとき

$$\text{col}_{X_i}(K) = |X_i| \cdot \text{col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{x})$$

が従う。よって

$$\begin{aligned} \text{col}_{Q_6^a}(K^{(3)}(T)) &= \sum_{i=1}^4 \sum_{\mathbf{x} \in X_i} \text{col}_{Q_6^a}(T; \mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot \frac{\text{col}_{Q_6^a}(K)}{6} \\ &\quad + \sum_{i=5}^{12} \sum_{\mathbf{x} \in X_i} \left\{ \text{col}_{Q_6^a}(T; \mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot \frac{\text{col}_{Q_{12}^a}(K)}{12} + \text{col}_{Q_6^a}(T; \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \cdot \text{col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) \right\} \\ &\quad + \sum_{i=13}^{20} \sum_{\mathbf{x} \in X_i} \text{col}_{Q_6^a}(T; \mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot \frac{\text{col}_{Q_{12}^b}(K)}{12} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで補題 2.5 より  $\mathbf{x} \in X_i \cong Q_{12}^a (i = 5, \dots, 12)$  のとき、任意の  $Q_6^a$  彩色  $\mathcal{C} \in \text{Col}_{Q_6^a}(\check{D}; f_a(\mathbf{x}), f_a(\mathbf{x}))$  に対し持ち上げ  $\mathcal{C}' \in \text{Col}_{Q_{12}^a}(\check{D})$  で始点の色が  $\mathbf{x}$  であるものが唯一つ存在する。このとき  $\mathcal{C}' \in \text{Col}_{Q_{12}^a}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{x})$  または  $\mathcal{C}' \in \text{Col}_{Q_{12}^a}(\check{D}; \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$  である。  $Q_{12}^a$  は 2-コサイクル  $\phi_a$  により定義される  $Q_6^a$  の中心拡大なので、補題 2.12 より  $\mathcal{C} \in \text{Col}_{Q_6^a}(\check{D}; f_a(\mathbf{x}), f_a(\mathbf{x})) \subset \text{Col}_{Q_6^a}(D)$  に対し  $\Phi_{\phi_a}(D, \mathcal{C}) = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  であることとその持ち上げが  $\text{Col}_{Q_{12}^a}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{x}) \subset \text{Col}_{Q_{12}^a}(D)$  に含まれることは同値である。よって  $\phi_a$  により定義されるカンドルコサイクル不変量を

$$\Phi_{\phi_a}(K) = C_0(K, Q_6^a) + C_1(K, Q_6^a) \cdot t \in \mathbb{Z}[t]/(t^2 - 1)$$

と表すと

$$\frac{\text{col}_{Q_{12}^a}(K)}{12} = \text{col}_{Q_{12}^a}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{C_0(K, Q_6^a)}{6}, \quad \text{col}_{Q_{12}^a}(\check{D}; \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) = \frac{C_1(K, Q_6^a)}{6}$$

となる。また補題 2.5 より  $\mathbf{x} \in X_i \cong Q_{12}^b (i = 13, \dots, 20)$  のとき、任意の  $Q_6^b$  彩色  $\mathcal{C} \in \text{Col}_{Q_6^b}(\check{D}; f_b(\mathbf{x}), f_b(\mathbf{x}))$  に対し持ち上げ  $\mathcal{C}' \in \text{Col}_{Q_{12}^b}(\check{D})$  で始点の色が  $\mathbf{x}$  であるものが唯一つ存在する。このとき  $Q_{12}^b$  は共役カンドルより  $\mathcal{C}' \in \text{Col}_{Q_{12}^b}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{x})$  である。よって

$$\frac{\text{col}_{Q_6^b}(K)}{6} = \text{col}_{Q_6^b}(\check{D}; f_b(\mathbf{x}), f_b(\mathbf{x})) = \text{col}_{Q_{12}^b}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{\text{col}_{Q_{12}^b}(K)}{12}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} \text{col}_{Q_6^a}(K^{(3)}(T)) &= \sum_{i=1}^4 \sum_{\mathbf{x} \in X_i} \text{col}_{Q_6^a}(T; \mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot \frac{\text{col}_{Q_6^a}(K)}{6} \\ &\quad + \sum_{i=5}^{12} \sum_{\mathbf{x} \in X_i} \left\{ \text{col}_{Q_6^a}(T; \mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot \frac{C_0(K, Q_6^a)}{6} + \text{col}_{Q_6^a}(T; \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \cdot \frac{C_1(K, Q_6^a)}{6} \right\} \\ &\quad + \sum_{i=13}^{20} \sum_{\mathbf{x} \in X_i} \text{col}_{Q_6^a}(T; \mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot \frac{\text{col}_{Q_6^b}(K)}{6} \end{aligned}$$

と変形できる。

各  $X_i$  に基点  $\mathbf{x}_{0,i} \in X_i$  をとる。  $X_i$  は連結より任意の  $\mathbf{x} \in X_i$  に対し  $s(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{0,i}$  となる  $s \in \text{Inn}(X_i) \subset \text{Inn}((Q_6^a)^{(3)})$  が存在する。  $(Q_6^a)^{(3)}$  の定義より  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  のとき  $s(\mathbf{x}) = (u(x_1), u(x_2), u(x_3))$  となる  $u \in \text{Inn}(Q_6^a)$  が存在する。 よって補題 5.6 より

$$\text{col}_{Q_6^a}(T; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{col}_{Q_6^a}(T; \mathbf{x}_{0,i}, s(\mathbf{y}))$$

が成り立つ。 このとき  $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{x}}$  ならば  $s(\mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{x}}_{0,i}$  であることに注意する。 従って  $c_{i,0} = \text{col}_{Q_6^a}(T; \mathbf{x}_{0,i}, \mathbf{x}_{0,i}) (1 \leq i \leq 20)$ ,  $c_{i,1} = \text{col}_{Q_6^a}(T; \tilde{\mathbf{x}}_{0,i}, \mathbf{x}_{0,i}) (5 \leq i \leq 12)$  とおくと

$$\begin{aligned} \text{col}_{Q_6^a}(K^{(3)}(T)) &= \sum_{i=1}^4 6c_{i,0} \cdot \frac{\text{col}_{Q_6^a}(K)}{6} \\ &\quad + \sum_{i=5}^{12} 12 \left\{ c_{i,0} \cdot \frac{C_0(K, Q_6^a)}{6} + c_{i,1} \cdot \frac{C_1(K, Q_6^a)}{6} \right\} \\ &\quad + \sum_{i=13}^{20} 12c_{i,0} \cdot \frac{\text{col}_{Q_6^b}(K)}{6} \end{aligned}$$

と表される。 ここで  $2 \in Q_6^a$  による作用  $s_2 \in \text{Inn}(Q_6^a)$  について、  $X_i$  の基点の各成分に  $s_2$  を作用させると

$$s_2(155) = (133), \quad s_2(326) = (624), \quad s_2(331) = (661), \quad s_2(635) = (463)$$

$$s_2(265) = (243), \quad s_2(415) = (513), \quad s_2(342) = (652), \quad s_2(646) = (454)$$

となり、補題 5.6 より  $s_2$  は  $\text{Col}_{Q_6^a}(T; \mathbf{x}_{0,2i}, \mathbf{y})$  から  $\text{Col}_{Q_6^a}(T; \mathbf{x}_{0,2i-1}, s_2(\mathbf{y}))$  への全単射を誘導する ( $3 \leq i \leq 10$ )。 従って  $c_{2i,0} = c_{2i-1,0} (3 \leq i \leq 10)$ ,  $c_{2i,1} = c_{2i-1,1} (3 \leq i \leq 6)$  が成り立つ。 ゆえに

$$\begin{aligned} \text{col}_{Q_6^a}(K^{(3)}(T)) &= \sum_{i=1}^4 c_{i,0} \cdot \{C_0(K, Q_6^a) + C_1(K, Q_6^a)\} \\ &\quad + \sum_{i=3}^6 4 \{c_{2i,0} \cdot C_0(K, Q_6^a) + c_{2i,1} \cdot C_1(K, Q_6^a)\} + \sum_{i=7}^{10} 4c_{i,0} \cdot \text{col}_{Q_6^b}(K) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \sum_{i=1}^4 c_{i,0} + 4 \sum_{i=3}^6 c_{2i,0} \right\} \cdot C_0(K, Q_6^a) \\
&+ \left\{ \sum_{i=1}^4 c_{i,0} + 4 \sum_{i=3}^6 c_{2i,1} \right\} \cdot C_1(K, Q_6^a) + \sum_{i=7}^{10} 4c_{i,0} \cdot \text{col}_{Q_6^b}(K)
\end{aligned}$$

と変形できるので、定理の主張が示された。

## 5.5 定理 3.4 の証明

この節では定理 3.2 の結果を奇素数位数の二面体カンドル  $R_p$  の場合に適用し、望月 3-コサイクルに対するシャドーコサイクル不変量のサテライト公式を証明する。

補題 4.3 より  $(R_p)^{(3)}$  は  $R_p$  と同型な連結カンドル  $\{(R_p)_{i,j}\}_{i,j \in R_p}$  に分解される。望月 3-コサイクル  $\psi$  から関式の三重化によって得られるシャドーカンドル 2-コサイクル  $\psi^{(3)}$  を  $(R_p)_{i,j}$  に制限したものを  $\hat{\psi}_{i,j}$  と表す。  $R_p$  は忠実なので、定理 3.2 よりサテライト結び目  $K^{(3)}(T)$  のシャドーコサイクル不変量は

$$\Psi_\psi(K^{(3)}(T), r) = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \sum_{x \in R_p} \Psi_\psi(T; x_{i,j}, x_{i,j}, r) \cdot \Psi_{\hat{\psi}_{i,j}}(\check{D}; x_{i,j}, x_{i,j}, r)$$

と表される。ただし

$$\begin{aligned}
\Psi_\psi(T; x_{i,j}, x_{i,j}, r) &= \sum_{\mathcal{C} \in \text{Col}_{R_p}(T; x_{i,j}, x_{i,j})} W_\psi(T, \mathcal{C}; r) \\
\Psi_{\hat{\psi}_{i,j}}(\check{D}; x_{i,j}, x_{i,j}, r) &= \sum_{\mathcal{C} \in \text{Col}_{(R_p)_{i,j}}(\check{D}; x_{i,j}, x_{i,j})} W_{\hat{\psi}_{i,j}}(\check{D}, \mathcal{C}; r)
\end{aligned}$$

とおいた。

系 4.15 より  $\hat{\psi}_{i,j}$  は  $\psi$  とコホモロガスである。よって

$$\Psi_{\hat{\psi}_{i,j}}(\check{D}; x_{i,j}, x_{i,j}, r) = \Psi_\psi(\check{D}; x, x, r)$$

である。また  $R_p$  は連結より任意の  $x \in R_p$  に対し  $s(0) = x$  となる  $s \in \text{Inn}(R_p)$  が存在するので、系 5.9 および  $W_\psi$  が外部領域の色によらないことから

$$\Psi_\psi(\check{D}; x, x, r) = \Psi_\psi(\check{D}; 0, 0, r)$$

が成り立つ。ゆえに任意の  $x \in R_p$  に対し

$$p\Psi_\psi(\check{D}; x, x, r) = \Psi_\psi(D, r)$$

であるので、

$$\Psi_\psi(K^{(3)}(T), r) = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \sum_{x \in R_p} \Psi_\psi(T; x_{i,j}, x_{i,j}, r) \cdot \Psi_\psi(\check{D}; x, x, r)$$



$$= \sum_{i,j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \sum_{x \in R_p} \Psi_\psi(T; x_{i,j}, x_{i,j}, r) \cdot \Psi_\psi(D, r)/p$$

と変形できる．ここで  $\{x_{i,j}\}_{x_{i,j} \in R_p}$  は集合として  $(R_p)^3$  に等しいので，

$$\Psi_\psi(K^{(3)}(T), r) = \Psi_\psi(\hat{T}, r) \cdot \Psi_\psi(D, r)/p$$

となり，定理の等式が成り立つことが示された．

## 5.6 定理 3.7 の証明

この節では定理 3.2 の結果を八面体カンドル  $Q_6^a$  の場合に適用し，望月 3-コサイクル  $\psi \in H_Q^3(R_3; \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$  の  $Q_6^a$  への引き戻しにより得られるカンドル 3-コサイクル  $\psi_a$  に対するシャドーコサイクル不変量のサテライト公式を証明する．

定理 3.5 の証明より，各  $X_i$  による  $\check{D}$  の彩色集合  $\text{Col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  が空でないのは  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$  ( $1 \leq i \leq 20$ ) または  $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{x}}$  ( $5 \leq i \leq 12$ ) のときに限る．よって  $\psi_a$  から関式の三重化によって得られるシャドーカンドル 2-コサイクル  $\psi_a^{(3)}$  を  $X_i$  に制限したものを  $\hat{\psi}_{a,i}$  とおくと，任意の  $r \in Q_6^a$  に対し

$$\begin{aligned} \Psi_{\psi_a}(K^{(3)}(T), r) &= \sum_{i=1}^{20} \sum_{\mathbf{x} \in X_i} \Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{x}, \mathbf{x}, r) \cdot \Psi_{\hat{\psi}_{a,i}}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{x}, r) \\ &\quad + \sum_{i=5}^{12} \sum_{\mathbf{x} \in X_i} \Psi_{\psi_a}(T; \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, r) \cdot \Psi_{\hat{\psi}_{a,i}}(\check{D}; \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, r) \end{aligned}$$

と表される．各  $X_i$  に基点  $\mathbf{x}_{0,i}$  をとり， $\mathbf{x} \in X_i$  に対し  $s(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{0,i}$  となる  $s \in \text{Inn}(X_i)$  をとると系 5.9 より

$$\begin{aligned} \Psi_{\hat{\psi}_{a,i}}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{x}, r) &= \Psi_{\hat{\psi}_{a,i}}(\check{D}; \mathbf{x}_{0,i}, \mathbf{x}_{0,i}, r) = \Psi_{\psi_a}(D, r)/|X_i| \\ \Psi_{\hat{\psi}_{a,i}}(\check{D}; \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, r) &= \Psi_{\hat{\psi}_{a,i}}(\check{D}; \mathbf{x}_{0,i}, \tilde{\mathbf{x}}_{0,i}, r) \end{aligned}$$

となる．補題 B.1 より  $1 \leq i \leq 4$  のとき  $\hat{\psi}_{a,i}$  は  $\psi_a$  とコホモロガスである．補題 B.2 より  $5 \leq i \leq 12$  のとき  $\hat{\psi}_{a,i}$  は  $\psi_{12,a} = \psi \circ (j_a \times J_a \times J_a)$  とコホモロガスである．補題 B.3 より  $13 \leq i \leq 20$  のとき  $\hat{\psi}_{a,i}$  は  $\psi_{12,b} = \psi \circ (j_a \times J_b \times J_b)$  とコホモロガスである．よって

$$\begin{aligned} \Psi_{\psi_a}(K^{(3)}(T), r) &= \sum_{i=1}^{20} \sum_{\mathbf{x} \in X_i} \Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{x}, \mathbf{x}, r) \cdot \Psi_{\hat{\psi}_{a,i}}(\check{D}; \mathbf{x}_{0,i}, \mathbf{x}_{0,i}, r) \\ &\quad + \sum_{i=5}^{12} \sum_{\mathbf{x} \in X_i} \Psi_{\psi_a}(T; \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, r) \cdot \Psi_{\hat{\psi}_{a,i}}(\check{D}; \mathbf{x}_{0,i}, \tilde{\mathbf{x}}_{0,i}, r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{20} \sum_{\mathbf{x} \in X_i} \Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{x}, \mathbf{x}, r) \cdot \Psi_{\hat{\psi}_{a,i}}(D, r) / |X_i| \\
&\quad + \sum_{i=5}^{12} \sum_{\mathbf{x} \in X_i} \Psi_{\psi_a}(T; \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, r) \cdot \Psi_{\hat{\psi}_{a,i}}(\check{D}; \mathbf{x}_{0,i}, \tilde{\mathbf{x}}_{0,i}, r)
\end{aligned}$$

と変形できる. 補題 2.5 より  $5 \leq i \leq 12$  のとき, 任意の  $Q_6^a$  彩色  $\mathcal{C} \in \text{Col}_{Q_6^a}(\check{D}; f_a(\mathbf{x}_{0,i}), f_a(\mathbf{x}_{0,i}))$  に対し持ち上げ  $\mathcal{C}' \in \text{Col}_{Q_{12}^a}(\check{D})$  で始点の色が  $\mathbf{x}_{0,i}$  であるものが唯一つ存在する. このとき  $\mathcal{C}' \in \text{Col}_{Q_{12}^a}(\check{D}; \mathbf{x}_{0,i}, \mathbf{x}_{0,i})$  または  $\mathcal{C}' \in \text{Col}_{Q_{12}^a}(\check{D}; \mathbf{x}_{0,i}, \tilde{\mathbf{x}}_{0,i})$  である. よって  $r \in Q_6^a$  に対し

$$\begin{aligned}
\Psi_{\psi_a}(\check{D}; f_a(\mathbf{x}_{0,i}), f_a(\mathbf{x}_{0,i}), r) &= \sum_{\mathcal{C} \in \text{Col}_{Q_6^a}(\check{D}; f_a(\mathbf{x}_{0,i}), f_a(\mathbf{x}_{0,i}))} \Psi_{\psi_a}(\check{D}, \mathcal{C}; r) \\
&= \sum_{\mathcal{C} \in \text{Col}_{Q_{12}^a}(\check{D}; \mathbf{x}_{0,i}, \mathbf{x}_{0,i})} \Psi_{\psi_{12,a}}(\check{D}, \mathcal{C}; r) + \sum_{\mathcal{C} \in \text{Col}_{Q_{12}^a}(\check{D}; \mathbf{x}_{0,i}, \tilde{\mathbf{x}}_{0,i})} \Psi_{\psi_{12,a}}(\check{D}, \mathcal{C}; r) \\
&= \Psi_{\psi_{12,a}}(\check{D}; \mathbf{x}_{0,i}, \mathbf{x}_{0,i}, r) + \Psi_{\psi_{12,a}}(\check{D}; \mathbf{x}_{0,i}, \tilde{\mathbf{x}}_{0,i}, r)
\end{aligned}$$

が成り立つ. これを変形すると

$$\Psi_{\psi_{12,a}}(\check{D}; \mathbf{x}_{0,i}, \tilde{\mathbf{x}}_{0,i}, r) = \frac{\Psi_{\psi_a}(D, r)}{6} - \frac{\Psi_{\psi_{12,a}}(D, r)}{12}$$

となる. よって

$$\begin{aligned}
\Psi_{\psi_a}(K^{(3)}(T), r) &= \sum_{i=1}^{20} \sum_{\mathbf{x} \in X_i} \Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{x}, \mathbf{x}, r) \cdot \Psi_{\hat{\psi}_{a,i}}(D, r) / |X_i| \\
&\quad + \sum_{i=5}^{12} \sum_{\mathbf{x} \in X_i} \Psi_{\psi_a}(T; \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, r) \cdot \left( \frac{\Psi_{\psi_a}(D, r)}{6} - \frac{\Psi_{\psi_{12,a}}(D, r)}{12} \right)
\end{aligned}$$

と表される.

各  $\mathbf{x} \in X_i$  に対し  $s(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{0,i}$  となる  $s \in \text{Inn}(X_i)$  を選ぶ. このとき  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  のとき  $s(\mathbf{x}) = (u(x_1), u(x_2), u(x_3))$  となる  $u \in \text{Inn}(Q_6^a)$  が存在する. よって補題 5.8 より任意の  $\mathcal{C} \in \text{Col}_{Q_6^a}(T; \mathbf{y}, \mathbf{x})$  に対し

$$W_{\psi_a}(T, \mathcal{C}; r) = W_{\psi_a}(T, u(\mathcal{C}); u(r))$$

が成り立ち, これより

$$\Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{y}, \mathbf{x}, r) = \Psi_{\psi_a}(T; u(\mathbf{y}), \mathbf{x}_{0,i}, u(r))$$

となる. さらに望月 3-コサイクル  $\psi$  に対し  $W_\psi$  は外部領域の色によらないので, 引き戻しの  $\psi_a$  に対する  $W_{\psi_a}$  も外部領域の色によらない. よって

$$\Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{y}, \mathbf{x}, r) = \Psi_{\psi_a}(T; u(\mathbf{y}), \mathbf{x}_{0,i}, r)$$

と表される。ゆえに

$$\begin{aligned}
\Psi_{\psi_a}(K^{(3)}(T), r) &= \sum_{i=1}^{20} \sum_{\mathbf{x} \in X_i} \Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{x}_{0,i}, \mathbf{x}_{0,i}, r) \cdot \Psi_{\hat{\psi}_{a,i}}(D, r) / |X_i| \\
&+ \sum_{i=5}^{12} \sum_{\mathbf{x} \in X_i} \Psi_{\psi_a}(T; \widetilde{\mathbf{x}}_{0,i}, \mathbf{x}_{0,i}, r) \cdot \left( \frac{\Psi_{\psi_a}(D, r)}{6} - \frac{\Psi_{\psi_{12,a}}(D, r)}{12} \right) \\
&= \sum_{i=1}^4 \Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{x}_{0,i}, \mathbf{x}_{0,i}, r) \cdot \Psi_{\psi_a}(D, r) \\
&+ \sum_{i=5}^{12} \Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{x}_{0,i}, \mathbf{x}_{0,i}, r) \cdot \Psi_{\psi_{12,a}}(D, r) \\
&+ \sum_{i=13}^{20} \Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{x}_{0,i}, \mathbf{x}_{0,i}, r) \cdot \Psi_{\psi_{12,b}}(D, r) \\
&+ \sum_{i=5}^{12} \Psi_{\psi_a}(T; \widetilde{\mathbf{x}}_{0,i}, \mathbf{x}_{0,i}, r) \cdot (2\Psi_{\psi_a}(D, r) - \Psi_{\psi_{12,a}}(D, r))
\end{aligned}$$

と変形できる。さらに定理 3.5 の証明における  $s_2 \in \text{Inn}(Q_6^a)$  の誘導する  $\text{Col}_{Q_6^a}(T; \mathbf{x}_{0,2i}, \mathbf{y})$  から  $\text{Col}_{Q_6^a}(T; \mathbf{x}_{0,2i-1}, s_2(\mathbf{y}))$  への全単射について、補題 5.8 より任意の  $\mathcal{C} \in \text{Col}_{Q_6^a}(T; \mathbf{x}_{0,2i}, \mathbf{y})$ ,  $r \in Q_6^a$  に対し

$$W_{\psi_a}(T, \mathcal{C}; r) = W_{\psi_a}(T, s_2(\mathcal{C}); s_2(r))$$

が成り立つので

$$\Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{x}_{0,2i}, \mathbf{x}_{0,2i}, r) = \Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{x}_{0,2i-1}, \mathbf{x}_{0,2i-1}, r)$$

$$\Psi_{\psi_a}(T; \widetilde{\mathbf{x}}_{0,2i}, \mathbf{x}_{0,2i}, r) = \Psi_{\psi_a}(T; \widetilde{\mathbf{x}}_{0,2i-1}, \mathbf{x}_{0,2i-1}, r)$$

である。ゆえに

$$\begin{aligned}
\Psi_{\psi_a}(K^{(3)}(T), r) &= \sum_{i=1}^4 \Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{x}_{0,i}, \mathbf{x}_{0,i}, r) \cdot \Psi_{\psi_a}(D, r) \\
&+ 2 \sum_{i=3}^6 \Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{x}_{0,2i}, \mathbf{x}_{0,2i}, r) \cdot \Psi_{\psi_{12,a}}(D, r) \\
&+ 2 \sum_{i=7}^{10} \Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{x}_{0,2i}, \mathbf{x}_{0,2i}, r) \cdot \Psi_{\psi_{12,b}}(D, r) \\
&+ 2 \sum_{i=3}^6 \Psi_{\psi_a}(T; \widetilde{\mathbf{x}}_{0,2i}, \mathbf{x}_{0,2i}, r) \cdot (2\Psi_{\psi_a}(D, r) - \Psi_{\psi_{12,a}}(D, r))
\end{aligned}$$

と変形できる。また補題 B.4 より、シャドーカンドル 2-コサイクル  $\psi_{12,a}, \psi_{12,b}$  の代わりにそれぞれカンドル 3-コサイクル  $\psi_{12}^a, \psi_{12}^b$  を用いてよい。さらに、 $Q_{12}^b$  は共役カンドルなので

補題 2.5 より任意の  $Q_6^b$  彩色  $\mathcal{C} \in \text{Col}_{Q_6^b}(D)$  に対し  $f_b$  による  $D$  の  $Q_{12}^b$  彩色への持ち上げはちょうど 2 つ存在する. このとき  $\psi_{12}^b = \psi_b \circ (f_b \circ f_b \circ f_b)$  より  $r \in Q_{12}^b$  に対し

$$\begin{aligned}\Psi_{\psi_{12}^b}(K, r) &= \sum_{\mathcal{C} \in \text{Col}_{Q_{12}^b}(D)} W_{\psi_{12}^b}(D, \mathcal{C}; r) = \sum_{\mathcal{C} \in \text{Col}_{Q_{12}^b}(D)} W_{\psi_b}(D, f_b(\mathcal{C}); f_b(r)) \\ &= 2 \sum_{\mathcal{C}' \in \text{Col}_{Q_6^b}(D)} W_{\psi_b}(D, \mathcal{C}'; f_b(r)) = 2\Psi_{\psi_b}(K, f_b(r))\end{aligned}$$

と変形できる.  $\theta = \psi_a, \psi_b, \psi_{12}^a$  いずれについても  $W_\theta$  は外部領域の色によらないので,

$$\begin{aligned}\Psi_{\psi_a}(K^{(3)}(T)) &= \sum_{i=1}^4 \Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{x}_{0,i}, \mathbf{x}_{0,i}, r) \cdot \Psi_{\psi_a}(K) \\ &\quad + 2 \sum_{i=3}^6 \Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{x}_{0,2i}, \mathbf{x}_{0,2i}, r) \cdot \Psi_{\psi_{12}^a}(K) \\ &\quad + 4 \sum_{i=7}^{10} \Psi_{\psi_a}(T; \mathbf{x}_{0,2i}, \mathbf{x}_{0,2i}, r) \cdot \Psi_{\psi_b}(K) \\ &\quad + 2 \sum_{i=3}^6 \Psi_{\psi_a}(T; \tilde{\mathbf{x}}_{0,2i}, \mathbf{x}_{0,2i}, r) \cdot (2\Psi_{\psi_a}(K) - \Psi_{\psi_{12}^a}(K))\end{aligned}$$

となり主張の等式が成り立つ.

## 5.7 例 3.6 の証明

この節では定理 3.5 の結果を図 10 のタングル  $T_{m,n}$  の場合に適用し, サテライト公式に現れる係数を決定する.

$Q_6^a$  から  $R_3 = \{0, 1, 2\}$  への全射準同型  $h$  が  $h(1) = h(2) = 0, h(3) = h(4) = 1, h(5) = h(6) = 2$  により定められる.  $\mathbf{x} \in X_i$  に対し  $h$  は写像  $h_* : \text{Col}_{Q_6^a}(T_{m,n}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) \rightarrow \text{Col}_{R_3}(T_{m,n}, h^3(\mathbf{x}), h^3(\mathbf{x})) (1 \leq i \leq 20)$  および  $h_* : \text{Col}_{Q_6^a}(T_{m,n}, \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) \rightarrow \text{Col}_{R_3}(T_{m,n}, h^3(\mathbf{x}), h^3(\tilde{\mathbf{x}})) (5 \leq i \leq 12)$  を誘導する. ここで  $h^3$  は  $h \times h \times h$  を表し,  $\mathbf{x} \in X_i (5 \leq i \leq 12)$  に対し  $h^3(\tilde{\mathbf{x}}) = h^3(\mathbf{x})$  であることを用いた.

写像  $R; Q_6^a \times Q_6^a \rightarrow Q_6^a \times Q_6^a$  を  $R(x, y) = (y^{\bar{x}}, x)$  で定義する.  $x, y \in Q_6^a$  に対し  $R^k(x, y) = (x, y)$  となる最小の  $k (\geq 1)$  は,  $x = y$  のとき  $k = 1$ ,  $x \neq y$  かつ  $h(x) = h(y)$  のとき  $k = 2$ , それ以外のときは  $k = 3$  であることが計算により確かめられる.

$T_{m,n}$  を  $p$  で切断して得られる二つのタングルのうち,  $t_1, t_2, s_1, p$  を端点とするものを  $T_1$ ,  $t_3, p, s_2, s_3$  を端点とするものを  $T_2$  とする.

$T_1$  の彩色について,  $t_1, t_2, s_1, p$  の色をそれぞれ  $x, y, z, w$  とする.  $y \neq z$  かつ  $h(y) = h(z)$  のとき, 任意の奇数  $m$  に対し  $R^m(z, y) = (y, z)$  より  $x = y$  かつ  $z = w$  でなければならない.  $h(y) \neq h(z)$  のとき,  $m \in 3\mathbb{Z}$  ならば  $R^m(z, y) = (z, y)$  より  $x = z$  かつ  $w = y$  でなければならない. また  $m \notin 3\mathbb{Z}$  のとき  $T_1$  の  $R_3$  彩色で  $s_1$  と  $t_1$  の色が一致するものは存在し

ないので  $h(x) = h(z)$  であるような  $Q_6^a$  彩色は存在しない．よって  $T_1$  の端点  $t_1, t_2, s_1, p$  での色の並びとして存在しうるのは

- (1)  $(x, x, x, x)$  ( $x \in Q_6^a$ )
- (2)  $(x, x, y, y)$  ( $x, y \in Q_6^a, x \neq y, h(x) = h(y)$ )
- (3)  $(x, y, x, y)$  ( $x, y \in Q_6^a, h(x) \neq h(y), m \in 3\mathbb{Z}$ )

のいずれかである．逆に (1)(2)(3) それぞれの条件を満たすような  $T_1$  の彩色は唯一つ存在する．

$T_2$  の彩色について,  $s_2, s_3, p, t_3$  の色をそれぞれ  $x', y', z', w'$  とする． $x' \neq w'$  かつ  $h(x') = h(w')$  のとき, 任意の奇数  $n$  に対し  $R^n(w', x') = (x', w')$  より  $y' = x'$  かつ  $z' = w'$  でなければならない． $h(x') \neq h(w')$  のとき,  $n \in 3\mathbb{Z}$  ならば  $R^n(x', w') = (x', w')$  より  $x' = z'$  かつ  $y' = w'$  でなければならない．また  $n \notin 3\mathbb{Z}$  のとき  $T_2$  の  $R_3$  彩色で  $s_3$  と  $t_3$  の色が一致するものは存在しないので  $h(y') h(w')$  であるような  $Q_6^a$  彩色は存在しない．よって  $T_2$  の端点  $s_2, s_3, p, t_3$  での色の並びとして存在しうるのは

- (4)  $(x, x, x, x)$  ( $x \in Q_6^a$ )
- (5)  $(x, x, y, y)$  ( $x, y \in Q_6^a, x \neq y, h(x) = h(y)$ )
- (6)  $(x, y, x, y)$  ( $x, y \in Q_6^a, h(x) \neq h(y), n \in 3\mathbb{Z}$ )

のいずれかである．逆に (4)(5)(6) それぞれの条件を満たすような  $T_2$  の彩色は唯一つ存在する．

$T_{m,n}$  の彩色は  $T_1, T_2$  の彩色で  $p$  における色が等しいものの組み合わせにより得られる．

$c_{1,0} = \text{col}_{Q_6^a}(T_{m,n}; (111), (111))$  は (1)(4) を満たすので  $c_{1,0} = 1$ ．

$c_{2,0} = \text{col}_{Q_6^a}(T_{m,n}; (112), (112))$  について,  $h(1) = h(2)$  だが (5) を満たさないので  $c_{2,0} = 0$ ．同様に  $c_{3,0} = \text{col}_{Q_6^a}(T_{m,n}; (121), (121)) = 0$ ． $c_{4,0} = \text{col}_{Q_6^a}(T_{m,n}; (122), (122))$  について,  $h(1) = h(2)$  だが (2) を満たさないので  $c_{4,0} = 0$ ．

$c_{6,0} = \text{col}_{Q_6^a}(T_{m,n}; (155), (155))$  は  $m \in 3\mathbb{Z}$  のときのみ (3)(4) を満たし  $c_{6,0} = 1$  となる．

$c_{6,1} = \text{col}_{Q_6^a}(T_{m,n}; (155), (166))$  は  $m \in 3\mathbb{Z}$  のときのみ (3)(5) を満たし  $c_{6,1} = 1$  となる．

$c_{8,0} = \text{col}_{Q_6^a}(T_{m,n}; (153), (153))$  は  $m, n \in 3\mathbb{Z}$  のときのみ (3)(6) を満たし  $c_{8,0} = 1$  となる．

$c_{8,1} = \text{col}_{Q_6^a}(T_{m,n}; (153), (254))$  は (1)(2)(3) いずれも満たさないので  $c_{8,1} = 0$  となる．

$c_{10,0} = \text{col}_{Q_6^a}(T_{m,n}; (115), (115))$  は  $n \in 3\mathbb{Z}$  のときのみ (1)(6) を満たし  $c_{10,0} = 1$  となる．

$c_{10,1} = \text{col}_{Q_6^a}(T_{m,n}; (115), (225))$  は  $n \in 3\mathbb{Z}$  のときのみ (2)(6) を満たし  $c_{10,1} = 1$  となる．

$c_{12,0} = \text{col}_{Q_6^a}(T_{m,n}; (152), (152))$  は  $m, n \in 3\mathbb{Z}$  のときのみ (3)(6) を満たし  $c_{12,0} = 1$  となる．

$c_{12,1} = \text{col}_{Q_6^a}(T_{m,n}; (152), (261))$  は (1)(2)(3) いずれも満たさないので  $c_{12,1} = 0$  となる．

$c_{14,0} = \text{col}_{Q_6^a}(T_{m,n}; (156), (156))$  は (4)(5)(6) いずれも満たさないので  $c_{14,0} = 0$  となる．

$c_{16,0} = \text{col}_{Q_6^a}(T_{m,n}; (154), (154))$  は  $m, n \in 3\mathbb{Z}$  のときのみ (3)(6) を満たし  $c_{16,0} = 1$  となる．

$c_{18,0} = \text{col}_{Q_6^a}(T_{m,n}; (125), (125))$  は (1)(2)(3) いずれも満たさないので  $c_{18,0} = 0$  となる。  
 $c_{20,0} = \text{col}_{Q_6^a}(T_{m,n}; (151), (151))$  は  $m, n \in 3\mathbb{Z}$  のときのみ (3)(6) を満たし  $c_{20,0} = 1$  となる。

以上をまとめると主張の結果を得る。

## 5.8 例 3.8 の証明

この節では定理 3.7 の結果を図 10 のタングル  $T_{m,n}$  の場合に適用し、サテライト公式に現れる係数を決定する。

例 3.6 の証明において  $c_{i,0} = 0, c_{j,1} = 0$  であるような  $i, j$  に対し、 $\Psi_{\psi_a}(T; x_{0,i}, x_{0,i}) = \Psi_{\psi_a}(T; x_{0,j}, \tilde{x}_{0,j}) = 0$  であることに注意する。

任意の  $m, n \in \mathbb{Z}$  に対し  $\Psi_{\psi_a}(T; x_{0,1}, x_{0,1}) = \Psi_{\psi_a}(T; (111), (111)) = 1$  である。

$m = 3M (M \in \mathbb{Z})$  のとき  $\Psi_{\psi_a}(T; x_{0,6}, x_{0,6}) = \Psi_{\psi_a}(T; (155), (155)) = t^{-M}$ 、および  $\Psi_{\psi_a}(T; x_{0,6}, \tilde{x}_{0,6}) = \Psi_{\psi_a}(T; (155), (166)) = t^{-M}$  である。

$m = 3M, n = 3N (M, N \in \mathbb{Z})$  のとき  $\Psi_{\psi_a}(T; x_{0,8}, x_{0,8}) = \Psi_{\psi_a}(T; (153), (153)) = t^{-M-N}$  である。

$n = 3N (N \in \mathbb{Z})$  のとき  $\Psi_{\psi_a}(T; x_{0,10}, x_{0,10}) = \Psi_{\psi_a}(T; (115), (115)) = t^{-N}$ 、および  $\Psi_{\psi_a}(T; x_{0,10}, \tilde{x}_{0,10}) = \Psi_{\psi_a}(T; (115), (225)) = t^{-N}$  である。

$m = 3M, n = 3N (M, N \in \mathbb{Z})$  のとき  $\Psi_{\psi_a}(T; x_{0,12}, x_{0,12}) = \Psi_{\psi_a}(T; (152), (152)) = t^{-M-N}$  である。

$m = 3M, n = 3N (M, N \in \mathbb{Z})$  のとき  $\Psi_{\psi_a}(T; x_{0,16}, x_{0,16}) = \Psi_{\psi_a}(T; (154), (154)) = t^{-M-N}$  である。

$m = 3M, n = 3N (M, N \in \mathbb{Z})$  のとき  $\Psi_{\psi_a}(T; x_{0,20}, x_{0,20}) = \Psi_{\psi_a}(T; (151), (151)) = t^{-M-N}$  である。

これらをまとめると主張を得る。

## A $Q_6^a$ の三重化

この節では八面体カンドル  $Q_6^a$  に対し  $(Q_6^a)^{(3)}$  の連結成分を計算した結果を与える．また  $(Q_6^a)^{(3)}$  の連結成分に現れる位数 12 の連結カンドル  $Q_{12}^a, Q_{12}^b$  がそれぞれ  $Q_6^a, Q_6^b$  の中心拡大であることを示す．

八面体カンドル  $Q_6^a = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  に対する  $(Q_6^a)^{(3)}$  に含まれる連結成分（内部自己同型群の作用による軌道）を計算機を用いて決定した．

簡単のため  $(a, b, c) \in (Q_6^a)^{(3)}$  を  $(abc)$  のように略記する．

$$X_1 = \{(111), (222), (333), (444), (555), (666)\} \cong Q_6^a$$

$$X_2 = \{(221), (112), (443), (334), (665), (556)\} \cong Q_6^a$$

$$X_3 = \{(212), (121), (434), (343), (656), (565)\} \cong Q_6^a$$

$$X_4 = \{(122), (211), (344), (433), (566), (655)\} \cong Q_6^a$$

$$X_5 = \{(133), (144), (244), (233), (355), (366), (466), (455), (511), (522), (622), (611)\} \cong Q_{12}^a$$

$$X_6 = \{(155), (166), (255), (266), (311), (322), (411), (422), (533), (544), (633), (644)\} \cong Q_{12}^a$$

$$X_7 = \{(624), (523), (613), (514), (246), (145), (235), (136), (462), (361), (451), (352)\} \cong Q_{12}^a$$

$$X_8 = \{(326), (425), (416), (315), (542), (641), (632), (531), (164), (263), (254), (153)\} \cong Q_{12}^a$$

$$X_9 = \{(551), (661), (552), (662), (113), (223), (114), (224), (335), (445), (336), (446)\} \cong Q_{12}^a$$

$$X_{10} = \{(331), (441), (442), (332), (553), (663), (664), (554), (115), (225), (226), (116)\} \cong Q_{12}^a$$

$$X_{11} = \{(354), (463), (453), (364), (516), (625), (615), (526), (132), (241), (231), (142)\} \cong Q_{12}^a$$

$$X_{12} = \{(635), (546), (645), (536), (251), (162), (261), (152), (413), (324), (423), (314)\} \cong Q_{12}^a$$

$$X_{13} = \{(134), (143), (243), (234), (365), (356), (456), (465), (521), (512), (612), (621)\} \cong Q_{12}^b$$

$$X_{14} = \{(265), (256), (165), (156), (412), (421), (312), (321), (634), (643), (534), (543)\} \cong Q_{12}^b$$

$$X_{15} = \{(623), (524), (614), (513), (146), (245), (135), (236), (362), (461), (351), (452)\} \cong Q_{12}^b$$

$$X_{16} = \{(415), (316), (325), (426), (532), (631), (642), (541), (154), (253), (264), (163)\} \cong Q_{12}^b$$

$$X_{17} = \{(651), (561), (652), (562), (123), (213), (124), (214), (345), (435), (346), (436)\} \cong Q_{12}^b$$

$$X_{18} = \{(342), (432), (431), (341), (654), (564), (563), (653), (216), (126), (125), (215)\} \cong Q_{12}^b$$

$$X_{19} = \{(464), (353), (363), (454), (515), (626), (616), (525), (131), (242), (232), (141)\} \cong Q_{12}^b$$

$$X_{20} = \{(646), (535), (636), (545), (151), (262), (161), (252), (313), (424), (323), (414)\} \cong Q_{12}^b$$

$$X_5 = \{(133), (144), (244), (233), (355), (366), (466), (455), (511), (522), (622), (611)\} = Q_{12}^a$$

の元をこの順に 1, 2, 3,  $\dots$ , 12 とする．カンドル演算は表 3 のようになる．また

$$X_{13} = \{(134), (143), (243), (234), (365), (356), (456), (465), (521), (512), (612), (621)\} = Q_{12}^b$$

の元をこの順に  $1, 2, 3, \dots, 12$  とする. カンドル演算は表 4 のようになる.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	2	2	11	11	9	9	6	6	7	7
2	2	2	1	1	12	12	10	10	5	5	8	8
3	4	4	3	3	10	10	12	12	7	7	6	6
4	3	3	4	4	9	9	11	11	8	8	5	5
5	10	10	11	11	5	5	6	6	3	3	1	1
6	9	9	12	12	6	6	5	5	4	4	2	2
7	11	11	10	10	8	8	7	7	2	2	4	4
8	12	12	9	9	7	7	8	8	1	1	3	3
9	7	7	5	5	2	2	3	3	9	9	10	10
10	8	8	6	6	1	1	4	4	10	10	9	9
11	6	6	8	8	3	3	2	2	12	12	11	11
12	5	5	7	7	4	4	1	1	11	11	12	12

表 3: カンドル  $Q_{12}^a$  の演算

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	2	2	10	10	12	12	6	6	7	7
2	2	2	1	1	9	9	11	11	5	5	8	8
3	4	4	3	3	11	11	9	9	7	7	6	6
4	3	3	4	4	12	12	10	10	8	8	5	5
5	9	9	12	12	5	5	6	6	2	2	4	4
6	10	10	11	11	6	6	5	5	1	1	3	3
7	12	12	9	9	8	8	7	7	3	3	1	1
8	11	11	10	10	7	7	8	8	4	4	2	2
9	5	5	7	7	2	2	3	3	9	9	10	10
10	6	6	8	8	1	1	4	4	10	10	9	9
11	8	8	6	6	3	3	2	2	12	12	11	11
12	7	7	5	5	4	4	1	1	11	11	12	12

表 4: カンドル  $Q_{12}^b$  の演算

カンドル  $Q_{12}^a, Q_{12}^b$  はともに位数 12 の連結カンドルで、忠実ではない。  $Q_{12}^a$  は圭ではないが、  $Q_{12}^b$  は圭である。 よって二つは同型なカンドルではない。

$Q_{12}^a$  から  $Q_6^a$  への全射準同型  $f_a$  が  $f_a(1) = f_a(2) = 1, f_a(3) = f_a(4) = 2, f_a(5) = f_a(6) = 3, f_a(7) = f_a(8) = 4, f_a(9) = f_a(10) = 5, f_a(11) = f_a(12) = 6$  により定まる。 このとき次が成り立つ。



**補題 A.1.**  $Q_{12}^a$  は  $Q_6^a$  の中心拡大である.

**証明.**  $i, j \in Q_6^a$  に対し関数  $\chi_{i,j} : (Q_6^a)^2 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  を

$$\chi_{i,j}(x, y) = \begin{cases} 1 & (x = i \text{ かつ } y = j) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

で定める. このとき  $\phi_a : (Q_6^a)^2 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  を

$$\begin{aligned} \phi_a = & \chi_{1,2} + \chi_{1,5} + \chi_{2,1} + \chi_{2,3} + \chi_{2,4} + \chi_{2,6} + \chi_{3,1} + \chi_{3,4} + \chi_{4,2} + \chi_{4,3} + \chi_{4,5} + \chi_{4,6} \\ & + \chi_{5,3} + \chi_{5,6} + \chi_{6,1} + \chi_{6,2} + \chi_{6,4} + \chi_{6,5} \end{aligned}$$

と定めると,  $\phi_a$  はカンドル 2-cocycle である. この  $\phi_a$  により定義される  $Q_6^a$  の中心拡大が  $Q_{12}^a$  と同型であることは表 3 より分かる.  $\square$

$Q_{12}^b$  から  $Q_6^b$  への全射準同型  $f_b$  が  $f_b(1) = f_b(2) = 1, f_b(3) = f_b(4) = 2, f_b(5) = f_b(6) = 3, f_b(7) = f_b(8) = 4, f_b(9) = f_b(10) = 5, f_b(11) = f_b(12) = 6$  により定まる. このとき次が成り立つ.

**補題 A.2.**  $Q_{12}^b$  は  $Q_6^b$  の中心拡大である.

**証明.**  $i, j \in Q_6^b$  に対し関数  $\chi_{i,j} : (Q_6^b)^2 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  を

$$\chi_{i,j}(x, y) = \begin{cases} 1 & (x = i \text{ かつ } y = j) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

で定める. このとき  $\phi_b : (Q_6^b)^2 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  を

$$\begin{aligned} \phi_b = & \chi_{1,2} + \chi_{1,3} + \chi_{1,4} + \chi_{1,5} + \chi_{2,1} + \chi_{2,6} + \chi_{3,2} + \chi_{3,4} + \chi_{3,5} + \chi_{3,6} + \chi_{4,1} + \chi_{4,3} \\ & + \chi_{5,3} + \chi_{5,6} + \chi_{6,1} + \chi_{6,2} + \chi_{6,4} + \chi_{6,5} \end{aligned}$$

と定めると,  $\phi_b$  はカンドル 2-cocycle である. この  $\phi_b$  により定義される  $Q_6^b$  の中心拡大が  $Q_{12}^b$  と同型であることは表 4 より分かる.  $\square$

$X_1, X_2, X_3, X_4$  は全て  $Q_6^a$  と同型なカンドルであり, 同型写像  $H_i : Q_6^a \rightarrow X_i$  は上記の集合の元の並び順に  $1, 2, \dots, 6$  を対応させると得られる.

$X_5, \dots, X_{12}$  は全て  $Q_{12}^a$  と同型なカンドルであり, 同型写像  $F_i : Q_{12}^a \rightarrow X_i$  は上記の集合の元の並び順に  $1, 2, \dots, 12$  を対応させると得られる.

$X_{13}, \dots, X_{20}$  は全て  $Q_{12}^b$  と同型なカンドルであり, 同型写像  $G_i : Q_{12}^b \rightarrow X_i$  は上記の集合の元の並び順に  $1, 2, \dots, 12$  を対応させると得られる.

**補題 A.3.**  $Q_{12}^b$  は共役カンドルである.

証明.  $GL_2(\mathbb{F}_3)$  を有限体  $\mathbb{F}_3$  係数の一般線形群とする. このとき共役類

$$C = \left\{ \pm \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{\pm 1}, \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{\pm 1}, \pm \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{\pm 1}, \pm \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{\pm 1}, \pm \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{\pm 1}, \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{\pm 1} \right\}$$

(複合同順) を共役カンドルとみなす. 写像  $f: Q_{12}^b \rightarrow C$  を

$$\begin{aligned} f(1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, f(2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, f(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, f(4) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ f(5) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, f(6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, f(7) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, f(8) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ f(9) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, f(10) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, f(11) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, f(12) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

で定めると, これは同型写像である. 従って  $Q_{12}^b$  は  $C$  と同型な共役カンドルである.  $\square$

## B 望月 3-コサイクルの引き戻し

この節では八面体カンドル  $Q_6^a$  のカンドル 3-コサイクル  $\psi_a$  より得られる  $(Q_6^a)^{(3)}$  のシャドーカンドル 2-コサイクル  $\psi_a^{(3)}$  について,  $(Q_6^a)^{(3)}$  の各連結成分に制限して得られるコサイクルのコホモロジー類を求める.

各  $X_i (1 \leq i \leq 4)$  に対し  $Q_6^a$  には  $X_i$ -集合の構造が  $x \triangleleft (y_1, y_2, y_3) = x^{y_1 \bar{y}_2 y_3}$  により定まる. 同型  $H_i: Q_6^a \cong X_i$  により  $Q_6^a$  に誘導される  $Q_6^a$ -集合の構造はどの  $i$  に対しても  $Q_6^a$  における演算  $*$  に等しい.

各  $X_i (5 \leq i \leq 12)$  に対し  $Q_6^a$  は  $X_i$ -集合になる. 同型  $F_i: Q_{12}^a \cong X_i$  により  $Q_6^a$  に誘導される  $Q_{12}^a$ -集合構造は全て表 5 で与えられるものに等しい.

各  $X_i (13 \leq i \leq 20)$  に対し  $Q_6^a$  は  $X_i$ -集合になる. 同型  $G_i: Q_{12}^b \cong X_i$  により  $Q_6^a$  に誘導される  $Q_{12}^b$ -集合構造は全て表 6 で与えられるものに等しい.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	6	6	5	5	3	3	4	4
2	2	2	2	2	5	5	6	6	4	4	3	3
3	5	5	6	6	3	3	3	3	2	2	1	1
4	6	6	5	5	4	4	4	4	1	1	2	2
5	4	4	3	3	1	1	2	2	5	5	5	5
6	3	3	4	4	2	2	1	1	6	6	6	6

表 5:  $Q_{12}^a$ -集合  $Q_6^a$  の演算

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	2	2	2	6	6	5	5	4	4	3	3
2	1	1	1	1	5	5	6	6	3	3	4	4
3	6	6	5	5	4	4	4	4	2	2	1	1
4	5	5	6	6	3	3	3	3	1	1	2	2
5	4	4	3	3	2	2	1	1	6	6	6	6
6	3	3	4	4	1	1	2	2	5	5	5	5

表 6:  $Q_{12}^b$ -集合  $Q_6^a$  の演算

$J_a : Q_{12}^a \rightarrow R_3$  を  $J_a(1) = J_a(2) = J_a(3) = J_a(4) = 0, J_a(5) = J_a(6) = J_a(7) = J_a(8) = 1, J_a(9) = J_a(10) = J_a(11) = J_a(12) = 2$  と定める.  $J_a$  は全射準同型であり,  $j_a : Q_6^a \rightarrow R_3$  の誘導する全射  $j_{a,i} : X_i \rightarrow O_{k,l} (\exists k, l \in R_3)$  に対し  $j_{a,i} \circ F_i = h_{k,l} \circ J_a$  が成り立つ.

$J_b : Q_{12}^b \rightarrow R_3$  を  $J_b(1) = J_b(2) = J_b(3) = J_b(4) = 0, J_b(5) = J_b(6) = J_b(7) = J_b(8) = 1, J_b(9) = J_b(10) = J_b(11) = J_b(12) = 2$  と定める.  $J_b$  は全射準同型であり,  $j_b : Q_6^b \rightarrow R_3$  の誘導する全射  $j_{b,i} : X_i \rightarrow O_{k,l}$  に対し  $j_{b,i} \circ G_i = h_{k,l} \circ J_b$  が成り立つ.

望月 3-コサイクル  $\psi : R_3^3 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  の  $j_a : Q_6^a \rightarrow R_3$  による引き戻し  $\psi_a : (Q_6^a)^3 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  はカンドル 3-コサイクルである. 一方で各  $X_i (1 \leq i \leq 4)$  に対し  $H_i^* \psi_a^{(3)} = \psi_a^{(3)} \circ (\text{id} \times H_i \times H_i) : (Q_6^a)^3 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  は  $Q_6^a$  の三重化から得られるシャドーカンドル 2-コサイクルである.

**補題 B.1.**  $H_i^* \psi_a^{(3)} (1 \leq i \leq 4)$  は  $\psi_a$  と等しい.

**証明.**  $j_a$  はカンドル準同型より  $\psi_a^{(3)} = \psi^{(3)} \circ (j_a \times j_a \times j_a)$  が成り立つ. これより

$$\psi_a^{(3)} \circ (\text{id} \times H_i \times H_i) = \psi^{(3)} \circ (j_a \times (j_a \circ H_i)^{\times 2}) = \psi^{(3)} \circ (j_a \times (h_{k,l} \circ j_a)^{\times 2}) = \hat{\psi}_{k,l} \circ (j_a)^{\times 3}$$

と変形できる. ただし  $j_a : Q_6^a \rightarrow R_3$  の誘導する全射  $j_{a,i} : X_i \rightarrow O_{0,0}$  に対し  $j_{a,i} \circ H_i = h_{0,0} \circ j_a$  が成り立つことを用いた. ここで系 4.15 より  $\hat{\psi}_{0,0} = \psi$  であるので  $H_i^* \psi_a^{(3)} = \psi_a$  が成り立つ.  $\square$

望月 3-コサイクル  $\psi : R_3^3 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  に対し  $\psi_{12,a} : Q_6^a \times (Q_{12}^a)^2 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  を  $\psi_{12,a} = \psi \circ (j_a \times J_a \times J_a)$  と定める.  $j_a, J_a$  はカンドル準同型より  $\psi_{12,a}$  はシャドーカンドル 2-コサイクルとなる. 一方で各  $X_i (5 \leq i \leq 12)$  に対し  $F_i^* \psi_a^{(3)} = \psi_a^{(3)} \circ (\text{id} \times F_i \times F_i) : Q_6^a \times (Q_{12}^a)^2 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  は  $Q_6^a$  の三重化から得られるシャドーカンドル 2-コサイクルである.

**補題 B.2.**  $F_i^* \psi_a^{(3)} (5 \leq i \leq 12)$  は  $\psi_{12,a}$  とコホモロガス.

**証明.**  $j_a$  はカンドル準同型, また  $j_{a,i} \circ F_i = h_{k,l} \circ J_a$  より

$$\psi_a^{(3)} \circ (\text{id} \times F_i \times F_i) = \psi^{(3)} \circ (j_a \times (j_a \circ F_i)^{\times 2}) = \psi^{(3)} \circ (j_a \times (h_{k,l} \circ J_a)^{\times 2}) = \hat{\psi}_{k,l} \circ (j_a \times (J_a)^{\times 2})$$

と変形できる. ここで系 4.15 より  $\hat{\psi}_{k,l} + \xi_{k,l} = \psi$  となるラック 3-コバンドリ  $\xi_{k,l}$  が存在し,

$\Xi_{k,l} = \xi_{k,l} \circ (j_a \times (J_a)^2)$  はシャドーラック 2-コバンドリである。よって  $F_i^* \psi_a^{(3)} + \Xi_{k,l} = \psi_{12,a}$  と表されるので  $F_i^* \psi_a^{(3)}$  は  $\psi_{12,a}$  とコホモロガスである。  $\square$

望月 3-コサイクル  $\psi : R_3^3 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  に対し  $\psi_{12,b} : Q_6^a \times (Q_{12}^b)^2 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  を  $\psi_{12,b} = \psi \circ (j_a \times J_b \times J_b)$  と定める。  $j_a, J_b$  はカンドル準同型より  $\psi_{12,b}$  はシャドーカンドル 2-コサイクルとなる。一方で各  $X_i (13 \leq i \leq 20)$  に対し  $G_i^* \psi_a^{(3)} = \psi_a^{(3)} \circ (\text{id} \times G_i \times G_i) : Q_6^a \times (Q_{12}^b)^2 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  は  $Q_6^a$  の三重化から得られるシャドーカンドル 2-コサイクルである。

**補題 B.3.**  $G_i^* \psi_a^{(3)} (13 \leq i \leq 20)$  は  $\psi_{12,b}$  とコホモロガス。

**証明.**  $j_a$  はカンドル準同型, また  $j_{a,i} \circ G_i = h_{k,l} \circ J_b$  より

$$\psi_a^{(3)} \circ (\text{id} \times G_i \times G_i) = \psi^{(3)} \circ (j_a \times (j_a \circ G_i)^{\times 2}) = \psi^{(3)} \circ (j_a \times (h_{k,l} \circ J_b)^{\times 2}) = \hat{\psi}_{k,l} \circ (j_a \times (J_b)^{\times 2})$$

と変形できる。ここで系 4.15 より  $\hat{\psi}_{k,l} + \xi_{k,l} = \psi$  となるラック 3-コバンドリ  $\xi_{k,l}$  が存在し,  $\Xi_{k,l} = \xi_{k,l} \circ (j_a \times (J_b)^2)$  はシャドーラック 2-コバンドリである。よって  $G_i^* \psi_a^{(3)} + \Xi_{k,l} = \psi_{12,b}$  と表されるので  $G_i^* \psi_a^{(3)}$  は  $\psi_{12,b}$  とコホモロガスである。  $\square$

望月 3-コサイクル  $\psi : R_3^3 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  に対し  $\psi_{12}^a : Q_{12}^a \times Q_{12}^a \times Q_{12}^a \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  を  $\psi_{12}^a = \psi \circ (J_a \times J_a \times J_a)$  と定める。これはカンドル 3-コサイクルである。同様に  $\psi_{12}^b : Q_{12}^b \times Q_{12}^b \times Q_{12}^b \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  を  $\psi_{12}^b = \psi \circ (J_b \times J_b \times J_b)$  と定めると, これはカンドル 3-コサイクルである。このとき次が成り立つ。

**補題 B.4.**  $\check{D}$  を 1-タングルの図式とする。

(1) 任意の  $\mathcal{C} \in \text{Col}_{Q_{12}^a}(\check{D}), r \in Q_{12}^a, r' \in Q_6^a$  に対し

$$W_{\psi_{12}^a}(\check{D}, \mathcal{C}; r) = W_{\psi_{12,a}}(\check{D}, \mathcal{C}; r')$$

が成り立つ。

(2) 任意の  $\mathcal{C} \in \text{Col}_{Q_{12}^b}(\check{D}), r \in Q_{12}^b, r' \in Q_6^a$  に対し

$$W_{\psi_{12}^b}(\check{D}, \mathcal{C}; r) = W_{\psi_{12,b}}(\check{D}, \mathcal{C}; r')$$

が成り立つ。

**証明.** (1) 表 5 より, 全射  $j_a : Q_6^a \rightarrow R_3, J_a : Q_{12}^a \rightarrow R_3$  の組  $(j_a, J_a)$  は  $(Q_{12}^a, R_3)$ -集合射である。よって任意の  $\mathcal{C} \in \text{Col}_{Q_{12}^a}(\check{D}), r' \in Q_6^a$  に対し

$$W_{\psi_{12,a}}(\check{D}, \mathcal{C}; r') = W_{\psi}(\check{D}, J_a(\mathcal{C}); j_a(r'))$$

が成り立つ。一方で  $J_a$  はカンドル準同型より任意の  $r \in Q_{12}^a$  に対し

$$W_{\psi_{12}^a}(\check{D}, \mathcal{C}; r) = W_{\psi}(\check{D}, J_a(\mathcal{C}); J_a(r))$$

が成り立つ.  $J_a(\mathcal{C})$  は  $\check{D}$  の閉包  $D$  の  $R_3$  彩色とみなせるので, 二つの等式の右辺はいずれも外部領域の色によらない. よって右辺の値が等しいので,  $W_{\psi_{12,a}}(\check{D}, \mathcal{C}; r') = W_{\psi_{12}^a}(\check{D}, \mathcal{C}; r)$  が成り立つ.

(2) 表 6 より, 全射  $j_a: Q_6^a \rightarrow R_3, J_b: Q_{12}^b \rightarrow R_3$  の組  $(j_a, J_b)$  は  $(Q_{12}^b, R_3)$ -集合射である. よって任意の  $\mathcal{C} \in \text{Col}_{Q_{12}^b}(\check{D}), r' \in Q_6^a$  に対し

$$W_{\psi_{12,b}}(\check{D}, \mathcal{C}; r') = W_{\psi}(\check{D}, J_b(\mathcal{C}); j_a(r'))$$

が成り立つ. 一方で  $J_b$  はカンドル準同型より任意の  $r \in Q_{12}^b$  に対し

$$W_{\psi_{12}^b}(\check{D}, \mathcal{C}; r) = W_{\psi}(\check{D}, J_b(\mathcal{C}); J_b(r))$$

が成り立つ.  $J_b(\mathcal{C})$  は  $\check{D}$  の閉包  $D$  の  $R_3$  彩色とみなせるので, 二つの等式の右辺はいずれも外部領域の色によらない. よって右辺の値が等しいので,  $W_{\psi_{12,b}}(\check{D}, \mathcal{C}; r') = W_{\psi_{12}^b}(\check{D}, \mathcal{C}; r)$  が成り立つ.  $\square$

補題 B.4 より, シャドーコサイクル不変量の計算においてシャドーカンドル 2-コサイクル  $\psi_{12,a}, \psi_{12,b}$  の代わりにそれぞれカンドル 3-コサイクル  $\psi_{12}^a, \psi_{12}^b$  を用いてよい.

## 参考文献

- [1] J.S.Carter, M.Elhamdadi, M.A.Nikiforou, M.Saito, *Extensions of Quandles and Cocycle Knot Invariants*, J. Knot Theory Ramifications **12** (2003) No.6, 725-738.
- [2] J.S.Carter, D.Jelsovsky, S.Kamada, L.Langford, M.Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 3947-3989.
- [3] J.S.Carter, S.Kamada, M.Saito, *Geometric interpretations of quandle homology*, J. Knot Theory Ramifications **10** (2001) No.3, 345-386.
- [4] W.E.Clark, M.Elhamdadi, X.Hou, M.Saito, T.Yeatman, *Connected quandles associated with pointed abelian groups*, Pacific J. Math. **264** (2013) No.1, 31-60.
- [5] M.Eisermann, *Homological characterization of the unknot*, J. Pure Appl. Algebra **177** (2003) 131-157.
- [6] K.Ishikawa, *Cabling formulae of quandle cocycle invariants for surface knots*, Master thesis, Kyoto University, January, 2016.
- [7] D.Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982) 37-65.
- [8] S.Kamada, *Surface-Knots in 4-Space : an Introduction*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Nature Singapore Pte Ltd. (2017)
- [9] S.V.Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Mat. Sb. (N.S.), **119(161)** (1982) No.1(9) 78-88.

- [10] T.Mochizuki, *Some calculations of cohomology groups of finite Alexander quandles*, J. Pure Appl. Algebra **179** (2003) 287-330.
- [11] 成瀬透, ”曲面結び目のカンドルコサイクル不変量の多重化公式”, 修士論文, 京都大学数理解析研究所, 2015年1月. <http://hdl.handle.net/2433/194277>
- [12] S.Satoh. *A note on the shadow cocycle invariant of a knot with a base point*, J. Knot Theory Ramifications **16** (2007) No.7, 959-967.