

哲學研究

第十三號

第二卷
第四冊

數理の認識

田邊 元

一

今日數學を以て數の學なりとする能はざることは少しく數學の現狀に就いて知る者の直ちに認める所であらう。假令吾人の經驗の形式としての空間を對象とする幾何學と、其中に於ける運動を論ずる力學を應用數學として純粹數學の範圍より除くも、純粹數學の中に數を對象とせざる部門の存することは數學を以て數の學なりとすることを許さない。ポアンカレが主張する如く一般に幾何學を以て剛體の運動の「群」の研究として考へるならば幾何學の基礎となるのみならず、又代數や整數論に於ても重要な研究の基礎となる群論(Gruppentheorie)及び今日の嚴密なる一般數

論、解析の基礎たると同時に、純粹空間を點集合として考へるとき幾何學の基礎ともなるべき集合論 (Mengenlehre) の兩部門が本來全く數と關係無き概念を對象とするとは明である。數學者の定義に従へば「群」とは其中の任意の二つの結合の結果が、其中に含まれ、又如何なる一つの逆も必ず其中に含まるゝ如き operation の集まりをいふのであつて、集合とは任意の思惟對象の綜合に外ならない。此等の概念が數の概念と全く獨立なる、一層根本的普遍的のものなることは言を俟たぬ。而してクーテユラーのいふ如く (Courant, Les Principes de Mathématiques, Deutsch von Siegel, S. 2) 今日殆ど全數學の基礎と認められる此二部門が數の概念と獨立なる概念を對象とするものであるとすれば、數學を數の學とすることの當らざるは勿論、數學の中心が數の研究にあるとさへいふことが出来ないやうに思はれる。従つて數學の哲學的基礎研究が數理の哲學に盡きると考へるのは、數學の現狀に通ぜざる獨斷の見といはなければならぬ。殊に集合の概念が思惟の一般的對象 etwas たる Ding の綜合に由つて成立する以上、自同、矛盾の兩原則に依る論理的思惟以上の根據を豫想せざるものであるとしても、群の概念が如何にして吾人思惟の對象として成立するか其が如何なる根據に由つて可能なるかは更に深き特別の考究を要するものなることは否定出來

ない。併しながら翻つて考へると、群論の研究に數を必要とし、少くとも其完全なる發展が數理に由つて初めて可能なること、又假令之を以て幾何學の基礎を建設する場合にも、解析に由つて初めてそれが可能なることは事實である。其故群論も數理の範圍に於て其精華を發揮するものといはなければならぬ。若し夫れ集合論に至つては假令其概念が論理的思惟の立場に於て理解せられるとしても、それが超限數の計算に窮極し、其眞面目の發露せられるのが解析に於てなることは争ふべからざる事實である。集合論は數理を離れては到底其豊富なる内容を開展することは出來ない。唯數學の諸部門中純粹幾何學のみは全く數と量とを離れて建設せられるけれども、若し吾人が其對象たる空間を一般に唯點集合の多次元體系と考へ、而して全然數と量との概念を排するならば、此學の内容は非常に貧少となるを免れず、多くの所謂幾何學的性質なるものが空間の數量的性質として其中に含まれなくなるのは事實である。於此吾人は再び數學の本體を以て數理となし、數を數學の最も重要な基礎概念と主張するに正當の根據を得ることとなる。固より舊時代の人の如く數と量との別を明にせず、數學を以て量の學とすることが今日の嚴密なる數學の立脚地に反するのは明であるが、量にあらずして數を數學の中心的對象とすること

は依然として正當であらう。フォッサも「純粹數學は數の學なり」と規定した(Voss, Das Wesen der Mathematik. S. 29)。斯くて數理の哲學は即ち數學の哲學的基礎を明にするに最も重要な意義を有するものとなること疑が無い。群論や純粹幾何學の基礎研究と雖も其意義の深さと廣さとに於て之に比肩することは出来ぬ。數理の哲學は斯くして依然數學の哲學の本體となり、知識哲學中に獨特の位置を占めるものなる。

然らば數理の哲學とは如何なるものであらうか。數理の哲學といふのは精しくいへば數理認識の哲學的研究である。それでは數理の認識を哲學的に研究するといふのは如何なることであらうか。自然科學者として曠世の偉人であつたヘルムホルツや、數學者として一代に尊重せられたクロネッカーの如き人の影響によつて、今日の數學者中には數概念が人間に發達する過程や算へるといふ作用の心理的記述を以て數理の哲學と見做す人も少くないやうである。小兒や未開人の間に如何にして數の概念が發生するか、物の數を實際に知る爲めの算へるといふ作用は如何なる事情に促され、如何なる條件の下に發達するかを考へるに、類似の經驗の反覆が吾人に之を記憶して數なる記號により其順序を示す興味を起させる。算へるとは此

記號の貯蓄を算ふべき物に配當して其最後の記號により其等の物の數を示すことである。數は畢竟經驗により吾人の心に生じた名稱記號であつて、數學は此等の數の關係を論ずる學であるといふのが略此等の人の一致する思想である。其說の特色を表はすには數學的經驗論、數學的唯名論の名がある。今此等の說が實際吾人の精神に數の概念の發生する過程と、之によつて物を算へる作用との正確なる記述をなす限り、それは心理的研究として價值があることを認めなければならぬ。併しながら發生心理學の研究は哲學の範圍に屬するものではない。哲學は經驗的事實の記述や説明を事とするものでなくして、斯かる事實の可能なる所以を明にし、其科學的認識の眞理性を保證する根據を求め、それを目的とするものである。即ち其關する所は事實問題でなくして權利問題、價值問題である。其故數概念の心理的發生や其實際の適用の心理的過程を記述することは哲學の業に屬するものでなくして、眞理を標榜する數學の基礎概念としての數や、其關係を規定する原理が如何なる根據によつて成立し、如何にして夫が數學の認識の眞理性を保證するかを明かにするに至つて、初めて哲學的研究の名を與へるとが出来るのである。前述の論者は此哲學の特色をなす權利問題を觀過して唯事實問題に止まるものである。否事實問題

と權利問題とを混同して、事實問題の立場から權利問題に對して發言を試みやうとするのを常とする。斯くて彼等は常に數學の基礎概念と原理とが先づ經驗に於て實際に適用せられ、後に抽象によりて吾人に獨立の對象として思惟せらるゝに至るのみならず、其概念、原理の客觀的效驗性も亦經驗によつて保證せられるものなることを主張せんとする。ヘルムホルツが一般數論の公理が經驗を根據とするものなることを力説する如きこれである。(Helmholtz, Zählen und Messen. Philosophische Aufsätze Ed. Zeller zu seinem 50 jährig. Doktorjubiläum gewidmet. S. 17)斯かる立脚地に立ちて數學が經驗よりの歸納に基きて成立することを詳論したのは哲學者ミルであつて、それが恐らく數學的經驗論の代表と目すべきものであらう。而して其説の根據となるのは數學の基礎的概念、原理の心理的發生が經驗を豫想するといふことに外ならない。併しながら斯様に事實的發生から權利的根據を論斷するの不當なることは豫め明であると思ふ。ミルは一方に於て數學的經驗論者の多くが其立脚地から數學の命題の絶對的確實性を救ふ爲め常に採る所の、數を吾人の隨意所産たる記號名稱とし、其原理を規約的の言語の用法なりとする數學的唯名論を斥け、他方に於て數理が經驗事實から概括せられた歸納命題なることを明白に主張した。數は必ず何物かの數

てなければならぬ。Numbers in the abstractなるものはない。唯數は如何なる物の數でもよい、吾人の經驗に知られるあらゆる物の數であり得る。其に由つて數理の命題は凡てのものに妥當となるのである。併し吾人は數理の命題を取扱ふに際し、唯之を mere signs に關するものとして、*not* things に關するものとしてする (Mill, *System of Logic* §. 167; p. 400) 而して其表はす關係は identity でなくして經驗による綜合の關係である。 $2+1=3$ は二つの石塊と一つの石塊との集合によつて知られ、 $2+1$ の關係を表はす石塊の集合も 3 を表はす集合も同一なる所から、人は此數理の命題を identity の關係を表はすものと考へる傾きがあるけれども、兩者の意味する所は同一對象の相異なる状態である。即ち $2+1$ の expression と e の expression とは同一物を denote するけれども、其 connotation は異なる。其故 $2+1$ が 3 に等しいといふのは同一内容を相異なる言語に表はす verbal proposition ではない。相異なる二つの事實が equality の關係を有すること吾人の早くより常に經驗する所なるによつて歸納せられるのである。斯かる歸納的眞理が數理の基礎である。其保證は evidence of senses に存する (Mill, *Op. cit.* §. 168—169)。假令 $2+1=3$ を 3 の定義と見做すも其命題に依る所の計算は定義より生ぜずして三つの物として知覺せられつゝ、二つの物と一つの物との部分に分ち

得る物の集合の存在から出来るのである。又同一なるものに等しきものは互に相等しいといひ、相等しきものゝ和は等しいといふ如き公理も歸納の結果である。數理も亦他の歸納に基く經驗科學の除外例となるものではない (§ 169)。其根本命題は經驗に基礎を有する綜合判斷であるといふ。

ミルは右の如く數の定義が經驗事實に於て實證せられることを主張するけれども、數學の取扱ふ任意の數を自然の經驗に實證する能はざることとは明である。若し經驗に實證せられるのが基礎的なる小き數のみで、他は之から構成せられるとするならば、斯かる小き數自身も思惟により經驗と獨立に構成せられ得る道理である。カッラーも指摘したやうに (Cassier, Substanzbegriff und Funktionsbegriff, S. 39—40) 經驗的事物の計量から抽象せられた小なる數の關係が、經驗し得ざる任意の數の關係に類似によりて擴張せられるならば、兩者が同一の根本關係に基くこと、即ち數が經驗せられると否とに拘らず本性上一致する所のあることを豫想して居るのである。即ち數の本性は經驗と獨立なるものであつて、其は先驗的なものでなければならぬなる。其上ミルは \aleph_1 なる \aleph の定義を以て石塊の經驗等に基くものとするが、此場合に 1 2 3 といふ如き數の意味する所は經驗から概括せられる類概念ではない。

石塊の \exists と林檎の \exists とは相異なる種 \exists で、兩者から \exists なる類概念を抽象する如きものではない。石塊の \exists も林檎の \exists も凡て同一のである。同一の \exists が種々の事物に適用せられるのである。 \exists 其物は斯かる適用を離れて思惟其物の本性により成立する。若し經驗的事實に據つて成立するものならば、ミル自身が數成立の豫想とした1の相等といふ如きことは到底考へられぬ(Mil. Op. cit. §. 170)。已にミルが數の如何なる事物にも妥當なることを主張する點に數が經驗と獨立に思惟の本性によつて先驗的に成立するものなることを暗に含蓄して居る。經驗の特色は種別的なるに存するのであるから、如何なる對象にも妥當であるといふことは思惟の本性に根據があるのでなくては不可能である。尙ミルは斯かる數の關係を論證する基礎となる所の公理が歸納命題なることを主張するが、其公理として擧げる所の等しさもの、和又は差は相等しといふ如き命題が經驗によつて論證せられるものでなく、却て經驗的事物を算へるに豫想せられるものなることを思へば、其が先驗的の命題なることは容易に知られる。歸納法の根據となる「自然の齊一」が歸納によりて得らるゝものにあらざる如く、ミルが「自然其物と範圍を同じくする」最高階級の自然法であるとする此命題が (§. 169) 實は歸納によりて得られざる、實際計算の豫想なることはミ

ルの經驗論を *ad absurdum führen* する最も重要な點である。經驗的事實なるものはミルの考へる如く思惟に先つて與へられるものでなく、却て思惟の構成する所のものである。之に數理が當嵌まるのは兩者の思惟が根原を同じくするものだからである。而して數理の思惟は抽象的であつて經驗の思惟は其一層具體的なる段階であるとするならば、數理は後者に論理上先んずるのであつて、其眞理根據を後者に求めることは前後を顛倒するものといはなければならぬ。畢竟ミルの説は唯吾人が數を意識し、算へる作用を行ふ場合の心理的事實を記述する心理學の立脚地と、批判の學としての哲學の立脚地とを混同し、前者から數理の認識を *begründen* せんとする不當の試なることは明である。吾人は經驗論の立場から數學の眞理性を確保することは出來ない。數理の命題は *Urteil a posteriori* ではなくして *Urteil a priori* でなければならぬ。

二

數學の認識の效驗性が經驗に俟つ所なき先驗的のものなることはカント以前に於ても唯理論者の一般に認めたる所、否、ロック・ヒュームの如き經驗論者さへ數學の對象

を以て唯觀念の關係にありと考へた爲め其認識の先驗性も疑はなかつたのである。併しながらカント以前の學者は數理の先驗性を認めつゝも、其れが綜合判斷に基くことを明に認めては居らぬ。此點に注意して所謂先驗綜合判斷より成る純粹數學の認識が如何にして可能なるかを批判的研究の對象とし、之を知識哲學の中心問題の一つとしたのはカントが初めである。彼は嘗に數學の認識が先驗的なるのみならず同時にそれが綜合的なることを高調した。ミルは數學の認識が identity の關係に基く分析的のものでなく、綜合的なることを認めたが、其綜合の根據を経験に求めて前述の如き難點に陥つた。カントは先驗的にして而も綜合的なることを數學の命題の特色としたのである。凡て主概念の分析によつて賓概念を導き得る分析判斷が先驗的の確實性を有することは疑無いけれども、此は唯 *Erweiterungsurteil* たるに止まり、眞に吾人の知識を擴張するものでない。眞の *Erweiterungsurteil* は主概念に含まれざる賓概念を之に結合する綜合判斷に限る。數學の命題は斯かる綜合判斷である。併し乍ら經驗による綜合判斷は必然的、普遍的なる數學の命題となることが出來ぬ。數學の命題は先驗的にして而も綜合的である (Kant, Kritik der reinen Vernunft, II. Anh. von 1787. S. 10—16)。斯かる先驗綜合判斷を以て成る純粹數學の可能根據を

明にするがカントの批判哲學の中心問題の一つであつたのである。而してカントは此問題に答へるに時空の純粹直觀が數學の基礎たることを以てした。今數理の基礎についてのみいへば、數が純粹直觀形式時間に依つて量の概念に従ひ純粹想像力が作る所の圖式たるにより、其關係を表はす數理の命題は先驗的にして而も綜合的なることを得るといふのである。

カントが判斷を分析的と綜合的とに分けたことに就いては種々の異論が提出せられて居る。元來心理的に吾人の判斷の成立を考へるならば、其が感覺的直觀に基づく場合にも、又抽象的思想に基づく場合にも、ヴントが、高調する如く常に全體表象があつて、其分析によつて主部や賓部が區別せられて出るのである (Wundt, Logik. I, S. 145 ff.)。其故如何なる判斷と雖も分析を豫想しないものは無いといはなければならぬ。併し論理的には判斷の本質は關係の定立にあるから、シグワルトが主張する如く、分析は準備であつて、判斷の本質は綜合にあるといふことも出来る (Sigwart, Logik I, S. 185 ff.)。思惟の本性が常に分析と綜合との兩面を備ふることを認めるならば、判斷は同時に公析的であつて又綜合的であるといふのが正當な見解であらう。併しながらカントの意味する所の分析綜合の別は斯かる心理的事實や論理的形式に關

するものでなく、認識論上判断成立の根據に關するものであつた。彼が分析といふのは主概念の分析に由り、己に其中に臆氣ながら含蓄せられた要素を取出して賓部とし、其關係を明にする如き判断を指し、之に反し主概念の中に含まれざる賓部を新に結合附加するものを綜合的と稱するのである。即ち判断の基に存する複合表象、思想體系といふ如きもの、分析でなく、主概念の分析が分析判断の特徴をなし、之に屬せざる判断を綜合的とするのである。従つてカントの別はシグワルトが詳説したやうに、個々の直觀的表象に關する判断には適用すべきものでなく、與へられたと假定せられた概念を主部とする判断にのみ適用せられるのである (Sigwart, Op. cit. I. S. 136 ff.)。併しながら此區別は猶一面から見て曖昧なる相對的の意味を有するに止まる如き觀を呈することシユライエルマッヘルの夙に指摘した如くである。カントが綜合判断と見做した所の *Alle Körper sind schwer* も、重量を物體の必然的の屬性と考へる人には分析判断となる。若し人間の知識が進歩するものならば終局に於ては凡ての判断が分析的となることも豫想し得る筈である。一の判断の分析的であるか綜合的であるかは判断者の知識の如何に依る如く思はれる。トレンドレンブが指摘した如く (Trendelenburg, Logische Ueberlegungen II, S. 241) 凡ての判断は其が

初めて作られる時は皆綜合的である。併し一度作られた後は常に分析的に之を再生することが出来る。物體が延長を有するといふ判断も始めて物體の經驗をした時には綜合的であり、物體が重量を有するといふ判断も已に一度之を経験せる者にとつては分析的といはれる。斯様に心理的に其由來を考へれば如何なる判断も分析的たると同時に綜合的なるを得るのであつて、此の區別は相對的なものとなつてしまふ如く思はれる。併しカントの考へたのは判断成立の斯かる心理的由來ではなくして、客觀的認識として判断を可能ならしむる根據にあつたことは疑が無い。主概念の内包に賓概念が含蓄せられることに由つて其判断の根據が興へられるか、或は然らずして他に主賓兩部の綜合を可能ならしむる根據が存するかにより判断は或は分析的となり、或は綜合的となる。其故シグワルトが注意し(Sigwart, Op. cit. I. S. 139) クラティラーがカントの意を精密に察して述べたやうに、此別は主概念の定義が判断の證據を含むか否かに歸するものとなる(Conturat, Op. cit. S. 253 ff.)。カントがカントの此區別を判断の *Entstehung* に關するものでなく、*Verhältnis von Subjekt und Prädikat im fertigen Urteil* に關するものとし、分析的とは P 概念が S 概念に於て *notwendig und allgemein gültig* に *mitdenken* せらるること、解したのも精密にいへば此意味でなければ

ばならぬ。かの *Alle Körper sind ausgedehnt* と云ふ分析判断もデカルト以來の形而上學に於て物質の本性を延長に認め、之を其定義としたのに由來するのであつて、決して單なる經驗の陳述ではないと思はれる。此様に分析綜合の別に心理的解釋を排して批判的の意味を認めたクレーテュラーは、眞にカントの本旨を理解するものといはなければならぬ。已に數學者フレイゲも此點を明にして心理問題を數學の批判的研究から區別したのであるが (*Erege, Grundlage der Arithmetik*, S. 4) 此等本來數學の專攻者たる人々が却て哲學者によつて充分重視せられなかつた問題の真相を明かにしたのは、*フーバー*が云ふ如く *viele Philosophen beschämende Einsicht* (*Cohn, Voraussetzungen und Ziele des Erkennens*, S. 175) とはいはなければならぬ。數理の認識を明にするには此區別は決して相對的なものとして閑却する能はざる意味を有するものである。カントは右の如き意味に於て數理の判断が綜合的なことを明にする爲めに、*「7 + 5 = 12*」といふ如き命題を藉りて論證した。若し此命題が 7 と 5 との和といふ概念から矛盾律に依つて導かるゝならば其は分析的であらう。然るによく見ると 7 と 5 との和といふ概念は唯此兩數を一つに *Vereinigen* することしか含まない。此に由つて兩者を *zusammenfassen* する其一つの數が如何なるものなるかは少しも思惟せられない。如

何に斯かる概念を分析しても吾人は12といふ數を得ることがない。之を得るには直觀の助によつて概念を超脱しなければならぬ。即ち其判斷は綜合的でないければならぬといふ (Kant, Kr. d. r. V., S. 15—16)。斯くてカントは *Mathematische Urteile sind insgesamt synthetisch.* と主張するのである (S. 14)。

勿論カントが斯様に數理を以て凡て直觀に基く綜合に由つて生ずる命題から成ると考へたことは、其或ものを一層普遍簡單なる公理から演繹出來るものであるといふことを否定したといふ意味にはならない。彼は數理の體系を方法的に論じたのでないから、如何なるものを數理の公理と認めるかについては何事も言つて居らぬ。吾人は彼が如何なる命題を數理の認識の公理とし、如何なるものを之から論證せられる定理と考へたかに就いて精細に知ることが出來ない。併し彼が數理の命題に論證せらるべきものゝあることを認めたのは疑が無い。彼が數學と哲學との別を論ずるに當り、定義、公理、論證なるものが眞の意味に於ては數學にのみ可能なることを主張し、而して公理と論證とを別にして、前者を *unmittelbarer Beweis* なる先驗綜合判斷とし (S. 760)、後者を *intuitiv* なる *apodiktischer Beweis* (S. 762) として居ることから考へれば、彼も亦數理の命題が極めて少數の公理により證明せらるべきことを信じ

たに相違無い。唯其論證は概念から演繹せられるのでなくして、公理の規定する所に従ひ概念に相當する直觀の構成によるのでなければならぬ。數理の命題が直觀に基くといふことは其が論證出來ないものであるといふことを意味しはしない。定理は必ず公理から證明せらるべきものである。併し其證明の *Evidenz* は概念の内に存するのでなく、常に其に従つて行はれた直觀に於ける綜合に存するのであるといふのがカントの本旨である。彼は「人が數學者の推論が凡て矛盾律に由る爲めに(此は凡ての *apodiktische Gewissheit* の本性上要求せられる所である) *Grundsätze* 其物も矛盾律によつて論證せられると考へたのは誤である。綜合命題が實際矛盾律に由つて認められたることはあるけれども、其は唯他の綜合命題が豫想せられ、其から推論せられるのであつて、其自身で矛盾律により認められるのではない」と云つて居る (Kant, Prolegomena, S. 43; *Schulzische Ausgabe*)。而して彼に據れば結論が綜合判斷として成立し得るのは概念構成の一般條件が妥當なるものとして前提に於て與へられて居るからでなければならぬ (Kr. d. r. V. S. 744)。換言すれば論證的といふことゝ分析的といふことゝは同義ではない。綜合判斷も論證せられる。唯其論證は前提に與へられた概念の分析に據るのでなく、直觀の綜合を指導する原理が前提に與へら

402
れるとに由るのである。其故論證せられる命題と雖も *intuitiv* である。(Prol. S. 58, Kr. d. r. V. S. 762)。公理とは最も普遍的根本的な直觀的構成指導の原理であり、定理は其に由つて成立するといふのがカントの考と思はれる(Kr. d. r. V. S. 760—765)。唯カントが如何なるものを數理の公理と認めたかは曩にも述べたやうに知ることが出来ない。フレーゲの解する如く凡ての *Zahlformel* を公理としながら其數の無限なる爲めに公理と稱するのを躊躇したといふのは疑はし(Frege, Op. cit., S. 6)。成程カントは此が直接確實の *indemonstrabilia* なることを述べては居るけれども、其が單稱命題であつて、論證の基礎となるべき公理の普遍命題なると異なるにより、公理と云はずして *Zahlformel* と稱すべきものなることを主張して居る(Kr. d. r. V. S. 705)。併し公理にせよ定理にせよ兎に角數理の命題は概念の内包に其成立の根據を有するものでなく直觀に基く概念の構成、即ち綜合に其根據を有するといふのがカントの根本主義なることは疑が無い。「數學の認識は概念の構成から生ずる。概念を構成するとは之に對應する先驗的直觀を表現することである」(Kr. d. r. V. S. 741)。斯かる意味に於てカントは數理を先驗綜合判斷より成るものとしたのである。

カントが數理の命題を以て直觀を豫想する綜合命題としたことに對して最も詳細なる異論を提出したのは現代の數學論理派である。其の先驅は即ちライブニッツである。ライブニッツは數學を以て量の學なりとする舊來の思想に反し、一般的なる要素の關係を明にする *Kombinatorik* と考へた。任意の概念や命題を記號に表はし、其等相互の一般的關係を全く形式的に取扱ふのがこれである。數理は其關係の特殊なるものに過ぎない。而して一般の *Kombinatorik* は勿論、數理も最も普遍的なる論理の形式に其根據を有するのである。論理と數學との別は唯普通と特殊との別に過ぎぬのであつて、兩者は畢竟原理上同一の物である。數理の基礎を論理以外に求むる必要は全然無い。數理は唯論理に基く或特殊の關係の演繹である。此處に演繹とは必ずしも傳承的論理學の、部分を全體に包攝する關係に基くものゝみを意味するのではない。此關係以外にも、他の關係がある。斯かる形式的關係に従つて演繹せられて數理の命題は成立する。而も何れも前提は概念の定義と論理の根本原則とからのみ成るのであるから、矛盾律による分析判斷から成立するといふカント

が直觀の綜合に基くとした所の *Zahlformel* もライブニッツは定義と論理法とから證明出来るかと考へた (*Leibniz, Nouveaux Essais*, IV, §. 16)。此がライブニッツの數理に關する思想の大體である。此思想を承けて一方に於てライブニッツの説を發展して精細なる論理の體系を組織し、他方に於て之を近代數學の進歩に適合する如くならしめたのが、現代の數學論理派である。其發達の由來を考へるとクリテュラーが、自ら述べて居るやうに、一方に於ては數學其物の論理的傾向に促され、他方に於ては論理の革新に基いたのである。十九世紀の後半に現れたワイヤストラス、デッキン、カントル等の偉大なる數學者は一方に於て數理の發展、新定理の發見に大なる貢獻をなすと共に、他方に於て數理の基礎を嚴密確固ならしむるに力を盡して、此方面に不朽の偉業を成した。從來直觀に由つて知られると認められた所の數連續を初めとし、數の論理的基礎其擴張の意義等を明にし、直觀的自明の代に論理的嚴密を求め、數學を精緻嚴正なる論理の基礎の上に置かんと欲した。併しながら此等の數學者が其數學者としての天才に導かれて使用した論理は、決してアリストテレスから傳承した包攝作用を中心とする所謂形式論理のみではない。此論理的關係以外に一層數學に對して重要な論理的關係がある。於此之を明にしやうとするのが、反省的なる數學

者の目的となつた。而して此等の論理的關係は曖昧なる言語に依らず、ブール以來記號論理に於て行はれたやうに數學的の記號に依るのが最も適當なことである。斯くて數學的論理學(論理計算)(*Algebra der Logik; Logistik*)なるものがシュローダーの如き人の手に由つて大なる發達を遂げ、終に數學者ペアノは自家の記號論理の上に數理の根本概念、原理を論理的に組織して *For Maires de Mathématiques* (一八九一年以後數年に亘る)の書を著はしたのである。ラッセル之を承けて、更に別に論理の基礎の上に數理を建設せんとせるフレイゲの業を參酌し、又自家の研究に成る *Logic of relations* を加へて *The Principles of Mathematics I* の大著を成した。クローテューラーは殆ど全くラッセルと同じ立場に立ち一層簡單易解なる *Les Principes des Mathématiques* の書を著はした。今此書の附録に載せてある氏の『カントの數學の哲學』なる講演は、此派の思想をカントのそれに對比して知るに最も恰好のものであるから、余は先づ其大體を次に述べやうと思ふ。

純粹數學はラッセルが其書の開卷第一に述べたやうに、 P から Q が結論せられるといふ形式の判断の總體である。其體系の最初の前提となる定義は規約に過ぎないのであつて、果して其自身が經驗世界の事實に相當するか、どうかは措いて問はない。

406
従つて其には眞偽の別は無いのである。數學は唯斯かる前提を假定すれば某々の

結論が得られるといふ形式的の依存關係を組織立てたものである。其故假言的演繹の體系といふべきものであつて、其妥當性は假言的必然性といはれる。其論證には定義以外に一般論理の法則を豫想するのみで、他にカントのいふ如き直觀を豫想することは無い。而して其定義も亦論理の根本概念を豫想するばかりであるから、純粹論理の上に立つものである。斯くして數學は全然論理にのみ基き兩者は殆ど相融通するものとなる。今カントの分析綜合兩判断の別を考へるに、其が心理的の意味を有するものでないことは明であつて、カントの眞意は判断成立の根據に關するものである。其故其意を察して精密に述べるならば、分析判断とは其含む概念の定義と論理の根本原則から演繹せられる如き判断を意味し、綜合判断とは其證明が他の與件を必要とするものを意味するといふべきである。此解釋は已にフレイゲが與へたものであるが、これこそ唯一の正當なる解釋といふべきである。扱此解釋に従つて數理の命題を考へると其は明に根本的の定義から演繹せられるものであるから分析的である。カントは彼の擧げた $7+5=12$ の命題が主概念の分析から演繹せられざる、直觀に基くものであると主張するけれども、其は7と5との和の概念

の定義と12なる概念の定義とから證明出来るのであつて、分析的である。カントは7の表象に於ても5の表象に於ても、又兩者の *Zusammensetzung* の表象に於ても數12を思惟しなると云ふ(Kr. d. r. V. §. 205)而して其7と5との *Zusammensetzung* の表象にも12を含まぬことを立證する爲め、之を *Addition* と區別し12の數を兩者の *Addition* に於て思惟すべきか否かは今の問題ではない。何故なれば分析命題に於てはPをSの表象に於て *Wirklich* に思惟するかどうかのみが問題となるのであるからと云つて居るが、*Wirklich* に主概念を表象することは必然 *Addition* を意味するのであつて、*Zusammensetzung* と *Addition* とを區別する如きは7+5の眞意を知らぬものである。若し7と5との *Zusammensetzung* が12を導かぬならば其 *Zusammensetzung* は7 und 5であつて7+5でない。従つて斯かる意味に *Zusammensetzung* を解するならば之を彼の如く *Summe* と見做すことは出来ない。若し *Summe* といふならば其は *Addition* を意味しなければならぬのであつて、其概念は必然12を含蓄する。吾人は7+5の定義と12の定義とから此命題の成立を證明することが出来るのである。カントの如く此命題の成立を理解する爲めに例へば指を折り、或は點を記すといふ如き直觀に於ける構成を借りる必要は無いらぬ。



前節に述べたクトテュラーのカントの數理認識論に對する批評は一應道理がある。今日の數學は實際カントが證明出來ぬものと考へた $7+5=12$ の Zahlformel を證明するのである。ラッセル、クトテュラー等の掲げる所の數理の根本概念の定義を承認すれば、其から數理の全體が純論理的に演繹出來ることも事實である。其故其意味に於て數學を假言演繹的といふのは正當である。併しながら此派の人が論證の前提と認める數理の根本概念の定義なるものは如何なるものであらうか。個々の數の定義といふのは其數が $1+1=2, 2+1=3, \dots$ の過程に由つて構成せられることを示す命題である。又二つの數の和の定義も同様に二つの數から一定の第三の數を構成する過程の定義である。即數理の根本概念の定義は其概念を構成する方法を陳述するものである。此はカントが數學の定義の形而上學のそれと異なる特色として擧げる所の綜合的定義なるものに外ならぬ (Kr. d. r. V. S. 758ff.)。其故定理が定義から演繹せられるに當つても、其論證は唯與へられた概念の分析に由つて出來るのではなくして、其定義に従つて概念を綜合構成することに由つて出來るのである。其構

成にカントが必要とする所の直觀の如何なるものなるかに就いては更に精しく考へて見なければならぬのであつて、彼の擧げた指を屈し點を記す例などが適當であるかどうかは別の問題であるが、兎に角思惟の綜合の背景構成の媒介者として或意味の直觀を一般に必要とするならば、其説明の適否は兎に角カントが數理の命題を直觀に基く綜合判斷なりとすることはクレーテューラーの批評に由つて直ちに其誤を暴露するといふことは出來ぬと思ふ。演繹的論證的といふことは之を直ちに分析的と同一視することは出來ぬ。若し前提となる定義が所謂綜合的定義であるならば、演繹的にして而も綜合的なる命題がある譯である。カントは「數學的認識は概念の構成に由る理性認識である」といつて居る (Kr. d. r. V. S. 741)。其故彼が凡ての數學の命題は綜合的であるといふのは其が概念の構成に基くといふ意味でなければならぬ。然るにクレーテューラーはカントが爲した定義の分析的綜合的の別を認めながら (Couturat, Op. cit., S. 259—264) 定義は多くの記號の複合に代用せられる一の記號を定める規約で眞偽の別が無い *nominale Definition* であるから、其は畢竟 *ideatischer Satz* に止まり、眞理の源たるものでないと云つて、假令數學の命題が綜合的なる定義により論證せられても、其自身は分析的であつて、綜合的ではないと主張して居る (Couturat, Op. Cit., S.

263°。併しながら今クリテュラーの主張する如く數學の定義が單に規約に止まるかどうかは暫く措くとしても、已に定義が對象構成の方法を規定し之に由りて初めて命題の成立根據が與へられるものとすれば、命題の成立は概念の分析でなく構成即ち綜合に依るといふことは否定出來ない。カントが分析判斷の實例として擧げる所の *Alle Körper sind ausgedehnt.* に於けると同じ意味に於て概念の分析に由り *7+3=11* の命題が成立するといふことは出來ない。其故彙に述べた如くカントの分析判斷、綜合判斷の別をフレীগ、クリテュラーの解釋に従つて定義よりの演繹可能如何に認めるとするならば、其場合の定義の意味を限定して分析的定義と解し、綜合的定義から演繹せられる命題は綜合判斷と解するのが、カントの眞意を得たものと云はなければならぬ。斯くしてクリテュラーがカントに反對して數學の命題を綜合的でなく分析的であると主張するのは未だカントの意を充分理解せざる爲めなること、假令クリテュラーのいふ如く數理の命題が定義から導かれても其は概念の綜合構成を豫想するものなることが分る。數理の命題は假令定義から推論せられるとしても綜合的である。演繹的又は論證的といふこと、分析的といふことは同義ではない。數學の認識は論證的演繹にして而も綜合的であるといはなければならぬ。此場合

演繹的といふことを以てポアンカレが數理的論證の根本原理とする數學的歸納法なるものと相容れないと考へるのは皮相の見である。數學的歸納法は經驗的歸納法と全く異り、已に任意の n から $n+1$ に進む過程を證明することに由つて實は普通命題を前提に掲げ而して其結論は凡ての特殊の場合を盡すのである。(普遍の意味に つきては余の舊稿『哲學研究』第二號所載『普遍に就いて』參照其故假令演繹の語を普通から特殊を導く過程と解しても必ずしも之に矛盾することはない。況んや數學的論證につき演繹といふ時には、此包攝の關係よりも寧ろラッセルの所謂關係計算を主としなければならぬ以上は、決して數學的歸納法と演繹とを矛盾する概念と考へる理由は無いのである。クローテューは數理の認識を以て分析的にして而も擴張的(erweiternd)であると考へるのであるが、其が擴張的たるを得るのは前提となる概念の定義が分析的でなくして、綜合的であり、其前提に由つて概念が構成せられて初めて命題成立の根據を得るに因るのである。即ち綜合的なるが、故に擴張的たるのである。ナトルプの評したやうに分析を以て erweiternd たり得るものとするのは不當の解釋である(Natorp, Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften, S. 19) 此は論證的演繹的といふこと、分析的とを同一視する爲めに起るものであらう。吾人

は數學の命題を以て公理以外は凡て論證的演繹的と認め、而も之を概念の構成に基く綜合的の命題とするのが正當であると信ずる。斯くて吾人は一般に基礎的の概念構成の方法を規定する定義或は公理、根本概念の定義は次に述べる如く實は公理と稱する方が一層適當なのであるの根據を明にすることが、數理認識の本質を知るに最も重要な問題となるのである。

尙右の數學的論理派の人の謂ふ定義の意義を考へて見るに或概念の定義とは其概念の代に代入し得べき已知の概念の結合である。即ち數學の定義は皆命名的定義であつて、判斷として主張せられるものでなく、單に規約の陳述に過ぎないと言ふのである(Conturat. O. c. 5. 38)。扱前述の如く數學の對象が定義に由つて構成せられるものであつて、定義には已知の概念を用ゐるのでなければならぬとするならば、數學の定義を漸次其構成の要素となる單純なる概念に分析し行く時、終には他の數學的觀念を以つて定義し得ざる少數の基本概念に到達しなければならぬ。此等は構成の要素となる單純なる概念であるから、之れを構成的に定義することは出來ぬ筈である。實際ラッセル、グロテュラー等の先驅たる、ペアノは0(零) \mathbb{N} (整數) ω_0 (次に來る)といふ如き概念を以て定義し得べからざるものとし、唯其關係を定める公理(ペアノの所

謂 *proposition primitive*) を擧げるに止まつた。又ペアノに於ては數學的歸納の原理も公理の中に陳述せられて居たのである。然るにラッセル、グーテュラーは之をも其定義の中に含ましめ、斯くて彼等は數理の基礎となるものが全く論理的に定義せられたと主張するのである。此等の試は固より少からぬ困難を含むものであつて、ラッセルが初めて其等の困難に打克ち、兎も角も少數の定義は數理の基礎を纏めた功に對しては尊敬を表さなければならぬ。併しながら其定義なるものは已に彼等自ら認める如く命名的定義であつて、決して概念の内包を明にするものではない。例へば 1 は單一部類の數であるといひ而して數とは *similar classes* の *class* であるといふ如き定義によつて吾人は 1 や數なる概念の内包を知ることが出來ない。已に數の何たるか、の何たるかを知るものゝみが此定義の意味を理解し得るのである。其故實はヒルベルトの云つたやうに、已に此等の論理派の論理の中には數學的原理を含むのであつて (Hilbert, *Die Grundlage der Geometrie*, S. 266) 純論理的要素のみから數理の基礎概念を生成するのでなく、已に其が知られて居るものとして、之を其が具體的に思惟せられる場合を他の語に置換するのみである。其故其定義は決して論理的の概念のみを以て數理の概念の内包を明にするものといふとは出來ない。其定義に由つ

て規定せられる概念の内包は定義と獨立に與へられたものと假定せられて居るのである。其故其立脚地は定義を掲げるといふもの、畢竟定義し得べからざる概念を認めて、唯其關係を規定する公理を陳述するに止まる所の所謂公理主義(Axiomatik)の立脚地に歸するものである。元來公理主義なるものは數學の理論を嚴正に保ち其體系を純潔ならしめんとする要求から、經驗的事實と全く獨立に、數理の基礎として必要にして充分なる、出來得る限り少數の基礎概念の關係を出來得る限り少數の公理に定立し、其經驗的事實に對する關係等を全く措いて問はず、唯之を論證の基礎として假言的演繹の體系を構成せんとするものである。ヘルベルト初めて之を幾何學に試み、後氏及其他の人も之を數理の範圍に試みたが、其精神は已に近代數學の形式的傾向に胚胎するのであつて、ラッセル、グロテュート等の趣意も根本に於ては之に歸するものといはなければならぬ。若しポアンカレの云つて居るやうに(Poincaré, *Wissenschaft und Methode*, S. 118—137)定義は定義せられる對象の存在を假定するものであつて、此が根本的の對象に於ては所謂存在定理として證明せられないものであるとするならば、實は基礎概念の定義は公理と同じことに歸するであらう。斯くて定義は變裝した公理に過ぎなくなる(Poincaré, *W. u. M. S.* 137)。ラッセルの如く數學的歸納

の原理を定義の形に述べてもペアノの如く公理として掲げても認識に對する意義に於ては同一といはなければならぬ。寧ろ數學を一の特殊科學として其立場を純粹ならしめんと欲するならば、ラッセル等の如く強て定義を掲げて其と他の内包的な定義との別を没するよりも、公理を掲げて定義すべからざる若干の基礎概念を認め、其根據の研究を哲學に委ね、純粹の公理主義を標榜する方が優つて居る。哲學は其等の基礎概念を含む公理を數學から受けて、其等が如何なる根據に依りて成立するかを明にする所に其個々の科學の基礎を *begründen* する職分を發見する。(今日の數學に公理といふのは自明の眞理といふ意味ではない。唯他の論證の前提となりつゝ、自らは論證せられざる根本命題をいふに過ぎない。畢竟 Axiom は Postulat に歸する) 數學を以て前提と結論との形式上の關係を論ずる學とし、之を假言的演繹の體系なりとする數學的形式主義の立場から見れば、其公理又は定義が全く經驗的認識に關係無き規約に止まるといふのは必然の主張である。併しながら廣く一般認識の眼から見れば、數理は自然科學の基礎となり、經驗事實の計算に役立つものである。其故哲學の立脚地からは此が如何なる根據によつて可能なるかを明にする爲めに公理の本性を探求する必要がある。而して此所謂應用の問題を離れても、數學者が

公理を思惟し得るのが如何なる根據に依るかは必ず解決しなければならぬ問題である。嘗に其が消極的に矛盾なしといふのみならずして、積極的に其成立の根據を求め、必要がある。此は其等の公理に含まれる數理の基礎概念の論理的生成の過程を明にして初めて解決せられる。固より其が基礎概念たり公理たる以上は吾人は之を他の概念、命題から誘導演繹することは出来ぬ。其は唯如何なる綜合の過程に由つて其等の概念が生成せられ、公理が其過程の何處に根據を有するかを明にする外無い。斯くして數理哲學の問題は數理の基礎概念の綜合生成を明にして、公理の可能根據を此處に發見するに於て結論せられる。此立脚地が即ちカントの流を汲む現代の新カント派の哲學者の探る所のものである。此等の人々は數學的論理も猶實は其が輕視する所の傳承的論理と同じく分析論理の上に立つものであつて、到底數理の基礎を明にする能はざるものなるを認め、カントの立場に立つて基礎概念の構成綜合を明にせんことを試みる。其方法は即ち先驗的方法である。先驗的方法とは「Faktumを豫想して Rechtsgrundを問ふ方法である」(Natorp, Op. cit., S. 12)。然るに Faktum は實は *Fieri* である。In Anfang war die *Tat* なるに由りて初めて *Tatsache* があるのであるから、其 *Tat* を明にすることによつて初めて *Tatsache* の Rechtsgrund が

示される。斯くて先驗的方法は認識の生成的見解となる(Natorp, Op. cit., S. 12)。今此場合の事實は數理の基礎概念と其公理であるから、數理哲學の業は先驗的方法に従つて數理の基礎概念の生成綜合を明にして、公理の根據を探ることに存するといはなければならぬ。

五

數理哲學の問題は數理の基礎概念の先驗論的生成を明にして、其に由り公理の根據を發見するにあるといふのが余の前節に述べた所である。今此問題を一層具體的に分析して考へるならば如何なるものであらうか。今日數理の最も根本的なる基礎概念と認められて居るのは自然數である。假令クロネッカーの所謂數理の *Arithmetisierung* によりて凡ての數理を整數の概念のみにより表はすことがヒルベルトの云ふ如く *Unfruchtbarkeit* に陥り (Hilbert, Op. cit., S. 264, 或はデッキントの考へる如く (Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen, S. X.) 無用の勞を費やすことである爲めに實際に行はれて居ないにせよ、現代數學が自然數を最も基礎的の概念と認め、公理を其基本要素と生成の關係とに就いて掲げることとは疑無き事實である。ペアノの公理

もラッセルの定義も何れも之に關するものである。其故吾人は先づ此最も基礎的な自然數の先驗論理的生成を明にしなければならぬ。之に由りてポアンカレが凡ての數理の論證の基礎であるとした數學的歸納の原理も其根據を示すのである。併しながら雷に自然數の論理的生成、其に關する公理の根據を示しても、それで數理哲學の問題は解決し盡されたといふことは出來ぬ。或は本來自然數に屬せざる零の根據を明にして、之を自然數に加へ、ペアノ、ラッセル等の掲ぐる整數に關する公理(又は定義)を全部先驗論理的に理解し得たとしても未だ吾人は數理哲學の問題を凡て解明したとはいはれない。何故ならば數學者は數の擴張と稱して負數、分數、無理數、虛數を導入し、自然數から整數、有理數、實數、複素數と漸次普遍的なる概念に進むのである。此等の新らしき數の種類は形式的には自然數を以て定義し得るのであつて、數學の立場から見れば正整數の公理さへあれば凡ての數の種類を誘導することが出来るのである。併しながら單に其等の形式的定義のみでは吾人は其本質と根據とを知ることが出來ぬ。宛も數學論理學者の正整數の定義が其本質と根據とを知らしめざる形式的のものに止まり、哲學の立場から其生成を明にしなければならなかつた如く、亦其等の新しき數の定立は哲學の立場から其生成過程を示すことを必要

とする。殊に其等の數の形式的の定義は數學者に由つて單なる規約と認められて居るが、此は其等の數の存在を證明することは出來ぬものであつて、前のポアンカレの言の如く存在の公理を含むものであるから、吾人は哲學の立脚地から其等の數の生成過程と其根據とを明にしなければならぬ。所謂數の擴張が、如何なる根據に依つて可能なるかを明にして初めて吾人は數理の基礎となる概念の本質を完全に知り、其關係を規定する根本原理の根據を認めることが出来るのである。是れ余が嘗て自然數から始めて負數、分數、無理數、虛數の生成を論じ、自然數から整數、有理數、實數、複素數に數の概念が擴張せられる根據を示さんことを試みた所以である(哲學雜誌第三三七、三三八、三四九、三五〇、三五一、三五八、三五九號參照)。而して斯様に數を一次元又は多次元の連續體系を成すものと考へるに至れば、個々の數數値を以て普遍的なる「數」の自己限定と考へるとが出来る。此が變數の概念の基礎であつて、斯の如き變數間の依存關係を表はすものとして函數の概念を得る。今日の數學に於ては變數、函數は個々の數の體系、及其對應關係として定義せられ、個々の數以外何等の新しき要素を必要としない様に見えるけれども、其無限に多くの數を全體として一の體系に統一し、又其依存關係の可能なるを理解する爲には、數の本性から變數、函數の

根據を別に考へる必要がある。唯個々の數として考へられたものを知るのみでは

此等の概念の如何にして可能なるかは明にせられない。自然數から始めて複素數に至る數の成立を明にし、更に變數、函數を可能ならしむる根據を知れば此處に初めて數理の基礎は完全に *begrunder* せられるのである。微分積分の概念の如きも之に由つて其根據を知ることが出来る(近く發表すべき余の變數、函數論參照)。而して此と同時に數が量を測定するに用ゐられ、空間的關係を明にする幾何學の方法を供する根據も明にせられなければならぬ。斯くて數學の立場から唯形式的の意味を有するものとして立てられる所の數理が經驗的事物の計算に適用せられ、純粹數學が自然科學の數學となり得る根據も理解せられる。余が數理哲學の根本問題として解する所はこれだけのことである。

然らば此等の問題の研究の結果から立返つて再び數理の認識の本性一般を考へたならば如何なる結論に達するであらうか。即ち論理と數理との關係數理に於ける直觀と思惟との關係、數理の基にある直觀の本性等は如何に解すべきであらうか。余が未熟ながら今日までに得た研究の結果を概括すれば自然數の生成は思惟が論理の自同、矛盾の兩原理に由つて思惟せられる論理的對象の區別の基に還つて、其背

景に存する直觀の統一を反省的に客觀化するにより可能となるのである。其故論理から數理に移るのには論理の上に直觀的或物が加はらなければならぬけれども、其直觀的或物は決して論理の外から來り加はるのではなくして、論理の基に豫め存する所の統一に外ならない。唯論理の立場に於ては此が潜在的に豫想せられるに止まるのであるが、之を客觀化して對象の規定とすれば數理を得る。其故數理は論理の抽象的なるに對し、之を一段具體化した結果と考へなければならぬ。其意味に於て思惟は論理から數理に發展する。其間の立場の躍進は論理的思惟が其基に還ることに外ならない。更に自然數から整數、有理數に至るには已に前者の生成に潜在的に含まれる關係、1の相對性なるものを客觀化することによつて出來るのであつて、此も抽象から具體に進むことに外ならぬ。其生成の原理は自然數のそれと同一である。然るに實數の連續體系は自然數生成の原理と異り、其原理に由り有理數が生成せられる所の基に豫想せられる直觀の内面的統一が、客觀化せられる結果として生ずるのである。數學者が、實數の定義に用ゐる所の極限要素なるものは即ち此統一を理想的に表はす概念である。此に至つて數の生成は更に一段の具體化を受ける。併しながら實數の體系に於ては直觀の統一が唯個々の部分につき

客觀化せられたのみであつて、未だ其が全體としては客觀化せられない。之を全體として客觀化することは實數の體系を一の内包的全體として考へることであつて、此は必然更に之を要素とする多次元の體系を要求し、其結果複素數が生成せられる。此が數の最も一般的なるものであるが、論理的には數生成の基にある直觀の統一が此に至つて完全に客觀化せられ、最も具體的なる段階が實現せられるのである。此等各段階の所謂數の擴張は決して從來の範圍に新なるものを外から附加するのでなくして、却て其基に豫想せられたものを顯現するのである。即ち初め抽象的の段階に於て存在した制限を除去して、具體的の段階を實現することに外ならない。最も具體的なるものが最も普遍的なのである。數の各段階の發展は畢竟思惟が直觀の基に還ることによつて具體的に進む過程に外ならぬ。其各段階毎に存する思惟の立場の躍進は直觀の原統一によつて可能となるのである。斯くて數は何等所謂經驗に俟つ所なく、唯思惟が其基に豫想する直觀の力によつて發展することにより生成せられることとなる。而して此等實數或は複素數の體系を見れば、小なる値より連續的に大なる値に増し行くものであるから、數は量としての性質を有し、其個々の數は普遍的なる數が特殊の數値に自己を限定する結果と考へられるにより變數

の概念が生じ、而して其限定の理由を求めんとする要求は一の變數の値の推移を、他の變數のそれに對應する値の推移によつて規定する法則に導く。此が函數に外ならない。其故變數函數の概念も已に數の生成の中に潜む直觀的關係の客觀化による具體的見方として理解することが出来る。

嘗に右の如く論理から數理に發展し、又數理の範圍に於て特殊的の數から普遍的の數に進展することが、常に思惟が其基に還りて其豫想となる直觀の統一を客觀化する過程に外ならないばかりでなく、數理から經驗の構成形式としての時空に進むのも亦斯かる客觀化、具體化に外ならないことは、余が前掲の諸稿に於て詳論した所である。數理の基本要素¹が論理的對象の直觀的統一を反省して對象相互が相等の關係を有するといふ一面を客觀化した結果生ずるに對し、更に對象の相等と差別との兩方面を同時に具體的に思惟するときは、時空の要素瞬間又は點を得る。而して時間は一瞬間の豫料的關係であるから、加算に由つて生成せられる實數系列の進行に對應して其客觀的具體的なるものとなり、空間は更に時間的系列を全體として考へた結果として思惟せられる系列の系列として多次元の體系をなし、其要素たる點は同時に並存して相互規定するものであるから、此は數の最も具體的なる體系複素

數に對する客觀的具體的對應者として經驗界の構成形式となる。空間内に於ける位置の變化を時間の推移に依存させて考へたものが運動であつて、此は一の變數の他の變數に對する函數的關係に相當する。凡ての自然現象の基本要素と認められる運動は即ち數理の函數の具體的對應者となるのである。斯様に數理は時空運動の經驗の構成形式を其具體的對應者として有し、思惟は數理から更に之に發展するにより、數理は經驗的認識の基礎となるのであつて、數理の範圍に於ける除法の原理により一の數を單位として他の數を算へることに對し、一の空間的の量(時間も測定せられるには空間的對應者に依る)他の同種の量にて測ることが行はれ、其の結果は數を以て表はされて、經驗事實の測定が可能となるのである。純粹數學が自然科学の數學となり、數が測定に用ゐられることは偶然の一致に基くのでなく、兩者が其の基を一にし、一方は他方の具體化たるによるのである。所謂時空の *transzendente Idealität* が數理を経験的認識の基礎とすることの可能根據であるといはなければならぬ。

六

數學論理學者が數理の基礎となす所の定義は決して單に論理の概念のみから數
 の概念が構成せられることを示すものでなく、却てヒルベルトが評したやうに已に
 數理の根本原理を假定し數の概念の與へられたることを豫想するものである。其
 根據を知るには先驗論理の立場から如何にして此等の概念が綜合的に生成せられ
 るかを考へる外無い。其考究の結果に従へば前節に述べた如く、論理から自然數構
 成の段階に進み、又自然數から漸次普遍的の數の範圍に入る毎に思惟は其本に還り
 て、基に潜在する直觀の統一を客觀化するものでなければならぬ。即ち思惟の躍進は
 常に其基にある直觀に由つて出來るのである。斯様に吾人は思惟の基に直觀を認
 めなければならぬ。併しながら已に力説したやうに直觀は思惟の外から來り加は
 るものでなくして、思惟其物の基にあるのである。思惟の背景、動力、主體が即ち直觀
 である。其故直觀を以て思惟に對し *fund* なる所與とする所の *コーン* が採る如き直
 觀と思惟との二元論は未だ兩者の關係の真相に徹せざる見解であると思ふ (J. Colln,
Op. cit. S. 118)。氏は *Identität* のみを以て思惟の唯一の形式とし、他は *denkformd* なる所
 與に基くものとするが (S. 106)、所謂 *Identität* と雖も直觀の統一が無ければ成立する
 ことは出來ぬものであつて、自同の原理により對象を思惟する基には直觀の統一が

存するのである。其より以上の思惟の形式的發展も其基に豫想せられる直觀の客觀化によつて出来るのである。夫れ故直觀は思惟の基であつて決して denkfreund なるものではない。直觀と思惟とは同一なる體驗を發展的に an sich に見た方向と統一的に für sich に見た方向ともいふべきものであつて互に fremd なる對立要素ではない。論理的思惟は其の基にある直觀的統一を客觀化して數理に進むのである。今日數理の哲學に於て最も進歩せる見地に立ち精緻なる研究を公にして居る所の マールブルヒ派の哲學者は、ロゴス其物の發展を反省すると標榜して思惟に對し與へられたるものとしての直觀を容さないけれども、併し思惟に gegeben でなく aufgegeben せられたものとしての直觀が無ければ思惟は發動の力を得ることは出來ぬ。

此派の人が論理主義の立場から未だ思惟に由つて客觀化せられざるものを凡て「無し」とし思惟は根原の原理により此否定を通して其 Begründung の根據を求むる無窮の過程であるといふ其背景に直觀を豫想することは争ふべからざる事實である。已に同じく論理主義の立場を徹底せんとするカント派の哲學者リッカートの如きは論理から數理に進む爲めに前者に加はるべき直觀的要素を明に logisches Moment と云つて居る (Rickert, Das Eine, die Eins und die Einheit, Logos I. 51)。併し其 logisches Moment な

るものが已に豫め論理の自同律の基に存する直観の統一なることは西田教授の深き考察に由つて明に示されて居る(西田教授、『論理の理解と數理の理解』)。斯くて吾人は數理が直観に基く先驗的綜合により成ることを認めなければならぬ。

然らば其所謂直観とは如何なるものであらうか。此はカントの所謂直観と同一であらうか。カントに従へば數は「悟性の概念としての量の純粹圖式(Schema)であつて」(Kr. d. r. V. S. 182) 量の概念に従ひ其形象(Bild)を形造る想像力の一般的なる所爲に外ならぬ(S. 180)。而して其形象は感性の一般形式たる時間の繼起に従つて綜合せられるのである(S. 182)。5と5ふ數は吾人が想像力によつて時間的に順次に *charig* な1を表はす Bild を一つづゝ五つ綜合する方法の一般の表象として生ずるのである。數理が直観に於ける綜合に基くといふのは純粹直観にして感性の一般形式たる時の順序に従つて、想像力により形象の綜合を行ふことを指すに外ならぬ。其故カントは幾何學が空間直観に基くに對し、數理を時間的直観に基くものと主張したのである。右の説に依つて見れば曩にカントが「 $7+5=12$ 」の Evidenz を求むるに、或は指を屈し或は紙上に黒點を附して直観的綜合を行ふことを必要とすると言つた眞意は、決して外的に指や黒點を知覺する必要を説いたのではなく、想像力に

於ける直觀的形象の綜合を行ふ方法を表寫するに便利なる爲め、實際に之を外的知覺に關係させたのであつて、眞の數の綜合は唯時の繼起の形式に従つて一般的に形象を想像力により構成するに存することが分る。實際彼は個々の直觀的形象たる五つの描かれたる點と、一般的に一の數を想像する圖式との別を述べ、後者が、概念に従つて一の Menge を形象に於て表象する Methode の表象なることを説き、千の如き大なる數が唯此方法に由つてのみ構成せらるゝことを注意した(頁. 179)。斯くてカントが數理の基礎としたのは外界直觀の形式としての空間でなく、一切の内容が意識せられるに必要な形式としての時間の直觀を意味するのである。而してカントは先驗感覺論に於ては時間を空間と共に、吾人が對象によつて感觸せられる仕方に由つて表象を受納する能力(Kr. d. r. V. S. 25) 感性に屬する所の直觀形式、即ち吾人が凡ての感覺を受取るに必然なる形式として、之を單なる受動的のものと解せるに反し、Analytik der Grundsätze に於ては之を内容が意識に統一せられる綜合の形式となし、能動的の意味を有するものとして居る。直觀は實際主觀が客觀から内容を與へられることに由つて生ずるものではない。直觀とは一切の思惟を抽象せる先概念的段階であるから、何等の固定せる概念の對立を有せず、未だ與ふべき主觀も受くべき

客觀も無い、所謂主客未分の流動的狀態でなければならぬ。然しながら流動は孤立せる内容の交代ではない。統一的なるものゝ發展である。未だ活動の主無き純粹活動其物として其は本來統一連續的である。直觀的時間といふのは其活動の内容の内面的關係に外ならない。即ちフッサールの所謂 *eine Erlebnisse mit Erlebnissen verwindende notwendige Form* (Husserl, *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie* Jahrbuch f. Phil. u. phän. Forsch. S. 163) としつゝの *phänomenologische Zeit* である。數理の基となる直觀は斯かる現象學的時間の形式に於て發展する純粹活動の持續的體驗に外ならない。論理的思惟の最根本原理自同律といふのは此直觀の持續的發展の或相を、其發展を通じて内面的に同一性を維持するものとして統一する原理である。純粹活動たる直觀は主客未分の直接態であつてヘーゲルの所謂 *an sich* の段階である。然るに其内面的同一相を統一するといふことは其活動の外に出て之を一層大なる立場から視ることであるから、其は即ち *für sich* に移ることになる。之を反省といへば思惟は凡て本來反省であるといはなければならぬ。此反省の段階に於て統一せられるものは向自となり、統一する側を主觀といふに對して客觀となるのである。客觀的對象として主觀に對立するものとなる論理的對象は凡て自同律により統一

せられる方向に外ならない。其故已に前に述べた如く論理の最根本原理自同律と雖も直觀を豫想するのである。直觀の中に其基を豫想することなしには思惟は發動することが出来ない。而して斯く一の對象を自同的に定立することは直觀の流動の中に於て或同一相を他と區別することを他方に含蓄するから自同律の半面に矛盾律を豫想することとなる。即ち對象 A は必ず「非 A」に對して一者、他者の關係に於て成立するのである。然るに A と「非 A」を對立せしむることは原體驗の統一から見れば *im sich* であつて未だ抽象的なる一面に止まる。具體的の段階は *an und für sich* でなければならぬ。A も「非 A」も直觀の原統一の中に於て共通の根據の上に定立せられたる對象である。之を其對象として同一なること、或は原的同一者の分化と考へるに至つて初めて具體的の真相を得る。而して斯く思惟することは兩者を包含する一層廣い立場を具體化することであつて、此に由り原統一が客觀化せられることとなるのである。此中に於ては A と「非 A」とは對象として同一であり、唯思惟せられる先後、即直觀發展の順序により區別せられるのみで、互に位置を交換し得べきものとなる。此が相等の關係に立つ 1 と 1 とであつて、其綜合が 2 となるのである。斯く考へると論理から數理に移るには新しき直觀的要素が前者に加はるので

なく、前者の基となる直観が客観化せられ前の段階が一層具體化せられて、*in sich* から *an und für sich* の段階に進むに止まるといふことが分る。其に豫想せられる時間の關係といふのは決して自然界の構成形式、範疇としての時間ではない。原體驗の内面的關係としての現象學的時間である。カントに於ては感性的直観と悟性的思惟と峻別せられ前者を單に受動的とし、後者のみを能動的とした爲め、時間の直観の内面的關係としての意味と、自然界の構成形式としての意味とが區別せられず、兩者が混同せられて居るが、今日のカント派の學者は *Rezeptivität* としての感性的思惟と全く離れた直観を排し、時間を以て悟性概念たる範疇の一とするに至つた。併し吾人は他方に於て直觀的形式としての時間をも認めなければならぬ。但し此はカントが先驗感覺論に於て考へる如き受動的なる感性的形式でなくして、已に彼自身が先驗分析論に於て認めたやうに純粹活動たる直觀、體驗の内面的發展の形式である。本より此は思惟の立場から客観化せられない間は思惟に對し「無」であるけれども、而も吾人は却て概念的、範疇的時間の基として主客未分の直觀に於ける内面的關係としての現象學的時間を認めなければならぬ。數理の基となる直觀の本性は略右の如きものなる如く思はれる。併しながら單にこれだけではまだ不十分であつて、數

理全體の基としての直観には猶考へるべき他の方面がある。

論理から数理に入る基となる直観は同時に数理發展の基となる直観に外ならない。不連続的なる自然數から連続的なる實數を通つて終に多次元體系を形造る複素數に到る各段階に於て、思惟は常に其基に豫想せられた直観に還ることに由つて漸次具體的段階に進むのである。新に直観が *denkfreund* なるものとして來り加はるのでなく、豫め其基に含まれた直観の内面的關係が具體的に客觀化せられることが數學者の數概念の擴張と名けるものゝ基となるのである。實數の段階に至つて初めて完全に客觀化せられる連續は已に初から直観の本性に備はつて居たのである。併し此處に疑問となるのは自然數から實數までは時間の内面的關係に於て發展する直観に基くとするも、時間は本來繼起の關係であつて、一次元を本性とする。其故多次元の複素數體系は時間的直観のみを基としては生ずることは出来ないといふことである。カントは明に複素數の如き數の多次元體系を考へて居なかつたのであるが、今日の數學に於ては此は最も普遍的なる數の階級として重要な位置を占めるものである。吾人は其基となる直観の本性を明にして前に述べた一面に補ふ所が無ければならぬ。元來一次元の系列から多次元の體系に進むに要する思惟の

躍進は、一次元の系列を限無く進展するものとして思惟するのではなく、之を全體として思惟するといふことであつた。全體として思惟せられた一次元の系列にして初めて多次元體系の項となることが出来る。其故個々の實數値も單に一次元の實數系列の要素として考へられた場合と、多次元體系の項として實數系列の要素たる場合とは原理上相異なるものでなければならぬ。後の場合に其基となる直觀の本性は果して如何なるものであらうか。今經驗の構成形式としての時間はコイエンの如く Antizipation を特色とし、常に未來を豫料して内容を形成する範疇である。

(Cohen, Die reine Logik, S. 133)。此は限無く項を附加し行く「多」の形式であつて、全體を統一するといふとは其本性上出来ない筈である。其故此範疇時間の基となる直觀的時間も實數の一次元系列の生成に基となることは出来るけれども、複素數の多次元體系は之を基として生ずるとは出来ない。其基となるべき直觀的關係には單に新なるものが發展するばかりでなく、其内容が全體として統一的に含まれて居ることを要する。然るに直觀の本性に遡つて考へると、其は一方に於て發展であると同時に、他方に於て統一である。常に新なる内容が創造せられると同時に舊きものは其中に融入して、ベルグソンの所謂「其中の最も單純なるもの」の中にも精神全體が反

映する如きものである (Bergson, *Essais sur les données immédiates*, p. 75)。即ち創造的發展の半面に全體の統一を備へるものである。其故此點から見れば *Actualization* としての範疇時間は此直觀の發展の一面のみを客觀化したものといはなければならぬ。然らば其全體としての統一をも客觀化する方面は何かといへば其は疑も無く空間である。空間は時間の生ずる「多」を豫想して而も之を一に統一し (Cohen, *Op. cit.* S. 165) 不斷の去來極り無き相對の時間を *Zusammenschluss* に來らしむるものである。即ち其は *Beisammensein* 或は寧ろ *Zusammensein* の範疇であつて「同時」は此空間に至つて初めて可能となる。時間が陥る所の果てしなき轉變の運命が脱せられて恒常の内容が形成せられるのは空間に依る (S. 166)。斯くて範疇時間が未だ原體驗の一面を客觀化するに過ぎざる抽象の段階なるに對し其全體を客觀化するものとして範疇空間は具體的段階となる。此意味に於て空間は時間の目的であり、イデーとなる。直觀の內面的關係は此に於て初めて完全に具體化せられるのである。複素數の多次元體系の基となるのは即ち直觀の此全體の統一的方面であつて、之に對應する所の經驗界構成の形式が即ち此空間に外ならない。併しながら此は複素數の構成にカントの所謂空間的直觀が基をなすといふことにはならぬ。カントが空間の直觀と

稱するものは外的現象の内容となる感覺を感性が受納する形式である(Kr. d. r. V. S. 30)。然るに斯かる空間的形式に従つて受納せられた感覺も其が自然界の對象として空間的形式に構成せられるには、其が順次に統覺せられて同時存在の要素體系に配列せられることを要する。即ち其が爲めには單に思惟對象の同時存在の體系を構成する形式としての空間を必要とするのである。此はカントの考へた如き直觀形式でなくして思惟の範疇である。空間を單に受動的なる感性の形式として思惟と分離したのはカントの缺點であつて、今日のカント派の認識論者の採らざる所、フエンの空間と稱するのは此範疇としての空間に外ならない。而して其豫想となる直觀は實はカントの空間的直觀でなく、凡ての直觀内容の體驗せられる内面的關係の統一的全體である。所謂感性的空間直觀なるものも、カントの思想の根柢に在る獨斷的假定を除いて考へるならば、其が順次に統覺せられる内容の全體の統一を含むにより、範疇空間に従つて思惟に構成せられる直觀内容であるといふ意味に止まらなければならぬ。如何なる直觀内容も常に統一的全體の創造的發展である。範疇としての時間は其發展「多」の一面を客觀化する抽象の段階に止まり、其の「多」を一に統一した全體の具體的方面は範疇空間に至つて初めて客觀化せられる。範疇と

此の空間及複素數の多次元體系の基となる直觀的關係は原體驗の內面的關係の最も具體的なるものに外ならない。空間が時間の具體的イデーなる如く、複素數が實數の具體的なるイデーとなるのは之に由る。而して實數と複素數とは其發展的「多」の方面と其統一的全體の方面とを反省的に客觀化する思惟の成果であつて、之に對し更に其抽象的なる段階を一段具體化して原體驗の內面的關係を完全に具體化するのが時空の範疇となるのである。斯くて複素數の體系の豫想する所も已に實數の基となる直觀の外のものではなく、其具體的真相に外ならないことが分る。カントが數理の基とした時間的直觀を後に範疇時間として客觀化せられるものゝ基となる體驗の發展的「多」の一面と限るならば、其は複素數を含む數理の基とするには足らぬ。吾人は範疇空間の同時共存の形式に客觀化せらるべき全體の統一の方面をも備ふる體驗の具體的全體を以て數理の基としなければならぬ。カントの説は此だけの補正を必要とするものである。

七

前節に於て余は數理の基となる直觀の本性を考へ、數と時空との關係に就いても

幾分明にする所があつたと云ふ。今數理の認識と他の種類の認識との關係を考へ數理が知識全體に於て占める所の位置を明にしたいと思ふ。

數理は已に述べた如く論理の基にあつた直觀の内面的關係を客觀化することにより躍進する思惟の構成する所である。其故數理は論理の發展といはれる。其發展は單に論理のみに由つて出来るものでなく、其には思惟の躍進を要する。併し躍進は思惟の外から來り加はる直觀の力に由るのでなく、初から論理的思惟の基にあつて未だ客觀化せられなかつた直觀の背景に思惟が遡ることによるのである。即ち思惟其物の發展に外ならない。此處に數學論理說と直觀思惟二元論との何れも正鵠を失する點が存する。而して已に所謂論理的思惟なるものが實は全く直觀を離れて成立するものでないと思ふに述べた如くである。論理の最も根本的な原則と見做される自同律、矛盾律も實は直觀の基礎なくして可能なるものではない。此は一切思惟の對象を定立する方法を支配する原理であるが、客觀的對象を定立することは、未だ主觀と客觀とが分れず、作用と對象との分れない一如の直觀體驗の中に内面的に含まれる關係が對象化せられることなのであつて、其れは即ち原體驗から見れば其の内面的なる發展に外ならない。數理の範圍に入りても思惟が對象を定

立するのは常に此原理に従ふのであつて、唯其の基とする所の體驗を漸次具體的となすに従ひ、豊富なる内容を有する對象が構成せられるのである。數理の範圍に於て對象を定立する原理が論理の範圍に於けるそれと異るといふことはない。唯思惟が論理から數理に躍進するには思惟が其具體的なる直觀の基に還るといふことを必要とした。此はマールブルヒ派の言ひ方に従へば無限の過程たる思惟が其根原の原理に従つて Grund を求めることである。併しながら此處に Grund といふのは已に與へられた對象に存するのでなく、これから發見すべきものを意味する。即ち未だ思惟の客觀化を経ざるものとして、無たる原體驗の中に發見定立すべきものである。從來の論理學に於いて自同、矛盾の原理と並んで思惟の根本原則と認められた充足理由の原理は、已に成立せる對象として與へられたるものゝ間に Grund と Folge との關係を規定するに止まる點に於て不充足である。此は論證の原理としては役立つけれども、ロゴス其物の發展としての科學の成立を可能ならしむるには足らぬ。吾人はコーエンの根原の原理なるものを認めなければ、科學、特に數理其物の綜合生成の過程を明にすることは出來ぬ。此原理に従つて新に定立せられる所の Grund は眞のプラトンの意味に於ての Hypothesis であつて、或思惟の對象は常に其基

に潜在する Grund の力に由つて可能となるのである。而して此 Grund を發見して顯在的に定立、客觀化するものは、其對象よりいへば本來の實現すべき目的を實現することになる。Grund は即ち目的であり、イデーである。ライブニッツは充足理由律の求むる理由を以て *causa efficiens* たると同時に *causa finalis* としたが、普通の論理學に於ける如く此原理を已に在る所の理由から結論に進む向下的の方面のみを意味するものと解しては、思惟の綜合を支配する原理とするには足らぬ。コーエンの所謂根原の思惟をも支配する原則としては、未だ在らざる所の Grund を目的として實現する向下的方向をも有するものと認められなければならぬ。余は論理の原則として自同律矛盾律の意味を形式論理に於ける如き内容の空虚なる *tautologisch* なるものとせず、對象定立の統一を支配する原理と解すると同時に之と並立する所の充足理由律をも、單に從來の形式論理に於ける如く論證の原理に止まるとする見解を捨て、廣く *das Bedingende* 及 *das Bedingte* との關係を規定するものと解し、常に Grund より Folge に進む思惟綜合の原理たるのみならず、思惟が Grund を求め目的を追ひ、イデーに向ふ綜合の過程をも支配するものと解したく思ふ。此原理は A なるが故に (Grund) B なり Folge) 及 S 方向のみならず A なるは (Folge) B ならんが爲めなり (Grund) と S 方向

をも包含するものと考へたい。AなるはBならんが爲めなりといふは、Aの Grundが、Bに存することである。唯其 GrundはAをして在らしむる Grundなるも、Aに先つて現實となつて居るものでなく、Aを通して初めて實現せらるべき目的たることを特色とする。此が思惟の躍進發展を支配する原理であると信ずる。斯く解せられたる充足理由律を自同律矛盾律と共に認めるならば、吾人は論理と數理との兩範圍を純粹思惟の立場から統一的に解し兩者の關係を明にせられるであらう。斯くして數理は論理の發展であるといふことがいはれるのである。

已に前節に述べた如く數理の基となる直觀は之を其發展の方面から具體的に客觀化すれば範疇時間となり全體の統一の方面から具體的に客觀化すれば範疇空間となる。此と數理の實數、複素數との關係を考へれば、數に於ては原體驗の中から對象化せられる内容が單に思惟對象として同一なること、即ち相等であるといふ關係を有する方面から反省的に綜合せられるのであるが、*partielle Identität*たる相等の半面には相違を豫想する所から、之をも具體的に客觀化した綜合の形式が時空となるのである。數に於て單に思惟對象としての同一性、即ち相等のみを客觀化するものは猶抽象的たるを免れない。相等と同時に其基に潛む發展の順序の相違をも客觀化

すれば、初めて原體驗の内面的關係が凡て具體的に客觀化せられることとなる。時空は其構成の成果に外ならない。其故此は數理の一段具體化せられたものであつて、直觀の中に掲げられる所の課題が此に至つて完全に解かれることとなる。時空が經驗的自然界の構成形式となるのも此具體性に由る。經驗といふのは與へられた感覺を思惟の先驗形式により配列して生ずるといふ如きものでない。思惟に對して與へられるといふのは課題として掲げられるのである。感覺は實在の認識でなく唯實在の指標に過ぎない。根原の原理により Grund を求める思惟によつて要求せられるものとして其が掲げる所の課題が解かれるに及んで、初めて其に應ずる客觀的對象が構成せられる。經驗といふのは掲げられる所の課題を解き盡して唯一的規定に達せんとする思惟の過程である。其唯一的規定といふ意味に於ての存在の世界を構成する形式として時空の有する特色は、其が感性の受動的なる形式たるにあるのではなく、根原を藏する直觀の掲げる所の凡ての課題を解かんとする最も具體的な思惟の綜合形式、範疇たるにある。經驗の形式としての實體の如き範疇も之を基礎として生ずる。而して此等範疇の生成の原理も論理の自由矛盾充足理由の原理の外には出でない。思惟は同じ原理により論理から數理を通じて經驗

412
の段階に發展するのである。時、空、實體の如き範疇の思惟せられる原理は主として
自同律、矛盾律であるが、此は教理に於ては個々の數の生成、又は變數の成立に相應す
るのである。かの充足理由律の一面たる A なるが故に B なりといふ普通の Grund
und Folge の關係が、數理に於ては同一段階の數系列(實數には複素數)の一の發展を他
の發展に由つて規定する函數關係として現れ、A なるは B ならんが爲めなりといふ
關係は一層具體的な數の段階への發展の原理となつて居るのに對しては、經驗に
於ては一の現象を其原理となる他の現象に由つて規定する因果關係と、一の現象を
之が手段となる目的に由つて規定する目的手段の關係とが對應する。目的は手段
の隠れたる原動力即ち Grund であつて、後者により實現せらるべきものなることは、
已に論理から數理への躍進、數の各段階の進展に於て認められた關係に一致するの
である。自然の認識に於て或種の現象が單に因果的關係に構成せられたのみでは
不充分であつて、合目的的に目的手段の關係に統一せられるとを要するのは、已に思
惟の發展の中に唯 A なるが故に B なりといふ關係に由りてのみ理解し得べからず、
目的の實現として初めて理解し得られる方面のあるのに相應する。而して目的と
手段との關係は半面に原因と結果との關係の成立を含蓄し、兩者相矛盾するもので

なく、一方の立場が他方を包含すること已に諸家の注意した如くなるは (Wundt, Op.

cit. I, S, 563)

論理的にも A なるは B ならんが爲めであるといふのは、半面に A なる

故に B なることを含蓄するのに相應する。目的手段の關係は單なる主觀的の關係でなく、思惟の範疇であるといはねばならぬ。斯くて吾人は同じ原理に支配せられる思惟の發展により、論理、數理、經驗を統一的に理解することが出来る。固より經驗の構成形式範疇につきては別に詳細なる研究を必要とし、此様な大體論を以て之を説き得たりとすることは出来ないが、同一思惟の發展に由つて認識の異種の段階が構成せられ、一切認識成立の基を一元的に理解し得ることは之により髣髴することが出来るやう。數理が認識の體系中に占むる所の位置は略右の如きものである。

右の如き數理の位置から其が經驗的認識の基礎となる根據も容易に知ることが出来る。數理は思惟の本性上其基となる直觀の最も具體的なる構成の段階、空間の認識たる幾何學に進まなければならぬ。幾何學は數理の一層具體的なる段階として必然思惟の要求する所である。併しながら幾何學は單に空間を同時共存の對象の體系と解して純性質的にも研究せられる。所謂純粹幾何學と名けられる所の近世綜合幾何學は此の立脚地に立つものである。然るに性質的空間なるものは猶即

444
自の段階抽象の見地である。更に竟が數と綜合せられて量的空間となるに至つて初めて眞に具體的な段階が實現せられる。ヘーゲルの概念に従へば *Qualität* は *an sich* の段階、*Quantität* は *für sich* の段階であつて *Mass* に至つて初めて *an und für sich* の段階が達せられる。數は統一的な *die Zahl* の限定として數値 *Zahlen* を生ずるものと考へられることに由り量となり質的空間と之と綜合せられて測り得べき量的空間が生ずる。此見地から空間を研究する解析幾何學は綜合幾何學に對しても純粹解析に對しても具體的な段階と考へることが出来る(西田教授『自覺に於ける直観と反省』三三、三四節)。而して時間も其自身では *Antizipation* を特色とする繼起の形式なるが爲めに測ることが出来ない、同時共存の形式空間に移されて初めて可測的の量となることが出来る。凡ての經驗量は何れも空間に還元せられて初めて測られるのであつて、數理が解析幾何學に於て經驗的形式空間に具體化せられることは、即ち其が經驗的認識の基礎となることの根據である。數理の經驗的認識に對する關係は決して偶然的一致に基く應用といふ如きものでなく、思惟の發展が必然數の具體的段階として空間を要求し、此が前者と綜合せられて解析幾何學を可能ならしむるに因るのである。之に由つて初めてガリレイの所謂數學の記號を以て記された

る書籍なる自然界が可能となる。数理は空虚なる論理的遊戯に止まるものでなく、本来自然認識の基礎となるべき意義を有するものである。而して此は先驗的觀念論の立脚地から論理に發し数理を通じて經驗に進む先驗的思惟の過程を明にすることに由つてのみ理解せられるのである。余は数理哲學研究の立脚地から一般認識の本性に關して幾分明にする所があつたことを望んで茲に此稿を終らうと思ふ。