公理體系の二種

園　正造

一

數學は一般に或る一團の命題から成立つてゐる。而して各々の命題は其れより後に來るもの、論理的演繹に非ざる樣に排列せられてゐるのである。斯くの如く排列せられたる一團の命題に於て第一の命題は云ふまでもなく他の命題から演繹せられたるものでない。故に演繹的證明をなすに當つては、常に何等かの假定の存在することを認めねばならぬ。數學の出立點は常に若干の命題の體系(Set of propositions)であり、しかも其等は全く證明せられずに殘されたるものなのである。

同樣に數學の命題に於ては定義せられてゐない用語(term)が若干存在することを認めねばならぬ。一の用語を定義するには其意義の既知なりと認められたる用語によつて定義するより外はないからである。從つて數學に含まれたる最初の命題に

於ては定義せられざる用語が常に前提せらるゝのである。

かくの如く數學に於ては論理的に見て定義せられざる用語及び證明せられざる命題の存在することが知られのである。而して後者は普通に公理（Axiom）又は公準（Postulate）と稱せられる。實際の取扱上より見ればできるだけ簡單なる命題を公理として選定し之より複雜なるものに進むのが便宜であるが、理論上より云へば必ずしもかくせざるべからざる理由は少しもないのである。余は茲に公理の諸性質――例へば公理は自明の眞理であるか、又は先驗的判斷であるかといふが如き――を論じ、又は各命題に於て定義せられざる用語について云爲しようとするのではない。たゞ數學の一部門に於ける公理の全體を總括して之を一體として見たるとき公理の體系には二の區別があるといふことを、述べて見たいと思ふのみである。（哲學會に於ては此等の點について少しく述べたのであるが茲には省いて置く）。

上に述べたことを一層明瞭ならしむるために一例をユークリッドの幾何學にとつて見よう。ヴェブレンは次の如き十二の公理と若干の定理とを以て幾何學を組織した。

公理一　少くとも二つの異れる點が存在する。

公理二　點A、B、CがOrder ABCに於てあるときは彼等は又Order CBAに於てある。

公理三　點A、B、CがOrder ABCに於てあるときは彼等はOrder BCAにあらず。

公理四　點A、B、CがOrder ABCに於てあるときはAはCと異る。

公理五　A、Bが任意の異れる二の點なるときはA、B、CがOrder ABCに於てあるやうな點Cが必ず存在する。

定義一　A、Bが異れる二點なるときに線ABとは次の諸點よりなれるものをいふ。

1、A、及びB、

2、ABX. AXB. XAB 等の孰れかのOrderに於てある凡ての點X、

以下省略する。(Veblen: A System of Axioms for Geometry, Trans. Amer. Math. Soc. V P. 343. 1904)。

而して之等の公理は凡て先行者の論理的演繹の結果ではない。從つて此等は孰れも證明せられざる命題であり、この命題に含まれたる用語(例へば點とかOrderとかいふ如き)は何等の定義をも受けてゐないものである。故に形式上より見れば用語「點」は全く未知のものであり、公理に含まれたる内容以外には全く意味を有せざる記

號(symbol)として取扱はるべきものと云はねばならぬ。吾人は點の代りに全く無内容なる元素(element)を以てしても何等の差支がない筈である。從つて幾何學とは上掲の如き種々なる公理を以て定められたるエレメントの集合を研究する學問であるとも言ひ得るであらう。

玆に於て一の問題がおこつて來る。卽ち斯くの如く抽象せられたる結果は果して從來ユークリット幾何學と稱せられたるものを猶且完全に特徵づけることができるであらうか。詳しくいへば、點を公理に含まれたる事項以外に全く無内容なる記號と見做したるときにこの公理より續行する命題と通常吾人の考ふるユークリット幾何學(以上十二の公理を滿足すると同時に點、オーダー等の用語に相當の意味を與へたるもの)の命題とが全く同一のもの(equivalent)であるか、或は兩者は本質上全く異つたものであるか。前者に於て成立する命題は後者に於ても無論成立することは明かであるが、後者に於て正しき命題が果して前者に於ても正しいかどうかは吟味を要する問題である。

此種の問題は單に幾何學に限らず、數學の孰れの部門に於いても之が抽象的式述を行ふと共に起り來るべき問題の一つであらう。余は玆にこの問題に對する一の

答を提供せんと試みるものであるが、要するにこの問題の解答は公理の體系の性質如何によつて然りともなり否ともなるのである。

二

前節に於て余は公理の體系に二の區別あることを述べたが次にこのことを說明するために例を群(Gruppen)と有限體(endliche Körper)とにとつてみよう。この兩者は一部の人々には理解しがたいかもしれぬが形式上公理を吟味するには却つて都合がよいと思はれるからである。

正の有理數の全體(但し零を除く)を考ふるに任意の二數の乘法及びその逆なる除法は常に可能であつてしかも其の積及び商は有理數である。此の種のエレメントの集合を群といふのである。群の概念は公理體系を說明するに當つて重要なる意義を有つてゐるから余はもう少し嚴密に群の數學的定義を述べておきたいと思ふ。

算術、代數に於ける對象を定義するには第一にエレメント間の「相等」(equality)を定め、第二にエレメント間の結合(Composition)を規定し、第三には結合の法則に關する公準を與へねばならぬ。或る集合に屬する二のエレメントの相等及び不等は定義によ

つて定められる。而してその定義は二の叙述より成立する。一は二のエレメントの相等しきことを説明し、他は彼等の相等しからざることを説明する。かくの如き定義を立てるに當つては次の三條件以外には何等の制限もないのである。

第一、各エレメントは定義の結果として各々夫自身に等しい。aがbに等しければbはaに等しい。

第二、此の集合の二のエレメントは互に相等しきか、然らざれば不等である。

第三、aがbに等しくbがcに等しければaはcに等しい。

さて二のエレメント$a.\ b$に對して第三のエレメントcを想定する(zuordnen)ことをaとbとを結合すると云ひ、cを結合(composition)の結果と云ふ。而してaとbとの結合を$\mathfrak{ab}$にてあらはし、時として之をaとbとの積とも云ふ。但し茲に注意すべきことはaとbとの結合の結果$\mathfrak{ab}$とその逆の順序に於て結合せられたる結果$\mathfrak{ba}$とは必しも一致せしめる必要がないといふことである。

$a\ b$が夫々$a'\ b'$に等しければその積$\mathfrak{ab}$及び$\mathfrak{a'b'}$も亦相等しき様に定義せられたる結合は一意的結合(eindeutige Composition)と云はれる。群及び體に於ける結合は勿論一意的結合である。

茲にエレメントの集合Gがあつてそのエレメントの間に結合が定義せられてあると假定する。若しGが次の四の公準を滿足するときはGを一の群(定義せられたる結合について)と云ふのである。

一、aとbとがGのエレメントであるならばその積abは又Gのエレメントである。

二、Gの三エレメントa b cに就いて結合の法則(Law of association)即ち$(ab)c=a(bc)$の關係が成立する。

三、Gの各エレメントaに對し$ae=a$であるやうなエレメントeがGに存在する。

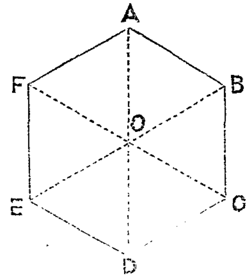
四、Gの任意の與へられたるエレメントaに對して$aa'=e$となるやうなエレメントa'をGよりとることができる。但し茲にいふeとは第三に述べたるeと全く同意味のものである。

(此等の點に關しては京都理科大學紀要第二卷第三號拙論文を參照せられたし)。

今群の概念を明かにするために一例をあげる。

例一、正六角形ABCDEFをとる。中心Oに直角なる直線を軸として$60°$廻轉すればこの正六角形は前と同じ空間を占有する。又$60°$の倍數だけ廻轉するもこの圖形は常に同一の空間を占有する。かくの如く正六角形ABCDEFに運動の前後に於て同

一の空間を占有するやうに平面運動(この六角形の平面内の運動)を與へることができる。此の種の運動はOを中心とする上述の運動であつてこの外にはない。但しOを中心として無限に可能なる此の種の運動をまとめて運動後頂點A、B、C、等が、夫々舊位置に來るときは全く運動せざりしものと同一視する。



次に二の運動に於て頂點A、B、C、等が同一の位置に來るときはこの兩運動は相等であるとする。故に上述の運動に於て吾人の考へ得る凡ての運動は次の六種となるのである。即ちOを中心として時計の針とは反對の方向に夫々60° 120° 180° 240° 300°を廻轉したるものと及び全く廻轉せざるもの(卽0°の廻轉)とである。全く廻轉せざるときは頂點A、B、C等は盡く舊位置にあるから之を表はすに$\begin{pmatrix}ABCDEF\\ABCDEF\end{pmatrix}$を以てする。

次に60°廻轉したるときは、A、B、C等の舊位置にB、C、D等の頂點が來る故に$\begin{pmatrix}ABCDEF\\BCDEFA\end{pmatrix}$となる。以下順次同樣の記號を採用すれば六種の運動は、

$\begin{pmatrix}ABCDEF\\ABCDEF\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}ABCDEF\\BCDEFA\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}ABCDEF\\CDEFAB\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}ABCDEF\\DEFABC\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}ABCDEF\\EFABCD\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}ABCDEF\\FABCDE\end{pmatrix}$

となる。次に甲運動を行ひ更に乙運動を行へる結果を甲と乙との積と定義する。

例へば、

$\begin{pmatrix} ABCDEF \\ BCDEFA \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} ABCDEF \\ CDEFAB \end{pmatrix}$との積は$\begin{pmatrix} ABCDEF \\ DEFABC \end{pmatrix}$

となる。何となればこの運動は前者によつて60°廻轉せられたる後更に後者によつて120°廻轉せられたるものであるからして、その結果は舊位置より180°廻轉せられたことゝなるのである。以下かくの如くして種々なる積を考へることができるであらう。而してこの結合を吟味するに群に關する四の公準を滿足することは容易に知ることができる。故に此等の運動は一の群を形成するのである。

さて上述の如く二の運動の積は、

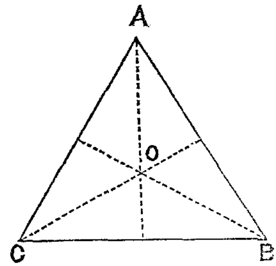
$$\begin{pmatrix} ABCDEF \\ BCDEFA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ABCDEF \\ CDEFAB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ABCDEF \\ DEFABC \end{pmatrix}$$

であると同時に又

$$\begin{pmatrix} ABCDEF \\ CDEFAB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ABCDEF \\ BCDEFA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ABCDEF \\ DEFABC \end{pmatrix}$$

である。一般にかくの如く孰れの二運動をとるも甲と乙との積は常に乙と甲との積に等しきことは容易に知り得るであらう。此の點は今の問題にとつて極めて重要なる意義を有するから特に注意せられんことを望む。

例二、正三角形ABCをとる。今運動の前後に於て同一の空間を占有する如き方法に於て三角形ABCを廻轉せしめる。(但しこの場合に平面運動のみではない)。



かくの如き運動は云ふまでもなく無限に可能であらう。例へばOを中心とする120^0の平面運動(三角形ABCの平面に於て)又は120^0の倍數度の運動及びAOを軸とする180^0の廻轉等が即ち夫れである。玆に於ても頂點A、B、Cが運動後に於て舊位置に來るときは全く運動せざるものと見做し、之を表はすに$\begin{pmatrix}ABC\\ABC\end{pmatrix}$を以てする。次に二の運動に於てA、B、Cが孰れも同位置に來るときはこの兩運動を相等しいと見なす。相等を斯くの如く定義すれば吾人の考へ得る凡ての相異れる運動は左の六種となるのである。

(1) $\begin{pmatrix}ABC\\ABC\end{pmatrix}$

(2) 正三角形ABCを中心Oの周りに120^0及び240^0廻轉せしむる場合(時計の針と反對の方向に)には頂點A、B、Cの舊位置に夫々B、C、A及びC、A、Bが來る故に此二種の運動は夫々$\begin{pmatrix}ABC\\BCA\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}ABC\\CAB\end{pmatrix}$を以て表はされる。

(3) 正三角形ABC内に固定せる三軸 OA. OB. OC の周りに 180° の廻轉を行ふときは三種の運動は夫々$\binom{ABC}{ACB}$ $\binom{ABC}{CBA}$ $\binom{ABC}{BAC}$となる。何となれば、OAを軸として180°廻轉すれば頂點BとCとは其位置を顚倒し頂點Aは舊位置に止るが故に$\binom{ABC}{ACB}$となり同様にOB. OCを軸として廻轉したるときも夫々B、Cが舊位置に止り他の二頂點が共位置を顚倒するからである。

次に前例に於てなしたる如く二の運動を續行したる結果を兩運動の積と定義する。例へば

$$\binom{ABC}{BCA}\binom{ABC}{ACB} = \binom{ABC}{CBA}$$

$$\binom{ABC}{ACB}\binom{ABC}{BCA} = \binom{ABC}{BAC}$$

以上六種の運動が又一の群を形成することは容易に證明し得らるゝであらう。然るに玆に注意すべきは上例の如く甲運動と乙運動との結果が必ずしも乙と甲との結果に等しくないといふことである。此の事は前に掲げた正六角形の群と異れる點であり、吾々の問題にとつて極めて重要なる意義をもつてゐるのである。

さて二の群が相等であるとは如何なる場合を云ふか。群の定義に於てはたゞエレメントの結合に關する規定があるのみであつて、エレメントの内容については公

準に現はれたる規定以外に何等の制限もないのである。故に同一の法則を有する群は先づ相等しいと見て差支へないであらう。但しこの場合にはエレメントの内容については少しも考へず、群をたゞ抽象的に思惟するのは無論である。

G G'を同數のエレメントよりなる二つの群とする。今Gの各エレメントにG'のたゞ一個のエレメントが對立し逆にG'の各エレメントにGの單一のエレメントが對應するとする。而してGの二のエレメントの積abにG'の二のエレメント(a及びbに對應する所の)の積$a'b'$が對應するとする。GとG'とのエレメントの間にかくの如き對應が成立するときはGとG'とは互に同態(isomorphic)であると云はれる。

GとG'とが同態であるならばGに於て成立する所の命題はG'に於ても亦成立する。故に群の表現樣式(mode of representation)に無關係なる性質のみを論ずるときは同態の群は同一であると見做して差支がないであらう。

こゝに注意すべきは群を構成するエレメントの數が同一であつても必しも同態でないといふことである。例へば前例について云へば例一に於ては二のエレメント甲と乙との積は乙と甲との積に等しいけれども第二の例に於ては必しも然うではない。故に兩側に於ける群のエレメントの數は同一であるが兩者は決して同態

たることができない。若し同態であるとするならば上述の二例に於て兩群の各エレメントは夫々一々意的に對應しなければなるまい。前者のエレメントa bが後者のエレメントa' b'に夫々對應するものとすれば積abには積$a'b'$が對應し、積baには積$b'a'$が對應すべき筈である。

而して前者に於てはabは常にbaに等しき故に後者に於ても亦$a'b'$が$b'a'$に等しくなければならない。然るに後者に於ては前例に示したる如く$a'b'$は必ずしも$b'a'$に等しくならぬ。故にこの二の群は同態たることはできない。

この例によつて見ても二の群は假令之を構成するエレメントの數が等しくとも必しも同態とは限らぬことが明かであらう。此點は特に注意を要するのである。

三

次に有理數の全體をとつて見よう。(この有理數には無論零も負をも含む)。今其の任意の二數をとり之に加減乘除を行つても其結果は依然として有理數である。但し零を以て割ることを除く。

以上の如く一團の數に於てその任意の二數をとり之に四則を旋してもその結果

が依然として此の團體に屬するときにはこの數の一團を體(Körper)といふのである。(但し零によつて割ることを除くのは無論である)。

茲に定義したのは數より成立する體即ち數體(Zahlkörper)についてゞあるが吾人は此意義を擴張して一般に次の如く言ふことができるのである。即ち一のエレメントの團體に於て結合の二種の法則(上例に於ては加法及乘法)が與へられ、其團體の內部に於てこの二種の結合並に其の逆が自由に施し得るときは(恰も上例に於ける四則の如く)此のエレメントの團體を體といふ。この定義は嚴密でないから或は理解し難いかもしらぬが茲には體の概念を説明するに唯數體を以て代表せしめて置かう。(Dickson: Trans. Amer. Math. Soc. Vol 4 p. 17(1903))。

體を構成するエレメントの數(Anzahl)は有限の場合と無限の場合とがある。茲には必要上有限數の體について一二の例をあげて見よう。

例一、一の整數 a をとる。a を7にて除しその商を q とし剩餘を r とする。

即ち $$a=7q+r \qquad 0 \leqq r < 7$$

a が正なるときは勿論、負のときに於ても右式を滿足するやうに整數 q を選ぶことができる。換言すれば q を適當にとることによつて r が7より少なる正整數或

は零となるやうにすることができる。故に今後吾人が剩除といふのは7より大ならざる正整數又は零を意味するものとするのである。

今aとbとの二數があつて之を7にて除するとき夫々の剩除が相等しき場合にはaとbとは法(Modulus)7についてコングルーエント(Congruent)であると名づける。さうして之を示すに　$a \equiv b \pmod{7}$

を以てする。aとbとの差が7にて割り切れるときは上定理によりこの兩者は互にコングルーエントなることは明かであらう。今7より大ならざる整數

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,　(此團體をRと名づく)

を見るにその孰れの二數の差も決して7にて割りきれない。故にこの七數の中にはコングルーエントの數がない譯である。卽ち此等の一團の數は法7について互にインコングルーエントでなければならぬ。然るに一方に於て如何なる數をとつてもこの七數の孰れかにコングルーエントである。何となればこの整數を7にて割ればその剩餘が七數の孰れか一つになるからである。故にRの二數aとbとの和$a+b$其差$a-b$及び其積abは孰れもRの孰れか一つに法7についてコングルーエントでなければならぬ。$a+b$がRのcにコングルーエントなる場合卽ち

$$a+b\equiv c \pmod{7}$$

なるときは之を以て法7についての加法と定義する。減法及乗法についても之と同様に定義することができるであらう。かくの如く加減乗の三則を定義すればRの二數の加減乗の結果は依然としてRに屬することゝなる。一言にしていへばRの內部に於て此の三則が常に可能なのである。然らば除法は果して如何であらうか。茲には證明を省くが除法も亦零によつて行ふ除算を除けば常に可能なることが知られるのである。換言すれば a b が與へられたる時は

$$ax\equiv b \pmod{7}$$

を滿足する如き x は常にRの中に存在し、しかも唯一つ存在するのである。一例をとれば2を3にて割りたる商即ち $2x\equiv 3 \pmod{7}$ となる樣な x は5である。何となれば $2\times 5=10\equiv 3 \pmod{7}$ であるからである。

以上の如く七個の數からなつた團體Rはその內部に於て四則が常に可能であるといふことが知らるゝであらう。故に前述の定義によりRは一の體(Körper)を形成するのである。

例二、i を $\sqrt{-1}$ とする。今 $x+yi$ (x 及び y は共に整數)の形にて表はされたる

複素數の一團をとつて見よう。若しこの二數 $a+ib$ 及び $a'+ib'$ に於て

$$a\equiv a' \pmod{7} \qquad b\equiv b' \pmod{7}$$

といふ關係が成り立てば此兩數は法7について互にコングルーエントであるといふ。而して之を

$$a+bi\equiv a'+b'i \pmod{7}$$

を以て表はす。前例と同樣にして x 及び y に夫々0 1 2 3 4 5 6を與へて得べき7^2の數

$$x+iy \quad (x,y=0,1,2,3,4,5,6,) \quad (\text{此團體をKと名づく})$$

は互に7についてインコングルーエントである。又前例と同樣に如何なる數も此團體の孰れか一の數にコングルーエントなることも明かである。次にKの二數 a_1+ib_1 a_2+ib_2 の和及び差 $(a_1\pm a_2)+i(b_1\pm b_2)$ 及び積 $(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$ は孰れもKの孰れか一つにコングルーエントでなければならぬ。故にKの內部に於ける加減乘の三則は例一の場合と同樣に定義し得らるゝことは明かであらう。又この場合零によつての除算を除けば乘法の逆たるべき除法も常にKの內部に於て可能なることは容易に知らるゝのである。詳しくいへば $a+bi$ 及び $c+di$ が與へられたるときは、

$$(a+bi)(x+yi)\equiv c+di \pmod{7}$$

となる様な$x+yi$は常に存在し、しかも唯一つ存在する。(但し$a+bi\equiv o$ (mod. 7)の場合を除外する)。

以上によつて見ればKは法7に就ての加減乘除が其內部に於て常に可能なることが知られる。故にKは一の體である。

此のKは7^2個よりなれる一種の體である。而してこの體の外にも7^2個のエレメントよりなれる體は無限にあることが容易に知られる。然らば之等の種々なる體の間には果して如何なる關係があるか。單に同數のエレメントよりなるといふ以外に何等かの關係がないであらうか。體Kとエレメントの數を同じくしながらしかも之と全く性質を異にせる體がないであらうか。玆には證明を省くが實際に於てかくの如き異質の體は決して存在しない。7^2個のエレメントよりなる體は本質的に唯一つである。この事は有限體に於て重大なる性質であるから特に讀者の注意を促して置く。

次に體の同態(isomorphism)についてのべて見よう。二の體A及びA'がイソモルフであるといふのは次の如き條件が滿足せらるゝときに名けられるのである。

一、Aのエレメントと A'のエレメントの間に一々的對應が成立し、

二、A′のエレメント$a'b'$にAのエレメントabが對應するとすればA′の$a'+b'$及び$a'b'$にAの$a+b$及びabが對應する。

二の體が同態なるときは一方の體に於て成立する命題は他方の體に於ても同樣に成立する。(此等の言ひ方は甚だ不完全であるが茲には嚴密に叙述する暇のないことを遺憾とする)。此の用語を用ふれば有限のエレメントよりなる體はエレメントの數が同一ならば常に同態なりと云つて差支へない。例へばKの7^2個のエレメントよりなれる體は孰れもKとイソモルフであると見ることができる。故に有限個のエレメントよりなれる體を研究するには一の具體的表現(例へば7^2個のエレメントよりなれるものに於ては前例Kの如きもの)をとつて之について講究しても一般妥當性を缺くことはない筈である。

四

以上の如く吾人は第二及び第三節に於て群及び體の同態とは何を意味するかを知つた。而して吾人は之と同一の思想を更に擴張して數學の他の研究對象にも適用することができるであらう。一般的にいへば二の體系S及びsがあつて兩體系

のエレメントの間に一々的對應が成立し、Sに於て妥當なる性質はsに於ても亦同樣に妥當なる場合には兩者の體系は同態であると名けられるのである。

群に於ては之を構成するエレメントの數が同一であつても二の群は必しも同態であるとは限らない(二の例を見よ)が、體に於ては同數の有限なるエレメントよりなれる體は常に同態である(三の例を見よ)。かくして數學の研究對象を定義せる公理體系には二種の別あることが知らるゝのである。數學の研究對象とは一體系をなせる若干の公理によつて定められたるエレメントの集合(例へば群或は體の如き)をいふのである。今一の公理體系Cがあつて C を滿足する對象が孰れも同態(イソモルフ)なるときは此體系は範疇的(Categorical)と云はれ、之に反する場合には非範疇的(Non-categorical or disjunctive)と稱せられる。例へば有限體に於ては之を構成するエレメントの數が一定せる場合には二の體は常に同態なるが故に有限體を定義せる公理體系は範疇的であるが、群に於ては非範疇的である。(範疇的といふ語はヴェブレンによつて始めて導入せられたのである。前掲ヴェブレンの論文を參照せられし)。範疇的體系をなせる公理によつて定められたる對象を掲ぐれば先づユークリッドの幾何學(點及びオーダーに就いて範疇的なのである)を初め、整數、有理數、實數及び複素數等を數へる

ことができるであらう。(Huntington: Trans. Amer. Math. Soc. Vol 3. (1902) 4, 6, 參照)。實は此等のものについて詳しく述べたいのであるがあまり長くなるから他日の機會に讓り茲には前二例によつて公理體系の二種を暗示するに止める。

以上の如く範疇的體系にて定められたる對象は孰れも同態なるが故に之を研究するに一の具體的表現をとつてしても一般妥當性に於て缺くる所はない譯である。換言すれば研究對象を構成せるエレメントが公理又は公準を滿足する範圍内に於てエレメントに如何なる內容を與へても異れる結果は決して出ない。例へばユークリッド幾何學に於て點、線等に直觀又は思惟より來れる如何なる內容を與へてもその結果は常に同一であるから、ユークリッド幾何學を學ぶには普通になす如く圖形によつて論じても少しも差支がないのである。之と同樣に普通の數を取扱ふ場合にも之れに與へられたる內容の如何に係らず、公理を滿足する範圍內に於ては常に同一の命題を得るであらう。茲に於て公理が範疇的體系を爲せるときは之等が完全に一の數學的研究對象を定義するとも云ひ得るのである。ハンチングトンが「範疇的」といふ語の代りに「充全的」(sufficient)といふ用語を使用したのも尤もであると云はねばならぬ。

以上の如く範疇的體系によつて定められたる對象を研究するには一の具體的表現をとれば十分であるが、非範疇的體系によつて定義せられたる數學的對象の研究には一の具體的表現のみを取扱つては一般的妥當性が得られない。卽ちエレメントに與ふべき內容(或は具體的表現)の如何によつては異れる對象が生じ、別種の數學が構成せらるゝのである。抽象的にエレメントを無內容なる記號として取扱はるる場合に生ずる命題はエレメントに對し種々なる內容を與へて得べき對象に共通なる性質を示してゐるのである。

吾人はこの小論の最初の節に於て、エレメントを全く無內容なる記號と見なし若干の公理によつて果して數學の一分科を完全に特徵づけることができるかを疑問とした。而してこの問題の解答は要するに公理の體系の性質如何によつて然りともなり否ともなることを豫示して置いた。吾人は茲に於てこの問題に對する明答を與ふることができると思ふ。卽ち公準體系が範疇的であつて論理的關係が考へられてゐるときはこの疑問は肯定的に解答せらるゝのである。何となれば範疇的公理體系によつて規定せられたる數學的對象はエレメントに與ふる內容の如何に關らず常に同一の結果を得るからである。故に全く無內容なる記號としてのエレ

メントは之を定義する公理體系が範疇的なるときは數學の一分科を完全に特徴づけることができるのである。

古來の數學は完全に與へられたる公準又は公準から形式論理に依て演繹せられたるものではない。線、點、數等には直觀又は思惟より來れる何等かの內容を有せるものとして演繹せられたものである。一言にしていへば古來の數學は一種の具體的表現である。それにも拘らず古來數學が他の諸科學と異つて一般妥當性を有すと考へられたのは——而して現今に於ても多くは確實なる妥當性を有すと考へられるのは抑々何故であるか。十九世紀以前の數學に於ては與へられたる公理は固より不完全であるが數學の研究者が互に相許せし(自覺してゐたか否かは別として)方法又は意味をとりだして公理體系を構成すれば盡く範疇的となるもののみであつた。點、線等の內容の如何に關ちず彼等の數學が一般的妥當性を失はなかつたのは一にこの理由からであらう。

然し古來の數學的研究對象を規定する公理體系が何故に範疇的であつたか。此の問題の研究は他日を待つこととして玆にはたゞ數學的對象を規定する公理體系には二種の別あることを述ぶるに止めて置きたいと思ふのである。