物理學の基礎（ダヴイツド・ヒルベルト）

三土興三 譯

第一部

（一九一五年十一月二十日の學會に於て呈示せられたもの）

アインシュタインの偉大なる問題呈出並びにそれの解決のために考へ出された鋭い方法と、それによつてミイが彼の電氣力學を立てたところの深く透徹した思想と獨創的な概念構成は物理學の基礎についての研究に新しい道をひらいた。私はこれから——公理主義的方法の意味に於て——本質的に二つの簡單なる物理學の根本方程式の一つの新しい體系をたてたいと思ふ、その方程式なるものは理想的な美しさを具へて居て、私の見るところによれば、そのなかにはアインシュタインとミイとの問題の解決が同時に含まれて居るが如きものである。私の方程式の一層嚴密な討究及殊にそれの電氣論の基礎的な問題への特殊な應用は、これを後の報告にまで保留することゝする。

ω_s (s=1. 2. 3. 4.) をばある世界點を本質的に一義的に指定するところの坐標即所謂世界媒介變數(Weltparameter)〔最も一般的な時—空座標〕であるとする。ω_sに於ける現象を特性づけるところの量は次の如きものである。

（一）アインシュタインによつてはじめて紹介せられた、世界媒介變數ω_sの任意の變換に對して對稱的なテンソルの性質を持つたところの十の重力ポ

テンシャル $g_{\mu\nu}(\mu,\nu=1,2,3,4)$
(二)同樣の意味のヴェクトルの性質を持つたところの四つの電氣力學的ポテンシャル $q_s(s=1.2.3.4.)$

物理現象は勝手なものではなくてそこには次の二つの公理が妥當する。

公理一(世界函數に關するミイの公理(a) 物理現象は次の如き Argumente を有する一つの世界函數 H によつて定まる。

(1) $g_{\mu\nu},\ g_{\mu\nu l}=\dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \omega_l},\ g_{\mu\nu lk}=\dfrac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial\omega_l\partial\omega_k}$,

(2) $q_s,\ q_{sl}=\dfrac{\partial q_s}{\partial \omega_l}$, $(l.\ k=1.\ 2.\ 3.\ 4)$

而してもとより積分 $\int H\sqrt{g}\,d\omega$ $(g=|g_{\mu\nu}|,\ d\omega=d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4)$ の變分は十四のポテンシャル $g_{\mu\nu}$ q_s の各に對して消えねばならぬ。

Argumente (1)の代りに明かに次の如き Argumente が現はれ得る。

(3) $g^{\mu\nu},\ g_l^{\mu\nu}=\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial\omega_l},\ g_{lk}^{\mu\nu}=\dfrac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial\omega_l\partial\omega_k}$,

こゝに $g^{\mu\nu}$ は要素 $g_{\mu\nu}$ に關する行列式 g の小行列式を g で割つたものを意味する。

公理二〈一般的不變性(Invarianz)の公理 2〉世界函數 H は世界媒介變數 ω_s の任意の變換に對して一つの不變量である。

公理二はポテンシャル $g_{\mu\nu}$ q_s の連結は世界點を世界媒介變數によつて如何樣に指定するかと云ふその仕方からはそれ自身全然無關係であるといふ要求に對する最も簡單な數學的表現である。

私の理論の建設への導機は次の數學的命題が呈供する。私はそれらの證明は他の場所で示す。

定理一、J を n 箇の量とその導來函數を含むところの、四つの世界媒介變數の任意の變換に際しての不變量でありとし且

$$\delta\int J\sqrt{g}\,d\omega=0$$

から、その n 箇の量に關して n 箇のラグランヂュ變分方程式をつくれば、n 箇の微分方程式よりなるこの不變量の體系に於て n 箇の量についてその四つは常に他の $n-4$ のもの―――それら n 箇の微分方程式とその全導來函數との間には常に四つの一次的 (linear) な相互にことなる組合せが恒等的に滿足せられると云ふ意味に於て―――結果である

(4)及びその後にあらはれるべき公式に於ける、$g^{\mu\nu}$ $g^{\mu\nu}_{k}$ $g^{\mu\nu}_{kl}$ に關する微分商に關して、一方 μ ν、他方 k l に於ける對稱性の故に $g^{\mu\nu}$ $g^{\mu\nu}_{k}$ に關する微分商は $\mu=\nu$ なるときは 1 を $\mu\neq\nu$ なるときは $\frac{1}{2}$ を乘じてとらるべきこと、猶 $g^{\mu\nu}_{kl}$ に關する微分商は $\mu=\nu$ 及び $k=l$ なるとき 1 を $\mu=\nu$ 及び $k\neq l$ 或は $\mu=\nu$ 及び $k=l$ なるときは $\frac{1}{2}$ を $\mu=\nu$ 及び $k\neq l$ なるときは $\frac{1}{4}$ を乘じてとらるべきことを注意しておく。

公理一から先づ十の重力ポテンシャル $g^{\mu\nu}$ に關して次の如き十のラグランジュ微分方程式

$$(4)\quad \frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g^{\mu\nu}}-\sum_{k}\frac{\partial}{\partial\omega_k}\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g^{\mu\nu}_{k}}+\sum_{kl}\frac{\partial^2}{\partial\omega_k\partial\omega_l}\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g^{\mu\nu}_{kl}}=0\qquad(\mu,\nu=1.2.3.4)$$

が、それから四つの電氣力學的ポテンシャル q_s に關しては四つのラグランジュ微分方程式

$$(5)\quad \frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_h}-\sum_{k}\frac{\partial}{\partial\omega_k}\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_{hk}}=0,\qquad(h=1.2.3.4)$$

が導かれる。簡單のためにこれらの方程式の左邊をそれぞれ $\left[\sqrt{g}H\right]_{\mu\nu}$, $\left[\sqrt{g}H\right]_{h}$ とあらはさう。方程式(4)は重力の根本方程式(5)は電氣力學の根本方程式或は一般化せられたるマクスウェル方程式とよばれうる。上に掲げられたる定理によつて四つの方程式(5)は方程式(4)の歸結とみられうる。

換言すれば吾々は直接にかの數學的命題の故に常に次の如く主張することが出來る。卽、そこに云ひあらはされたるが如き意味に於て電氣力學的現象は重力の結果であると。

この認識のうちに私は重力と光との關係を理論的にもとめた最初の人であるところのリイマンの問題の簡單にして非常に驚くべき解決を見る。

次に於て吾々は若し$p_j (j=1.\ 2.\ 3.\ 4)$がある勝手な逆變ヴェクトルを意味するならば

$$p^{\mu\nu}=\sum_s\left(g_s^{\mu\nu}p^s-g^{\mu s}p_s^{\nu}-g^{\nu s}p_s^{\mu}\right)$$

$$\left(p_s^j=\frac{\partial p^j}{\partial \omega^s}\right)$$

なる式は對稱的逆變テンソルを

$$p_l=\sum_s\left(q\ p^s+q_s p_l^s\right)$$

なる式は共變ヴェクトルをあらはす、と云ふ容易に證明しうる事實を用ひる。

すゝんで吾々は次の如き二つの數字の定理をたてる。

公理二、若しJが$g^{\mu\nu}$・$g_l^{\mu\nu}$・$g_{lk}^{\mu\nu}$・q_s・q_{sk}・に依繋する一つの不變量であるならば、すべてのArgumente に於て及び各々の任意の逆變ヴェクトルp^sに對して常に恒等的に

$$\sum_{\mu,\nu,l,k}\left(\frac{\partial J}{\partial g^{\mu\nu}}\triangle g^{\mu\nu}+\frac{\partial J}{\partial g_l^{\mu\nu}}\triangle g_l^{\mu\nu}+\frac{\partial J}{\partial g_{lk}^{\mu\nu}}\triangle g_{lk}^{\mu\nu}\right)+\sum_{s.k}\left(\frac{\partial J}{\partial q_s}\triangle q_s+\frac{\partial J}{\partial q_{sk}}\triangle q_{sk}\right)=0$$

と云ふことが妥當する。

その際、

$$\triangle g^{\mu\nu}=\sum_m\left(g^{\mu m}p_m^{\nu}+g^{\nu m}p_m^{\mu}\right)$$

$$\triangle g_l^{\mu\nu}=-\sum_m g_m^{\mu\nu}p_l^m+\frac{\partial\triangle g^{\mu\nu}}{\partial\omega_l}$$

$$\triangle g_{lk}^{\mu\nu}=-\sum_m\left(g_m^{\mu\nu}p_{lk}^m+g_{lm}^{\mu\nu}p_k^m+g^{\prime\nu}p^{\prime\prime}\right)$$

$$+\frac{\partial^2 \triangle g^{\mu\nu}}{\partial\omega_l\,\partial\omega_k}$$

$$\triangle q_s = -\sum_m q_m\, p^m_s$$

$$\triangle q_{sk} = -\sum_m q_{sm}\, p^m_k + \frac{\partial \triangle q_s}{\partial\omega_k}$$

である。この定理は次の如く云ひあらはすことも出來る。

Jが不變量でありp^sが前の如く一つの勝手なヴェクトルであるならば次の如き恒等式が妥當する。

$$(6)\quad \sum_s \frac{\partial J}{\partial\omega_s} p^s = pJ$$

その際に

$$P = P_g + P_q$$

$$P_g = \sum_{\mu,\nu,l,k,}\left(p^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} + p^{\mu\nu}_l \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}_{lk}} + p^{\mu\nu}_{lk}\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}_{lk}}\right)$$

$$P_q = \sum_{l.k}\left(p_l\frac{\partial}{\partial q_l} + p_{lk}\frac{\partial}{\partial q_{lk}}\right)$$

であり、こゝでは

$$p^{\mu\nu}_k = \frac{\partial p^{\mu\nu}}{\partial\omega^k},\quad p^{\mu\nu}_{kl} = \frac{\partial^2 p^{\mu\nu}}{\partial\omega\,\partial\omega_l}$$

$$p_{lk} = \frac{\partial p_l}{\partial\omega_k}$$

と云ふ省略がなされてある。

(6)の證明は容易になされる。何者この恒等式は、p^sが定數的なヴェクトルであるときは明かに正しく、而してこのことからそれはその不變性のために一般的に歸結するから。

定理三、Jがただ$g^{\mu\nu}$とその導來函數のみに依繫する不變量であり且上の如く$g^{\mu\nu}$に關する$\sqrt{g}\,J$の變分導來函數が$\left[\sqrt{g}\,J\right]_{\mu\nu}$をもつてあらはされるならば次の式は一つの不變量をあらはす。——

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{\mu\nu}\left[\sqrt{g}\,J\right]_{\mu\nu} h^{\mu\nu},$$

こゝに $h^{\mu\nu}$ のもとにはある逆變テンソルが理解せられる。

この和に於て $h^{\mu\nu}$ の代りに特殊なるテンソル $p^{\mu\nu}$ を入れて

$$\sum_{\mu\nu}\left[\sqrt{g}J\right]_{\mu\nu} p^{\mu\nu}=\sum_{s,l}\left(i_s p^s+i_s^l p_l^s\right)$$

とかき、その際に

$$i_s=\sum_{\mu\nu}\left[\sqrt{g}J\right]_{\mu\nu} g_s^{\mu\nu}$$

$$i_s^l=-2\sum_{\mu}\left[\sqrt{g}J\right]_{\mu s} g^{\mu l}$$

なる式はただただ $g^{\mu\nu}$ とその導來函數にのみ依繋するものであるならば

$$(7)\quad i_s=\sum_l \frac{\partial i_s^l}{\partial \omega_l}$$

であり、この方程式はすべての Argumente 卽 $g^{\mu\nu}$ とその導來函數に對して滿足せられる。

證明のために吾々は積分 $\int J\sqrt{g}\,d\omega=$, $d\omega=d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4$ を四次元の世界の有限なる域にとつて觀察しよう。なほ p^s はその導來函數とともにその世界域の三次元の表面に於て消えるところのヴェクトルである。$P=P_g$ なるが故に次の頁の最後の式（この飜譯では* 印を附せられたるもの）から

$$P_g(\sqrt{g}J)=\sum_s \frac{\partial \sqrt{g}J p^s}{\partial \omega_s}$$

が結果し、それから

$$\int p_g\left(J\sqrt{g}\,d\omega\right)=0$$

が得られる。しかしてラグランジュ導來函數の構成方によつて、それ故にまた

$$\int \sum_{\mu,\nu}\left[\sqrt{g}J\right]_{\mu\nu} p^{\mu\nu}\,d\omega=0$$

であり、i_s, i_s^l をこの恒等式に導入すれば結局

$$\int\left(\sum_l \frac{\partial i_s^l}{\partial \omega_l}-i_s\right)p^s\,d\omega=0$$

なることが示され、従つてまた吾々の定理の主張が正しいことゝなる。

最も重要な目的は今度は一、及二、兩公理のみを基礎としてエネルギの概念を構成することゝエネルギーの定理を導くことである。そのために吾々は先づ

$$P_g(\sqrt{g}H) = \sum_{\mu,\nu,k,l}\left(\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g^{\mu\nu}} p^{\mu\nu} + \frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g^{\mu\nu}_k} p^{\mu\nu}_k + \frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g^{\mu\nu}_{kl}} p^{\mu\nu}_{kl}\right)$$

をつくる。さて $\dfrac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{kl}}$ は第四階級の混合テンソルであり、それ故に

$$A^{\mu\nu}_k = p^{\mu\nu}_k + \sum_\rho\left(\left\{ {\kappa\rho \atop \mu} \right\} p^{\rho\nu} + \left\{ {\kappa\rho \atop \nu} \right\} p^{\rho\mu}\right)$$

$$\left\{ {\kappa\rho \atop \mu} \right\} = \frac{1}{2}\sum_\sigma g^{\mu\sigma}(g_{\kappa\sigma\rho} + g_{\rho\sigma\kappa} - g_{\kappa\rho\sigma})$$

とおくときは

$$(8)\quad a^l = \sum_{\mu,\nu,k} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{kl}} A^{\mu\nu}_k$$

なる式は kontragredienter Vektor である。それ故に

$$P_g(\sqrt{g}H) - \sum_l \frac{\partial\sqrt{g}a^l}{\partial w_l}$$

といふ式をつくるとこれはもはや第二導來函數、$p^{\mu\nu}_{kl}$ を含まぬが故に

$$\sqrt{g}\sum_{\mu,\nu,k}(B_{\mu\nu}p^{\mu\nu} + B^k_{\mu\nu}p^{\mu\nu}_k)$$

なる形を有する、こゝで

$$B^k_{\mu\nu} = \sum_{\rho,l}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_k} - \frac{\partial}{\partial w_l}\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{kl}} - \frac{\partial H}{\partial g^{\rho\nu}_{kl}}\left\{ {l\mu \atop \rho} \right\} - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\rho}_{kl}}\left\{ {l\nu \atop \rho} \right\}\right)$$

はまた混合テンソルである。

今度は吾々はヴェクトル

(9) $b^l = \sum_{\mu\nu} B^l_{\mu\nu} p^{\mu\nu}$

をつくり、それから

(10) $P_g(\sqrt{g}H) - \sum_l \frac{\partial\sqrt{g}(a^l+b^l)}{\partial\omega_l}$

$$= \sum_{\mu\nu}\left[\sqrt{g}H\right]_{\mu\nu} p^{\mu\nu}$$

をうる。他方

$$P(\sqrt{g}H) = \sum_{k,l}\left(\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_k}p_k + \frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_{kl}}p_{kl}\right)^{*}$$

をつくる。すると $\frac{\partial H}{\partial q_{kl}}$ はテンソルであり、

(11) $c^l = \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_{kl}} p_k$

なる式はそれ故に kontragredienter Vektor をあらはす。それに相當して、上の如く

(12) $P_g(\sqrt{g}H) - \sum_l \frac{\partial\sqrt{g}c^l}{d\omega_l}$

$$= \sum_k \left[\sqrt{g}H\right]_k p_k$$

となる。さて根本方程式(4)と(5)を注意すれば(10)と(12)を加へることによつて

$$P(\sqrt{g}H) = \sum_l \frac{\partial\sqrt{g}(a^l+b^l+c^l)}{\partial\omega_l}$$

を得る。また

$$P(\sqrt{g}H) = \sqrt{g}PH + H\sum_{\mu\nu}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial g^{\mu\nu}}p^{\mu\nu}$$

$$= P\sqrt{g}PH + H\sum_s\left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\omega_s}p^s + \sqrt{g}\,p^s_s\right)$$

であるが故に恒等式(6)によつて

* $P(\sqrt{g}H) = \sqrt{g}\sum_s \frac{\partial H}{\partial\omega_s}p^s + H\sum_s\left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\omega_s}p^s + \sqrt{g}\,p^s_s\right) = \sum_s \frac{\partial\sqrt{g}Hp_s}{\partial\omega}$

そこで吾々は最後に不變方程式

$$\sum_{l} \frac{\partial}{\partial \omega} \sqrt{g}\,(Hp^l - a^l - b^l - c^l) = 0$$

を得る。今

$$\frac{\partial H}{\partial q_{lk}} - \frac{\partial H}{\partial q_{kl}}$$

は斜對稱的逆變テンソルなることを注意すると、

$$(13) \quad d^l = \frac{1}{2\sqrt{g}} \sum_{k,s} \frac{\partial}{\partial \omega_k} \left\{ \left(\frac{\partial \sqrt{g} H}{\partial q_{lk}} - \frac{\partial \sqrt{g} H}{\partial q_{kl}} \right) p^s q_s \right\}$$

は逆變ヴェクトルであつて、もとより明かに恒等式

$$\sum_{l} \frac{\partial \sqrt{g}\, d^l}{\partial \omega_l} = 0$$

を滿足する。

今 $e^l = Hp^l - a^l - b^l - c^l - d^l$ をエネルギーヴェクトルとして定義すればエネルギーヴェクトルは逆變ヴェクトルであつてなほ任意のヴェクトル p^s に一次的に依繫し、このヴェクトル p^s を如何樣にとるも、恒等的に不變エネルギー方程式

$$\sum_{l} \frac{\partial \sqrt{g}\, e^l}{\partial \omega_l} = 0$$

を滿足する。

世界函數 H に關してはその選擇が一義的になるためには猶より以上の公理が必要である。重力方程式がただポテンシャル $g^{\mu\nu}$ の第二導來函數のみを含むべきであるならば H は

$$H = K + L$$

なる形を有せねばならぬ。こゝに K はリイマンテンソルから生起する不變量（四次元時―空體の曲率 Krümmung der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit）

$$K = \sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu} K_{\mu\nu},$$

$$K_{\mu\nu}=\sum_{k}\left(\frac{\partial}{\partial \omega_{\nu}}\left\{{\mu\kappa \atop \kappa}\right\}-\frac{\partial}{\partial \omega}\left\{{\mu\nu \atop \kappa}\right\}\right)+\sum_{k,\lambda}\left(\left\{{\mu\kappa \atop \lambda}\right\}\left\{{\lambda\nu \atop \kappa}\right\}-\left\{{\mu\nu \atop \lambda}\right\}\left\{{\lambda\kappa \atop \kappa}\right\}\right)$$

を意味しLはただ$g^{\mu\nu}$ $g^{\mu\nu}_{l}$ q_s q_{sk}に依繫する。最後に次に於て吾々はなほLは$g^{\mu\nu}_{l}$を含まぬと云ふ簡單にするための假定をしよう。そこで定理二を不變量Lに應用して

$$(15)\quad \sum_{\mu,\nu,m}\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}}\left(g^{\mu m}p^{\nu}_{k}+g^{m\nu}p^{\mu}_{m}\right)-\sum_{s,m}\frac{\partial L}{\partial q_{s}}q_{m}p^{m}_{s}-\sum_{s,k,m}\frac{\partial L}{\partial q_{sk}}\left(q_{sm}p^{m}_{k}+q_{mk}p^{m}_{s}+q_{m}p^{m}_{sk}\right)=0$$

を得る。左邊のp^{m}_{sk}の係數を零とおくと方程式

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_{sk}}+\frac{\partial L}{\partial q_{ks}}\right)q_{m}=0$$

或は

$$(16)\quad \frac{\partial L}{\partial q_{sk}}+\frac{\partial L}{\partial q_{ks}}=0$$

が得られる。換言すれば電氣力學的ポテンシャルq_sの導來函數はただ

$$M_{ks}=q_{sk}-q_{ks}$$

なる連結に於てのみ現はれる。かくして吾々は、吾々のなした如き假定に際しては不變量Lはポテンシャル$g^{\mu\nu}$ q_sを外にしてはただただ斜對稱的不變テンソル

$$M=(M_{ks})=Rot(q_s)$$

の卽所謂電磁氣的六臂ヴェクトルの成分にのみ依繫することを認識する。それによつてはじめてマクスウェル方程式の性質が制約せられたところのこの結果は、こゝに本質的に一般的不變量性の歸結として、それ故に、公理二を基礎としてあらはれる。

恒等式(15)に於て左邊p^{ν}_{m}の係數を零に等しと置

くと吾々は(16)を用ひて

$$(17)\quad 2\sum_\mu \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\mu n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} q_\nu - \sum_s \frac{\partial L}{\partial M_{ns}} M_{\nu s} = 0, \quad (\mu = 1.\ 2.\ 3.\ 4)$$

を得る。この方程式は電磁氣エネルギー即エネルギーヴェクトルのLからでてくる部分の一つの重要なる變革を許容する。この部分は即(11)(13)(14)から次の如くあらはれる。

$$Lp - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_{hk}} p_k - \frac{1}{2\sqrt{g}} \sum_{k,s} \frac{\partial}{\partial w_k} \left\{ \left(\frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial q_{sk}} - \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial q_{ks}} \right) p^s q_s \right\}$$

(16)により、(5)を注意すれば、この式は

$$(18)\quad \sum_{s,k} \left(L\delta^l_s - \frac{\partial L}{\partial M_{lk}} M_{sk} - \frac{\partial L}{\partial q_l} q_s \right) p^s$$

$$(\delta^l_s = 0,\quad l \neq s;\quad \delta^s_s = 1)$$

に即(17)によつて

$$(19)\quad -\frac{2}{\sqrt{g}} \sum_{\mu,s} \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu s}} g^{\mu l} p^s$$

に等しい。

以下に展開せられたる式(21)によつて吾々はこれから特に次のことを認知する。即電磁氣エネルギーと從つてまた全エネルギーヴェクトルϵ^lはただKだけで表はされる、それで$g^{\mu\nu}$とその導來函數のみがあらはれq_sとその導來函數はあらはれぬ。といふことを。

(18)式を

$g_{\mu\nu} = 0$, $(\mu \neq \nu)$

$g_{\mu\mu} = 1$

に對する極限までもつて行くと、それはミイが彼の電氣力學に於て立てたところのものと嚴密に一致する。ミイの電磁氣的エネルギーテンソルはそれ故に不變的なテンソルの極限に到つた場合にほ

かならぬ。――この事情ははじめて私にアインシュタインの一般的相對性理論とミィの電氣力學との間の必然的にして親密なる關係を示唆し而してこゝに開展せられたる理論の正しさについての確信を與へたものである。なほ

(20)　$H=K+L$

なる假定に際して、上に立てられたマクスウェル方程式(5)が如何にして先きに與へられた意味に於て方程式(4)の歸結であるかと云ふことを直接に示すことが殘されて居る。

まへに導入せられたる記法を使用することによつて $g^{\mu\nu}$ に關する變分導來函數に對して重力方程式は(20)により

$$(21)\quad \left[\sqrt{g}K\right]_{\mu\nu}+\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}=0$$

なる形をとる。左邊の第一項は

$$\left[\sqrt{g}K\right]_{\mu\nu}=\sqrt{g}\left(K_{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}Kg_{\mu\nu}\right)$$

となる。このことは計算を要せずして $K^{\mu\nu}$ は $g^{\mu\nu}$ を外にしては唯一つの第二階級のテンソルであり、K はただ $g^{\mu\nu}$ とそれの第一及第二の微分商 $g^{\mu\nu}_{k}$ $g^{\mu\nu}_{kl}$ を以て構成せられ得るところの不變量であると云ふ事實から容易に導かれる。かくしてあらはれる重力の微分方程式は、私の見るところによれば、アインシュタインによつて彼の後の論文のうちに立てられたる一般相對性の大規模の理論と一致する

(c)　なほすゝんで一般に前の如く $\sqrt{g}J$ の電磁氣的ポテンシャル q_h に關する變分導來函數を

$$\left[\sqrt{g}J\right]_h=\frac{\partial\sqrt{g}J}{\partial q_h}-\sum_k\frac{\partial}{\partial w_k}\frac{\partial\sqrt{g}J}{\partial q_{hk}}$$

とあらはせば、電氣力學的基礎方程式は(20)により

$$(22)\quad \left[\sqrt{g}L\right]_h=0$$

なる形を得る。

さてKはただただ$g^{\mu\nu}$とその導來函數とにのみ依繫するところの不變量であるから、定理三によつて方程式(7)が恒等的に妥當する。そこに於て

$$(23)\qquad i_s = \sum_{\mu,\nu}\left[\sqrt{g}\,K\right]_{\mu\nu} g_s^{\mu\nu}$$

$$(24)\qquad i_s = -2\sum_{\mu}\left[\sqrt{g}\,K\right]_{\mu s} g^{\mu l} \quad (\mu=1.\,2.\,3.\,4)$$

である。(21)と(24)によつて(19)は$-\dfrac{1}{\sqrt{g}}\,i_\gamma^{m}$にひとしく、$\omega^m$に關して微分すること及$m$について加算する事によつて吾々は(7)によつて次の結果を得る。

$$i_v = \sum_m \frac{\partial}{\partial\omega_m}\left(-\sqrt{g}\,L\,\delta_\nu^m + \frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial q_m}q_\nu + \sum_s \frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial M_{sm}}M_{s\nu}\right) = -\frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial\omega_\nu} + \sum_m\Big\{q_\nu\frac{\partial}{\partial\omega_m}\left(\left[\sqrt{g}\,L\right]_m + \sum_s\frac{\partial}{\partial\omega_s}\frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial q_{ms}}\right)$$

$$+q_{\nu m}\sum_s\left(\left[\sqrt{g}\,L\right] + \sum_s\frac{\partial}{\partial\varepsilon_s}\frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial q_{ms}}\right)\Big\}$$

$$+\sum_s\left(\left[\sqrt{g}\,L\right]_s - \frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial q_s}\right)M_{sm} + \sum_{s,m}\frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial M_{sm}}\frac{\partial M_{sm}}{\partial\omega_m}$$

$$\therefore\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial q_m} = \left[\sqrt{g}\,L\right]_m + \sum_s\frac{\partial}{\partial\omega_s}\frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial q_{ms}}\\ &-\sum_m\frac{\partial}{\partial\omega_m}\frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial q_{sm}} = \left[\sqrt{g}\,L\right]_s - \frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial q_s}\end{aligned}\right.$$

今度は(16)によつて、

$$\sum_{m,s}\frac{\partial^2}{\partial\omega_m\partial\omega_s}\frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial q_{ms}} = 0$$

なることを注意し、それから適當に寄せあつめることによつて

$$(25)\qquad i_\nu = -\frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial\omega_\nu} + \sum_m\left(q_\nu\frac{\partial}{\partial\omega_m}\left[\sqrt{g}\,L\right]_m\right.$$

$$+M_{m\nu}\left[\sqrt{g}L\right]_m\Big)+\sum_m \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_m}q_{m\nu}$$

$$+\sum_{s,m}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial M_{sm}}\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial\omega_m}$$

他方

$$-\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial\omega_\nu}=-\sum_{s,m}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{sm}}g_\nu^{sm}-\sum_m{}'\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_m}q_{m\nu}-\sum_{m,s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}}\frac{\partial q_{ms}}{\partial\omega_\nu}$$

右邊の第一項は(21)と(23)によつてi_γに他ならぬ。右邊の末項は(25)の右邊の末項と符號を異にしてひとしい、即

$$(26)\qquad \sum_{s,m}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial M_{m}}\left(\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial\omega_m}-\frac{\partial q_{ms}}{\partial\omega_\nu}\right)=0$$

である。何故なれば

$$\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial\omega_m}-\frac{\partial q_{ms}}{\partial\omega_\nu}=\frac{\partial^2 q_\nu}{\partial\omega_s\partial\omega_m}-\frac{\partial^2 q_s}{\partial\omega_\nu\partial\omega_m}-\frac{\partial^2 q_m}{\partial\omega_\nu\partial\omega_s}$$

なる式がs, mについて對稱的であり(26)のうちの加算の記號に於ける第一因子がs, mについて斜對稱的であるから、從つて(25)から次の方程式が歸結する。

$$(27)\qquad \sum_m\left(M_{m\nu}\left[\sqrt{g}L\right]_m+q_\nu\frac{\partial}{\partial\omega_m}\left[\sqrt{g}L\right]_m\right)=0$$

即重力方程式(4)から實に電氣力學の根本方程式(5)とその第一導來函數の四つの相互に獨立なる一次的組合せ(27)が導かれる。これは上に重力の結果現象としての電氣力學の性質について一般的に云ひあらはされた主張の嚴密なる數學的表現である。

Lは吾々の假定によつて$g^{\mu\nu}$の導來函數に依繫してはならぬが故に、Lはある四つの一般的不變量の一つの函數であらねばならぬ。その不變量とは

ミイによつて與へられたところの、特殊な直角變換に關する不變量に相當するものであつて、そのうちの最も簡單なる二つは次のものである。

$$Q=\sum_{k,l,m,n} M_{mn}M_{lk}g^{mk}g^{nl}$$

$$q=\sum_{k,l} q_k q_l g^{kl}$$

Lに對する最も簡單にしてKのつくり方をみるとすぐ分かる數式は同時にミイの電氣力學に相當するもの、卽

$$L=\alpha Q+f(q)$$

或はなほ特別にミイに連關して云へば

$$L=\alpha Q+\beta q^3$$

である。こゝに$f(q)$はqのある函數であつて$\alpha\ \beta$は定數を意味する。

見らるゝ如く適當なる說明によつて僅少にして簡單なる公理一、二に云ひあらはされたる假定が理論の建設に役立つのである、それによつて單に吾々の時間空間運動に關する觀念が根本から、アインシュタインによつて示された意味に於て變革せられるばかりでなく、私はまた次のことを確信する、卽こゝに立てられたる根本方程式によつて原子内に於ける内部的な、これまでは、おほひかくされ居たところの現象が解明を得るであらうことを、特に一般にすべての物理學的定數の數學的定數への還元が可能であらねばならぬことを――並びにまた一般にこのことによつて物理學から幾何學の樣な科學が出來ることを。かくして公理主義的方法の光輝ある名聲は確實である。それはこゝでは吾々の見る樣に、解析の有力なる武器卽變分法と不變量論とを使用するのである。

第一部の註

（a）ミイの世界函數はこれらの Argumente を嚴密にはふくまぬ、特に Argumente （2）の使用はボルンにまでさかのぼるしかしながらハミルトンの原理に於けるその樣な世界函數の導

入と使用とは正にミイの電氣力學の特質である。

（b）直角變換に關する不變性の要求は既にミイが立てた。上に開陳せられたる公理二に於て一般的不變量に關するアインシュタインの基礎的な根本思想は最も簡單なる表現を見出す。しかし彼に於てはハミルトンの原理は副役割をつとめて居るのみであつて彼の函數Hは一般的不變量でなく、またそれは電氣のポテンシャルを含まぬ。

（C）l. c° Berliner Sitzungsber. 1915.

第二部

（一九一六年十二月二十三日の學會に於て呈示せられたもの）

私の第一回の報告に於て私は物理學の根本方程式の體系を立てた。私はこれらの方程式の積分の理論に向ふまへに、論理的並びに物理學的性質をもつたところの二三のより一般的な問題を探求することが必要であると思ふ。

まづ吾々は世界媒介變數ω_s $(s=1.2.3.4)$の代りに最も一般的な實時—空座標X_s $(s=1.2.3.4)$を導入して

$$\omega_1=X_1,\quad \omega_2=X_2,\quad \omega_3=X_3,\quad \omega_4=X_4$$

と置き、それに相應して

$$ig_{14},\quad ig_{24},\quad ig_{34},\quad -g_{44}$$

の代りに簡單に

$$g_{14},\quad g_{24},\quad g_{34},\quad g_{44}$$

と書かう。九つの$g_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu=1.2.3.4)$——アインシュタインの重力ポテンシャル——はその場分に悉く實變數X_s $(s=1.2.3.4)$の實函數であり、從つてX_sの齊一次式の二乘の總和としての

$$(28)\qquad G(X_1, X_2, X_3, X_4)=\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}X_\mu X_\nu$$

なる齊二次式を書きあらはすに際して常に三つの二乘が正の、他の一つの二乘が負の符號をもつてあらはれねばならぬ。齊二次式(28)は從つてX_sの四次元の世界に對して一つの擬似幾何の Massbesti mmung を呈供する。$g^{\mu\nu}$の行列式 gは負になる。

この幾何に於て　$X_s=X_s(p)$　$(s=1.2.3.4)$ といふ線が與へられると——こゝに$X_s(p)$は媒介變數pのある實函數を意味する——このものは、それらの一つびとつに於て

$$G\left(\frac{dX_1}{dp},\ \frac{dX_2}{dd},\ \frac{dX_3}{dp},\ \frac{dX_4}{dp}\right)$$

なる式がその符號を變じないところの部分片に分割せられうる。それについて

$$G\left(\frac{dX_3}{dp}\right)>0$$

となるところの曲線をば域(Strecke)と稱しこの曲線片に沿うてとられたる精分

$$\lambda=\int\sqrt{G\left(\frac{dX_s}{dp}\right)}dp$$

をば域の長さと稱する。それについて

$$G\left(\frac{dX_s}{dp}\right)<0$$

となるが如き曲線片を時間線(die Zeitlinie)と呼びこの曲線片に沿うてとられたる精分

$$\tau=\int\sqrt{-G\left(\frac{dX_s}{dp}\right)}dp$$

を時間線の固有時 (die Eigenzeit der Zeitlin'ie) と云ひ、最後にそれに沿うて

$$G\left(\frac{dX_s}{dp}\right)=0$$

となるが如き曲線片を零線(Nulllinie)と稱する。

吾々のこの擬似幾何のこれらの概念を會得させるために吾々は二つの理想的な測定器を考へようその一つはそれによつて吾々が各の域の長さλをはかり得るところの測條、他の一つはそれによつて各々の時間線の固有時がきめ得られるところの光時計である。測條は時間線に沿うては、光時計は域に沿うてはそれぞれ全くあてはまらないが各々の零線に沿うては前者は零を示し後者はとまる

先づ吾々はただあるきまつた時―空座標系X_sが導入せられゝば、兩測定器はその助けによつてX_sの函数として$g_{\mu\nu}$の値を計算するのに充分に役立つことを示さうと思ふ。吾々がその終點に常に媒介變數pが屬する樣にことごとく異なつた方向に沿うて同一の世界點X_sに走り入るところのある十の*

*域を選ぶならば十の域の各々に對してその終點に於て次の方程式が得られる。

$$\left(\frac{d\lambda}{dp}\right)^{(h)2} = G\left(\frac{dX_s}{dp}\right)^{(h)}, \quad (h=1,\ 2,\ \ldots\ldots 10)$$

こゝに左邊は長さ$\lambda^{(h)}$を測條によつてはかるとき知られたものとなる。省略のために

$$D(u) = \begin{vmatrix} \left(\dfrac{dX_1}{dp}\right)^{(1)2}, & \dfrac{dX_1^{(1)}}{dp}\dfrac{dX_2^{(1)}}{dp}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \left(\dfrac{dX_4}{dp}\right)^{(1)2}, & \left(\dfrac{d\lambda}{dp}\right)^{(1)2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \left(\dfrac{dX_1}{dp}\right)^{(10)2}, & \dfrac{dX_1^{(10)}}{dp}\dfrac{dX_2^{(10)}}{dp}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \left(\dfrac{dX_4}{dp}\right)^{(10)2}, & \left(\dfrac{d\lambda}{dp}\right)^{(10)2} \\ X_1^2, & X_1X_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & X_4^2, & u \end{vmatrix}$$

とおけば明かに

$$(29)\qquad G(X_s) = -\frac{D(0)}{\dfrac{\partial D}{\partial u}}$$

となる、このことによつて同時に選まれたる十の*

*域の點$X_s(p)$に於ける方向に對して

$$\frac{\partial D}{\partial} \neq 0$$

なる條件が必要なものとしてあらはれる。Gが(29)に從つてはかられるならば、$X_s(P)$に終るところ

のある十一番目の域に對するかくの如き手續の適用は方程式

$$\left(\frac{dh^{(11)}}{dp}\right)^2 G = \left(\frac{dX_s^{(11)}}{dp}\right)$$

を與へるであらう。而してその場合この方程式はそれによつて測定器の正確さが吟味せられるものであり且また、理論の假設が現實の世界にあてはまると云ふことに對しての經驗的確證であるであらう。

光時計についても上と該當する考量が妥當する。

吾々の擬似幾何の公理主義的建設は困難なく遂行せられる。第一にそれを基礎として長さと固有時はそれぞれその被積分式がただX_s及その媒介變數に關しての第一導來函數の一つの函數であるが如き積分であらねばならぬと云ふことが歸結するところの一つの公理が立てらるべきである。その様な公理としては測條の開展の性質或は測地線に對する知られたる包絡線の定理が用ひられ得るであらう。第二にそれによつて擬似ユークリット幾何の命題が卽古き相對性原理が無限少に於て妥當すべき一つの公理が必要である。それに對してはヴェー・ブラシュケ(a)によつて立てられたる公理卽ある二つの方向――域の場合でも時間線の場合でもよい――垂直であることの條件は常に相互的のものであるべしと云ふことを云ひあらはすところの公理が特に適當であらう。

こゝになほモンジュ――ハミルトンの微分方程式が吾々の擬似幾何に關して數へるところの重要なる事實が簡單に開陳せられねばならぬ。

各々の世界點X_sにはそこに頂點を有し走る點座標X_sに於て方程式

$$G(X_1-x_1,\ X_2-x_2,\ X_3-x_3,\ X_4-x_4)=0。$$

によつてきめられるところの第二階級の圓錐が屬する。その圓錐をば點X_sに屬する零圓錐と稱する。

悉くの零圓錐は一つの四次元の圓錐場を形成し、それには一方では「モンジュ」微分方程式

$$G\left(\frac{dX_1}{dp},\ \frac{dX_2}{dp},\ \frac{dX_3}{dp},\ \frac{dX_4}{dp}\right)=0$$

が、他方では「ハミルトン」偏微分方程式

$$(30)\quad H\left(\frac{\partial f}{\partial X_1},\ \frac{\partial f}{\partial X_2},\ \frac{\partial f}{\partial X_3},\ \frac{\partial f}{\partial X_4}\right)=0$$

が屬する。こゝにHはGに逆なる齊二次式(die zu G reziproke Quadratische Form)

$$H(U_1,\ U_2,\ U_3,\ U_4)=\sum_{\mu\gamma}{}' g^{\mu\gamma}U_\mu U_\gamma$$

を意味する。モンジュ微分方程式及び同時にハミルトン偏微分方程式(30)の Charakterisken は測地的零線(die geodätischen Nullinien)である。

あるきまつた世界點 $a_s(s=1.2.3.4)$から出て行くことごとくの測地線は世界點 a_s に屬する時間分界線(Zeitscheide)と稱し得るところの三次元の點集合(Punktmannigfaltigkeit)を生ずる。この時間分界線は a_s に於て一つの結節點を有し、それの接圓錐はまさに a_s に屬するところの零圓錐である。時間分界線の方程式を

$$x_4\cdot\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3)$$

と云ふ形にすると

$$f=x_4-\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3)$$

はハミルトン偏微分方程式(30)の積分である。點 a_s からでるすべての時間線は全然 a_s に屬する時間分界線をば限界として有するところの四次元の世界部分の内部を走る。

これらの準備の後に吾々は新しい物理學に於ける因果關係の問題に向ふ。

これまで吾々はあるものから任意の變換によつて生ずるところの、すべての座標系を同等の權利を有するものとしてみなした。この任意といふことは、吾々が同一の時間線上におかれた二つの世界點が互に原因と結果との關係に立ちうると云ふ

ことを考へると、従つてその様な世界點を同時に變換することは不可能であらねばならぬと云ふことを考へるとある制限を受けねばならぬことが分かる。吾々は x_4 を本來的時間座標としてあらはしつゝ次の如き定義をする。

本來的座標系とはそれに對して $g<0$ の他になほ常に次の四つの不等式(31)が滿足せられるところの座標系のことである。

$$(31)\qquad g_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}>0,\quad g_{44}<0$$

その様な時—空座標系を他の本來的時空座標系に導くところの變換を本來的時空座標變換と云ふ。四つの不等式は、ある世界點 a_s に於てそれに屬する零圓錐は一次的空間

$$x_4=a_4$$

を全然外側に有し、反之直線

$$x_1=a_1,\quad x_2=a_2,\quad x_3=a_3$$

をば内側に含むと云ふことをあらはす。この後の直線はそれ故に常に一つの時間線である。

さてある時間線

$$x_s=x_s(p)$$

が與へられたりとすれば、

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)<0$$

なるによつて、本來的時—空座標系に於ては常に

$$\frac{dx_4}{dp}\neq 0$$

であり、従つて時間線に沿うては本來的座標 x_4 は常にますか或はへるかであらねばならぬと云ふことが歸結する。時間線は各々の座標變換に際して依然として時間線であるが故に、一つの時間線上の二つの世界點は本來的時空座標變換によつて決して時間座標 x_4 の同一の値をとることが出來ない換言すれば同時に變換せられることが不可能であ

る。

他方若し一つの曲線上の點が本來的に同時に變換せられうるならばその様な變換によつて、この曲線について

$$x_4=const.\quad 即\quad \frac{dx_4}{dp}=0$$

從つて

$$G\left(\frac{dx_s}{dp}\right)=\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{dp}\frac{dx_\nu}{dp}\quad(\mu,\nu=1.2.3)$$

が妥當し、而してこゝで吾等の不等式(30)の最初の三つによつて右邊は正である。即それ故にその曲線は一つの域として特性づけられる。

かくして吾々は、吾々が常に不等式(31)を吾々の根本方程式に附け加へたときは、換言すれば吾々を本來的時—空座標の使用にまで制限するならば因果律の根底をなすところの原因と結果の概念は新しい物理學に於ても亦何等の内的矛盾に導かぬことを知る。

このところで私は後に有用になるべき特殊の時—空座標系を示さう。それを私は、それがガウスが曲面論に導き入れた測地的極座標系の一般であるが故に、ガウス座標系と名づけようと思ふ。吾々の四次元の世界に於て、その空間中を走る各々の曲線が域である様な三次元の空間——その様なものを私は域空間と呼びたいと思ふが——が與へられたとし、$x_1\, x_2\, x_3$をばこの空間のある點座標とする。吾々はそれの各々の點$x_1\, x_2\, x_3$に於て時間線であるべきところのそれに直角なる測地線をつくり、それにx_4をば固有時としてもつて來る。その様にして得られたる四次元世界の點に吾々は座標値$x_1\, x_2\, x_3\, x_4$をあてがふ。これらの座標に對して容易に分かるが如く

$$(32)\quad G(X_s)=\sum_{\mu\nu}^{1.2.3} g_{\mu\nu}X_\mu X_\nu - X_4^2$$

となる。即ガウス座標系は分析的に方程式

(33) $g_{14}=0,\ g_{24}=0,\ g_{34}=0,\ g_{44}=-1$

によつて特性づけられる。三次元空間 $x_4=0$ の假定せられたる性質により(32)に於て右邊にある變數 $X_1X_2X_3$ の齊二次式は必然に正になる。卽不等式(31)の最初の三つが滿足せられ而してこのことが第四番目のものについても妥當するが故に、ガウス座標系は常に本來的時―空座系である。

吾々は今や物理學に於ける因果律の研究に還へる。それの重要なる內容として吾々はこれまで各々の物理的理論に於て妥當したところの次の如き事實を見る。卽現在に於ける物理量及それらの時間に關する導來函數から常に未來に於けるこれらの量の値が一義的にきめられるといふこと。これまでの物理學の法則はすなはち例外なく彼等の表現を、そこにあらはれたる函數の總數が獨立なる微分方程式の總數と本質的に一致するが如き微分方程式の一つの體系に於て、見出したのであり、從つて偏微分方程式の積分の存在に關する知られたる一般的なコウシーの定理がかの事實に對する證明を直接に呈供したのである。

私の第一回の報告に於て立てられた物理學の根本方程式(4)と(5)は私が特にそこで指摘した如く、決して上に特性づけれらた樣なものではない。却つて定理一に從つてかれらのうちの四つは他の方のもの〻歸結である。吾々は四つのマクスウェル方程式(5)をば十の重力方程式(4)の歸結となし、從つて十四のポテンシャル $g_{\mu\nu}$ q_s に對してたゞ十の互に本質的に獨立なる方程式(4)を持つたのである。吾々が物理學の根本方程式に對する一般的不變性の要求に固持するとき、今云はれた事情はまた本質的にして必然である。卽若し十四のポテンシャルに對してなほより以上の(4)より獨立なる不變方程式が存するとしたならば(33)によつてガウス座標系を導入すると十の物理量 $g_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu=1.2.3.)$ $q_s=$

(1.2.3.4) に對して再び相互に獨立であり且それが十より多くあるが故に互に矛盾するところの方程式の體系が出來るであらう。

一般相對性の新しき物理學に於て妥當するところのこの樣な事情のもとにはそれ故に現在及過去に於ける物理量を知ることから未來に於けるそれらの値を一義的に推定する事は最早可能でない。このことを一つの例に於て會得せしめるために、第一回の報告に於ける吾々の根本方程式(4)及(5)を唯一つのたえず靜止せる電子の現存に相當すべき特殊の場合に於て積分することゝする、そうすることによつて十四のポテンシャル

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3)$$

$$q_s = q_s(x_1, x_2, x_3)$$

が時間 x_4 よりことごとく獨立であるところの x_1 x_2 X_3 のきまつた函數としてあらはれるやうに且その上に猶四臂密度の三つの最初の成分 γ_1 γ_2 γ_3 が消えるやうに。それから吾々はこれらのポテンシャルに次の座標變換を適用する。

$$\begin{cases} x_1 = x_1' & x_4' \leqq 0 \text{ に對して} \\ x_1 = x_1' + e^{-\frac{1}{x_4'^2}} & x_4' > 0 \text{ に對して} \end{cases}$$

$$x_2 = x_2'$$

$$x_3 = x_3'$$

$$x_4 = x_4'$$

變換せられたるポテンシャル $g'_{\mu\nu}$ q'_s は $x_4' \leqq 0$ に對しては $g_{\mu\nu}$ がもとの變數 x_1 x_2 x_3 に於てしかりしが如く x_1 x_2 x_3 の同樣の函數であり、$x_4' > 0$ に對して $g'_{\mu\nu}$ q'_s は本質的に時間座標 x'_4 にもまた依繋する、卽ポテンシャル $g'_{\mu\nu}$ q'_s は時間 $x_4' = 0$ まで靜止し、それからしかしそれの部分に於て運動をはじめるところの一つの電子をあらはす。

そうではあるけれどもしかし私は、因果律を新しき物理學に於ても亦維持せんがためはたゞ相對

性原理(6)の根底によこたはれる理念の一つの一層鋭い把捉を必要とするばかりであることを信ずる新しい相對性原理の本質に從應して、吾々は卽單に物理學の一般法則に對してのみ不變性を希求せねばならぬばかりなく、物理學に於ける各々の個々的主張(Einzelaussage)にも亦、それが物理的意味を持つべきならば、不變的性質を要求せねばならぬ。――このことは各々の物理的事實は終局は測條と光時計卽不變量的性質を有する器具によつて確定せらるべきものであらねばならぬと云ふことゝ一致することである。恰も曲線及曲面論に於て、それに對して曲線及曲面を媒介變數であらはすことが選ばれてあるところの一つの主張が、もし媒介變數の任意の變換に對して不變にとどまらないならば卽一つの不變な形にまでもたらされないならば、曲線及曲面に對して何等の幾何等的意味を持たぬとひとしく、物理學に於てもまた座標系の任意の變換に對して不變にとどまらぬところの主張は物理的に無意味と表示せられねばならぬたとへば上に觀察せられたる靜止せる電子の場合に於て、それがたとへば時間 $x_4=1$ まで靜止するといふ主張は物理的に何等の意味を有せぬ、何者この主張は不變でないからである。

さて因果律に關して云へば、現在に對して或與へられたる座標系に於て物理量と、その時間的導來函數が知られたりとするとその時ある主張はそれがそれに際して丁度現在に對して用ひられた座標が不變にとどまるが如きあらゆる變換に對して不變であるときのみ物理的意味を有する。私はこの樣な主張は未來に對して悉く一義的にきまつて居ると云ふこと換言すれば因果律は次の如き理解に於て妥當すると云ふことを主張する。現在に於ける十四の物理的ポテンシャル $g_{\mu\nu}$ q_s を知ることから、未來に對するそれらについてのあらゆる主

張は、物理的意味を有する限り、必然的に且一義的に導かれる。

この主張を證明するために吾々はガウス時—空座標系を用ひよう。第一回の報告の根本方程式(4)へ(33)を導入すると十のポテンシャル

(34) $g_{\mu\nu}(\mu,\nu=1.2.3)$　$q_s(s=1.2.3.4)$

に對して同數の偏微分方程式の體系が得られる。これらを $x_4=0$ に對して與へられたる始値をもとゝして積分するときは一義的に $x_4>0$ に對する(34)の値を見出す。ガウス座標系はそれ自身一義的に確定して居るが故に、この座標系に關係せしめられるかのポテンシャル(34)についての主張もまた不變の性質を有する。

そのうちに於て物理的に意味ある卽不變的な主張が數學的にあらはされる式は非常に多樣である。

第一。このことは一つの不變的な座標系によつて起りうる。まへに用ひられたるガウスのものと同樣にその樣な目的に對しては知られたるリーマンの、而してそこに於ては電氣が靜止と單位の密度に變換せられてあらはれたるところの時—空座標が使用られうる。$f(q)$が第一回の報告の終りに於ての如くハミルトンの原理にあらはれてくる不變量

$$q=\sum_{kl} p_k q_l g^{kl}$$

の函數をあらはすとすれば、

$$r^s=\frac{\partial f(q)}{\partial q_s}$$

は電氣の四臂密度である。この四臂密度は一つの逆變ヴェクトルをあらはし從つて容易に分かる如くたしかに(0.0.0.1)になる樣に變換し得る。このことが行はれたならば、四つの方程式

$$\frac{\partial f(q)}{\partial q_s}=0 \quad (s=1.2.3) \qquad \frac{\partial f(q)}{\partial q_4}=1$$

から四臂ポテンシャル q_s の四つの成分は $g^{\mu\nu}$ によつ

てあらはし得、しかしてこの或は二つの最初の座標系の一につ於ける $g_{\mu\nu}$ の間の各關係はしかるときは一つの不變的主張 (eine invariante Aussage) である。根本方程式の特殊解 (Partipularlösungen) に對しては特殊の不變的座標系がありうる、それ故に例へば下にとりあつかはるべき點對稱的な重力の場の場合に於て $r\ \theta\ \varphi\ t$ は回轉にまでは不變的であるところの座標系をかたちづくる。

第二。それによると、そのうちに於て十四のポテンシャル $g_{\mu\nu}$ q_s が將來に對してあるきまつた値を有し或はあるきまつた關係を滿足するところの一つの座標系が見出される主張 (Aussage) は常に不變的なもので有且從つて物理的に意味を有する。その樣な主張に對する數學的不變的表現は座標の消去によつてかの關係から得られる。一例をば上に觀察せられたる靜止せる電子の場合が呈供する因果律の本質的にして物理的に意味ある內容はこゝでは次の如き主張のうちにあらはさる。卽「時間 $x_4 \leqq 0$ に對して靜止せる電子は時ー空座標系の適當なる選擇に際して未來 $x_4 > 0$ に對しても亦絕えず彼のあらゆる部分に於て靜止する」

第三。一つの主張は、それが各々の任意の座標系に對して妥當するものであるべきならば、また不變であり從つて常に物理的意味を有する。これに對する一例はアインシュタインの發散性質の衝擊エネルギー方程式 (Implus–Energiegleichung) である。よしアインシュタインのエネルギーは不變的性質を持たず而して彼によつて立てられた、エネルギーの成分に對する微分方程式も方程式體系として決して共變的でないにしても、彼等のうちにふくまれた主張卽彼等が各々の任意の座標系に對して滿足せらるべきであるといふ主張 (Aussage) は不變的な要求であり從つて一つの物理的意味を有する。

私の解釋に從へば物理學は一つの四次元の擬似幾何であり、それの私の第一回の報告の根本方程式(4)及(5)による（Massbestimmung）$g_{\mu\nu}$は電磁氣的量に卽物質に結びつけられて居る。この認識とともに一つの古き幾何學的問題卽ユークリッド幾何學――それについて吾々は數學からただそれが一つの論理的に矛盾無き建築であることを知るのみである――が現實に於ても亦妥當性を有するかどうか、若し有するとせば如何なる意味に於てであるかといふ問題が解決にまで熟する。

絕對なる時間概念を伴へる古き物理學はユークリッド幾何學の命題を受取つて、それをばあらかじめ各々の特殊なる物理的理論の根底に置いて居た。ガウスも亦たゞ少しだけ違つたやりかたをしたばかりであつた。彼は絕對時間を保留しつゝユークリッド幾何學の命題から平行線公理だけをとりのぞくことによつて假設的に一つの非ユークリッド物理學を構成した。しかし大なる廣袤を持つたところの三角形の角の測定はこの非ユークッド物理學の妥當せざることを彼に示した。

アインシュタインの一般相對性原理の新しい物理學は幾何學に對して全く別の立場をとる。それは本來的な物理的法則を演繹しようとてユークリッド幾何その他のきまつた幾何をあらかじめ根底に置くようなことをしない。物理學の新しい理論は、私が私の第一回の報告に於て示した如く、一度に同一のハミルトン原理によつて幾何と物理的法則卽根本方程式(4)と(5)とを與へる、これらの方程式は Massbestimmung $g_{\mu\nu}$が――同時に重力の物理現象の數學的表現が――如何に電氣力學的ポテンシャルの値q_sと連結して居るかを敎へるものである。

ユークリッド幾何は現代の物理學に緣なき遠方法則である (ein der modernen Physik fremdartiges

F.ringesez) 相對性原理がユークリッド幾何をば物理學に對する一般的豫想として拒否するときそれは却つて幾何學と物理學が同樣の性質を持つものであり一つの科學として共通の基礎の上に存するといふことを敎へる。

上に云はれた幾何學の問題は四次元のユークリッド的擬似幾何

(35) $g_{11}=1,\quad g_{22}=1,\quad g_{33}1=,\quad g_{44}=-1$

$g_{\mu\nu}=0\quad(\mu\neq\nu)$

は物理の根本方程式の一つの解、唯一の正則解であるかどうか、もしさうであるならば如何なる豫想のもとにおいてのことであるかと云ふことを探究することに歸着する。

私の第一回の報告の根本方程式はその際になされたる假定の故に、

$$\left[\sqrt{g}K\right]_{\mu\nu}+\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}=0$$

となる。こゝに

$$\left[\sqrt{g}K\right]_{\mu\nu}=\sqrt{g}\,(K_{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}Kg_{\mu\nu})$$

である。(35)の値を入れると上のものは

(36) $\left[\sqrt{g}K\right]_{\mu\nu}=0$

となる。

$q_s=0\quad(s=1.\ 2.\ 3.\ 4)$

に對しては

$$\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}=0$$

となる。即すべての電氣が遠けられるときは擬似ユークリッド幾何が可能である。このものが今の場合にも亦可能であるかどうか、換言すれば、それぞれある附加條件のもとに値(35)と座標の變換によつてそれから出てくる$g^{\mu\nu}$の値は方程式(36)の唯一の正則解であるかと云ふ問は數學的なる、こゝでは一般的に探求することの出來ないところの問題

である。私はこの問題に關する二三の特殊な考察をすることにまで自分を制限しよう。

このために私は再び私の第一回の報告に於ける原本的なる世界座標

$$\omega_1=X_1,\ \omega_2=X_2,\ \omega_3=X_3,\ \omega_4=X_4$$

に立ちかへつて $g^{\mu\nu}$ にそれに相當する意味を與へる擬似ユークリッド幾何の場合には吾々は

$$g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}$$

を有し、こゝに

$$\delta_{\mu\nu}=1\ ,\quad \delta_{\mu\nu}=0\quad (\mu\neq\nu)$$

である。この擬似ユークリッド幾何に近接せる各々の Massbestimmung に對して數式

$$(37)\quad g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+\varepsilon h_{\mu\nu}+\cdots\cdots$$

が妥當する、こゝにεは零に向つて收斂する量であり$h_{\mu\nu}$はω_sの函數である。(37)なる Massbestimmung について私は次の二つの假定をする。

一、$h_{\mu\nu}$は變數ω_4に獨立である。

二、$h_{\mu\nu}$は無限に於て一つのある正則的な態度を示す。(37)がすべてのεに對して微分方程式(36)を滿足すべきならば$h_{\mu\nu}$は必然にある齊一次的な第二階級の偏微分方程式を滿足せねばならぬと云ふことが歸結する。この微分方程式は、若しアインシュタイン(c)に從つて

$$(38)\quad h_{\mu\nu}=k_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_s k_{ss}\ ,\quad (k_{\mu\nu}=k_{\nu\mu})$$

を入れ、十の函數$k_{\mu\nu}$の間に四つの關係

$$(39)\quad \sum_s \frac{\partial K_{\mu\nu}}{\partial\omega_s}=0\quad (\mu=1.2.3.4)$$

を假定するときは次の如きものとなる、

$$(40)\quad \Box k_{\mu\nu}=0$$

こゝでは省略のために

$$\Box=\sum_s \frac{\partial^2}{\partial\omega_s{}^2}=0$$

が用ひられてある。

(63)の關係は數式(38によつて函數$h_{\mu\nu}$に對する制限的假定である、しかし私は變數$\omega_1\ \omega_2\ \omega_3\ \omega_4$の一つの適當なる微小變換によつて如何樣にして、常に變換後の相應する函數$h'_{\eta\nu}$に對してかの制限的假定が滿足せられると云ふことが達せられ得ることかを示そうと思ふ。

この目的のためにそれぞれ微分方程式

$$(41)\qquad \square\varphi_\mu=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega_\mu}\sum_\nu h_{\nu\nu}-\sum_\nu\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial\omega_\nu}$$

を滿足する四つの變數の函數$\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3\ \varphi_4$をきめる。

微少變換

$$\omega_s=\omega'_s+\varepsilon\varphi_s$$

によつて$g_{..}$は

$$g'_{\eta\nu}=g_{\dots}+\varepsilon\sum_\alpha g_{\alpha\nu}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial\omega_\eta}+\varepsilon\sum_\alpha g_{\alpha\mu}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial\omega_\nu}+\cdots$$

に或は(37)の故に

$$g'_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}+\varepsilon h'_\nu+\cdots\cdots\cdots$$

に移り行く。こゝに

$$h'_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial\omega_\mu}+\frac{\partial\varphi_\eta}{\partial\omega_\nu}$$

とおかれてある、今

$$k_{\mu\nu}=h'_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_s h'_{ss}$$

を選ぶならばこの函數は(41)の故にアインシュタインの條件式(39)を滿足し、

$$h'_{\mu\nu}=k_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_s k_{ss}\qquad(k_{\mu\nu}=k_{\nu\mu})$$

が得られる。

上になされたることに從へば、見出されたる$k_{\eta\nu}$に對して妥當すべき微分方程式(40)は假定一によつて、

$$\frac{\partial^2 k_{\mu\nu}}{\partial\omega_1^2}+\frac{\partial^2 k_{\mu\nu}}{\partial\omega_2^2}+\frac{\partial^2 k_{\mu\nu}}{\partial\omega_3^2}=0$$

にうつり行き、而して假定二が──適當に理解するとき──$k_{\mu\nu}$は無限に於て定數に近くといふことを推論することを許容するが故に、それらは一般に定數であらねばならぬといふことが即次のことが歸結する。「假定一、二のもとに擬似ユークリッド幾何の Massbestimmung の變分によつては、同樣に擬似ユークリッド的でなくしかも同時に一つの電氣のない世界に相當するところの正則的な Massbestimmung を得ることは可能でない。

偏微分方程式を積分することはアインシュタイン(a)及シュワルツシルト(e)によつてはじめて取扱はれたところの一つの他の場合に於てもなほ成功する。私は次に於て無限に於ける重力ポテンシャル$g_{\mu\nu}$についての何等の假定もなさずその上また私の後の探求に對しても利益を與へるところの一つの道をこの場合に向つて與へよう。$g_{\mu\nu}$についての假定は次の如きものである。

一、Massbestimmung は一つのガウス座標系に關係せしめられてある──たゞその際g_{44}はなほ任意なものとせられる、即

$$g_{14}=0,\quad g_{24}=0,\quad g_{34}=0$$

である。

二、$g_{\mu\nu}$は時間座標x_4から獨立である。

三、重力$g_{\mu\nu}$は座標の原點に關して點對稱的である。

シュワルツシルトに從へばこの假定に相當する空間極座標に於ける最も一般的なMassbestimmungは

$$\omega_1=r\cos\theta$$
$$\omega_2=r\sin\theta\cos\varphi$$
$$\omega_3=r\sin\theta\sin\varphi$$
$$\omega_4=l$$

とおかれるとき

$$(42)\quad F(r)\,dr^2+G(r)\,(d\theta^2+\sin\theta^2\,d\varphi^2)$$

$$+H(r)\,dl^2$$

なる式によつてあらはされる、こゝに$F(r)$ $G(r)$ $H(r)$はrのなほ勝手な函數である。もし

$$r^* = \sqrt{G(r)}$$

とおくときは吾々はまへと同樣の權利をもつてr^* θ・φを空間極座標とすることが出來る。(42)のうちにrの代りにr^*を導入して然る後に$*$なる記號をのぞくと

$$(43) \qquad M(r)\,dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin\theta^2\, d\varphi^2 + W(r)\,dl^2$$

なる式ができる、こゝに$M(r)$, $W(r)$はrの二つの本質的に勝手な函數を意味する。問題は、これらの函數が微分方程式(36)が滿足せられる樣に、最も一般的な仕方に於てきめられるかどうか、られるなら如何にしてかといふことである。

この目的のためには私の第一回の報告に於て與へられたところの知られたる式$K_{\mu\nu}$・Kが計算せられねばならぬ。このことに向つての第一歩は積分

$$\int\left[M\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + W\left(\frac{dl}{dp}\right)^2\right]dp$$

の變分によつて測地線の微分方程式を立てることである。吾々はラグランジュ方程式として次のものを得る。

$$\frac{d^2r}{dp^2} + \frac{1}{2}\frac{M'}{M}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{r}{M}\left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 - \frac{r}{M}\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{W'}{M}\left(\frac{dl}{dp}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2\theta}{dp^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dp}\frac{d\theta}{dp} - \sin\theta\cot\theta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dp^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dp}\frac{d\varphi}{dp} + 2\cot\theta\frac{d\theta}{dp}\frac{d\varphi}{dp} = 0,$$

$$\frac{d^2l}{dp^2} + \frac{W'}{W}\frac{dr}{dp}\frac{dl}{dp} = 0,$$

こゝに於て及次の計算に於て記號$'$はrに關する導來函數を意味する。測地線の一般微分方程式

$$\frac{d^2\omega_3}{dp^2}+\sum_{\mu\nu}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ r\end{Bmatrix}\frac{d\,\omega_\eta}{dp}\,\frac{d\,\omega_\nu}{dp}=0$$

と比較することによつて括孤記號$\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ s\end{Bmatrix}$に對しては次の如き値がとられる――その際消えるものはこゝに掲げることを省く。

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\,\frac{M'}{M},\quad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=-\frac{r}{M},$$

$$\begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix}=-\frac{r}{M}\sin^2\theta,\quad \begin{Bmatrix}44\\1\end{Bmatrix}=-\frac{1}{2}\,\frac{W'}{W},$$

$$\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=\frac{1}{r},\quad \begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix}=-\sin\theta\cos\theta,$$

$$\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix}=\frac{1}{r},\quad \begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix}=\cot\theta,\quad \begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\,\frac{W'}{W}$$

これによつて吾々は次のものをつくる。

$$\begin{aligned}K_{11}=&\frac{\partial}{\partial r}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\\
&+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}31\\3\end{Bmatrix}\\
&+\begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}41\\4\end{Bmatrix}\\
&-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right)\\
=&\frac{1}{2}\,\frac{W''}{W}+\frac{1}{4}\,\frac{W'^2}{W^2}-\frac{M'}{rM}-\frac{1}{4}\,\frac{M'W'}{M\,W}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_{22}=&\frac{\partial}{\partial\theta}\begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial r}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\\
&+\begin{Bmatrix}21\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}32\\3\end{Bmatrix}\\
&-\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}14\\4\end{Bmatrix}\right)\\
=&-1-\frac{1}{2}\,\frac{rM'}{M^2}+\frac{1}{M}+\frac{1}{2}\,\frac{rW'}{MW}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_{33}=&-\frac{\partial}{\partial r}\begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial\theta}\begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix}\\
&+\begin{Bmatrix}31\\3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}32\\3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}33\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}13\\3\end{Bmatrix}\\
&+\begin{Bmatrix}33\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}23\\3\end{Bmatrix}\end{aligned}$$

$$-\genfrac\{\}{0pt}{}{33}{1}\left(\genfrac\{\}{0pt}{}{11}{1}+\genfrac\{\}{0pt}{}{12}{2}+\genfrac\{\}{0pt}{}{13}{3}+\genfrac\{\}{0pt}{}{14}{4}\right)$$

$$-\genfrac\{\}{0pt}{}{33}{2}\genfrac\{\}{0pt}{}{23}{3}$$

$$=\sin^2\theta\left(-1-\frac{1}{2}\ \frac{rM'}{M^2}+\frac{1}{M}+\frac{1}{2}\ \frac{rW'}{MW}\right)$$

$$K_{44}=-\frac{\partial}{\partial r}\genfrac\{\}{0pt}{}{44}{1}+\genfrac\{\}{0pt}{}{41}{4}\genfrac\{\}{0pt}{}{44}{1}+\genfrac\{\}{0pt}{}{44}{1}\genfrac\{\}{0pt}{}{41}{4}$$

$$-\genfrac\{\}{0pt}{}{44}{1}\left(\genfrac\{\}{0pt}{}{11}{1}+\genfrac\{\}{0pt}{}{12}{2}+\genfrac\{\}{0pt}{}{13}{3}+\genfrac\{\}{0pt}{}{14}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ \frac{W''}{M}-\frac{1}{4}\ \frac{M'W'}{M^2}-\frac{1}{4}\ \frac{W'^2}{MW}+\frac{W'}{rM}$$

$$K=\sum_s g^{ss}K_{ss}=\frac{W''}{MW}-\frac{1}{2}\ \frac{W'^2}{MW^2}-2\frac{M'}{rM^2}$$

$$-\frac{1}{2}\ \frac{M'W'}{M^2W}-\frac{2}{r^2}+\frac{2}{r^2M}+2\frac{W'}{rMW}\quad;$$

$$\sqrt{g}=\sqrt{MW}\,r^2\sin\theta$$

により、

$$K\sqrt{g}=\left\{\left(\frac{r^2W'}{\sqrt{MW}}\right)'-2\frac{rM'\sqrt{W}}{M^{\frac{3}{2}}}\right.$$

$$\left.-2\sqrt{MW}+2\sqrt{\frac{W}{M}}\right\}\sin\theta$$

しかして

$$M=\frac{r}{r-m}\qquad W=\omega^2\frac{r-m}{r}$$

とおけば——こゝで m と ω とは r の知られざる函數となる——吾々は結局

$$K\sqrt{g}=\left\{\left(\frac{r^2W'}{\sqrt{MW}}\right)'-2\omega m'\right\}\sin\theta$$

を得、それによつて四重積分

$$\iiiint K\sqrt{g}\,dr\,d\theta\,dp\,dl$$

の變分は單純積分

$$\int\omega m'dr$$

の變分と同値であり、ラグランジュ方程式

$$(44)\qquad m'=0$$

$$\omega'=0$$

に導く。これらの方程式が皆 $K_{\mu\nu}$ の消滅を條件づけ

ることは容易に確信せられる。それ故に彼等はなされたる假定一、二、三のもとに於ける方程式(36)の最も一般的な解をあらはす。(44)の積分として $m=\alpha$ (αは定數)及 $\omega=1$ をとれば――このことは明かに何等の本質的制限を意味せぬ――(43)から $l=it$ に對して、求められたる Massbestimmung がシュワルツシルトによつてはじめて見出された形に於てあらはれる。即

$$(45)\quad G(dr, d\theta, d\varphi, dl)=\frac{r}{r-\alpha}dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2-\frac{r-\alpha}{r}dt^2$$

$r=0$ に際してこの Massbestimmung の特異點は $\alpha=0$ がとられるときにのみなくなる。換言すれば擬似ユークリッド幾何の Ma sbest mmung は一、二、三の假定に際して、一つの電氣なき世界に相當するところの唯一の正則的な Massbestimmung である。

$\alpha=0$ に對しては $r=0$ が、而して正なるαに對しては $r=\alpha$ がまた、そこでは Massb s immung が正則的でない點として示めされる。その際私は一つの點に於ける Massbes immung 或は重力の場 $g_{\mu\nu}$ を次の如き場合に正則的と名づける、即可逆的に一義的な變換によつて、それに對して相當する函數 $g'_{\mu\nu}$ がかの點に於て正則的であるが如き、換言すればそこ及その附近に於て常に連續的に任意の回數だけ微分し得て、一つの零とは異なつた行列式 g' を有するが如き座標系を導入することが可能である場合。

私の理解するところによれば物理の根本方程式の正則解のみが現實を直接にあらはすのである」けれども、しかも正則的ならぬ點を有する解は正に特性的な正則解へ接近することへの重要なる數學的手段である――而してこの意味に於てアインシュタイン及シュワルツシルト先蹤に從つて、$r=0$ 及

$r=\alpha$ に對して正則的ならぬ Massbestimmung (45) は零點の周圍に於て點對稱的に配分せられたる重力をあらはす式と見らるべきである。(f)

根本方程式の導來函數の代りとしてアインシュタインに從つて次の二つの公理が役立つ。重力の場における質點の運動は時間線であるところの一つの測地線によつてあらはれる。(g)

重力の場における光運動は一つの測地線によつてあらはされる。

質點の運動をあらはすところの世界線は常に一つの時間線であるから、容易に理解せられる如く質點をば本來的時――空變換によつて靜止にまでもたらすことが常に可能である。換言すればそれに關して質點が絕えず靜止するところの本來的時――空座標系が常に存在する。

中心的重力場(45)に對する測地線の微分方程式は

$$\delta\int\left[\frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2+r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2-\frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2\right]dp=0$$

なる變分問題から出てくるのであつて、知られたる手續によつて次の如きものとなる。

$$(46)\quad \frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2+r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2-\frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2=A$$

$$(47)\quad \frac{d}{dp}\left(r^2\frac{d\theta}{dp}\right)-r^2\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2=0$$

$$(48)\quad r^2\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dp}=B$$

$$(49)\quad \frac{r-\alpha}{r}\,\frac{dt}{dp}=C$$

こゝに A・B・C は積分定數を意味する。

まづ私は $r\theta\varphi$―空間の軌道曲線は常に重力の中心を通る表面の上にあると云ふことを證明する。

この目的のためにφの函數としてのθに對する微分方程式を得るべく微分方程式(47)と(48)から媒介變數Pを消去する。まづ恒等的に

(50)
$$\frac{d}{dp}\left(r^2\frac{d\theta}{dp}\right)=\frac{d}{dp}\left(r^2\frac{d\theta}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dp}\right)$$
$$=\left(2r\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\theta}{d\varphi}+r^2\frac{d^2\theta}{d\varphi^2}\right)\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2$$

である。他方(48)はPに關して微分すると

$$\left(2r\frac{dr}{d\varphi}\sin^2\theta+2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2$$
$$+r^2\sin^2\theta\frac{d^2\varphi}{dp^2}=0$$

を與へる。これから$\frac{d^2\varphi}{dp^2}$の値を取り出して(50)の右邊に入れると

$$\frac{d}{dp}\left(r^2\frac{d\theta}{dp}\right)=\left(\frac{d^2\theta}{d\varphi^2}-2\cot\theta\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2\right)r^2$$
$$\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2$$

となる。從つて方程式(47)は

$$\frac{d^2\theta}{d\varphi^2}-2\cot\theta\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2=\sin\theta\cos\theta$$

なる形をとり、このものはそれの一般積分が

$$\sin\theta\cos(\varphi+a)+b\cos\theta=0\quad(a,\ b\text{は積分定數})$$

となるところの微分方程式である。

かくしてのぞまれた證明がなされ從つて測地線のよりすゝんだ議論に向つてはたゞ値$\theta=\frac{\pi}{2}$を考察に入れれば充分である。しかるときは變分問題は次の如く簡單となり

$$\delta\int\left\{\frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2-\frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2\right\}dp=0$$

これから出てくるところの三つの第一階級の微分方程式は

(51)
$$\frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2-\frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2=A$$

(52) $r^2\dfrac{d\varphi}{dp}=B$

(53) $\dfrac{r-\alpha}{r}\ \dfrac{dt}{dp}=C$

である。rに對するラグランジュ微分方程式

(54) $\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{2r}{r-\alpha}\ \dfrac{dr}{dp}\right)+\dfrac{\alpha}{(r-\alpha)^2}\ \left(\dfrac{dr}{dp}\right)^2$

$-2r\left(\dfrac{d\varphi}{dp}\right)^2+\dfrac{\alpha}{r^2}\left(\dfrac{dt}{dp}\right)^2=0$

は必然に前の方程式と連結して居つて(51)(52)(53)(54)の左邊をそれぞれ〔1〕、〔2〕、〔3〕、〔4〕を以てあらはすときは吾々は恒等的に

(55) $\dfrac{d[1]}{dp}-2\dfrac{d\varphi}{dp}\ \dfrac{d[2]}{dp}+2\dfrac{dt}{dp}\ \dfrac{d[3]}{dp}$

$=\dfrac{dr}{dp}[4]$

を持つ。

$C=1$をとつて——このことは媒介變數pに一つの定數を乘ずることに歸着する——(51)(52)(53)からpとtとを消去するとアインシュタインとシュワルツシルトが見出したところφの函數としての$\rho=\dfrac{1}{r}$についての微分方程式

(56) $\left(\dfrac{d\rho}{d\varphi}\right)^2=\dfrac{1+A}{B^2}-\dfrac{A\alpha}{B^2}\rho-\rho^2+\alpha\rho^3$

をうる。この方程式は極座標に於ける質點の軌道曲線をあらはす。この方程式から$B=\sqrt{\alpha}\,b$, $A=-1+\alpha a$に際しての$\alpha=0$に對する第一次の近似値に於てケプレル運動が出て來て、第二次の近似値は現代の光輝ある發見の一つ即水星の近日點の轉進の計算にまで導く。

前の公理によつて一つの質點の運動に對する世界線は時間線であらねばならぬ、從つて時間線の定義から$A<0$なることが歸結する。

今吾々は特に圓即$r=const$が一つの運動の軌道曲線であるかどうかを問ふ。恒等式(55)はこの場合に——$\dfrac{dr}{dp}=0$なるがために——方程式(54)は決

して(51)(52)(53)の歸結でないと云ふことを示す。それ故に最後の三方程式は運動をきめるに充分でなくて、(52)(53)(54)は滿足せられることを必要とする方程式である。(54)から

(57) $-2r\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2+\frac{\alpha}{r^2}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2=0$

が導かれる、卽圓軌道に於ける速度に對して

(58) $v^2=\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{\alpha}{2r}$

となる。他方(51)は $A<0$ なるの故に不等式

(59) $r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-\frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2<0$

を或は(57)を用ふることによつて

(60) $r>\frac{3\alpha}{2}$

を與へる。これから(58)によつて圓の上を運動をして居るところの質點の速度に對して(h)不等式

(61) $v<\frac{1}{\sqrt{3}}$

が歸結する。

不等式(60)は次の如き解釋を許す。(58)により圓運動をせる質點の角速度は

$$\frac{d\varphi}{dt}=\sqrt{\frac{\alpha}{2r^3}}$$

である。それ故にr、φの代りに零點のまはりを一緒に回轉しつゝある座標系の極座標を導入しようと欲するならば

$$\varphi \text{ を } \varphi+\sqrt{\frac{\alpha}{2r^3}}\,t$$

とすればよい。M ssbestimmung

$$\frac{r}{r-\alpha}dr^2+r^2d\varphi^2-\frac{r-\alpha}{r}dt^2$$

は當該の時―空變換によつて

$$\frac{r}{r-\alpha}dr^2+r^2d\varphi^2+\sqrt{2\alpha r}\,d\varphi dt+\left(\frac{\alpha}{2r}-\frac{r-\alpha}{r}\right)dt^2$$

に移り行く。

こゝで(60)によつて不等式 $g_{44}<0$ は滿足せられる而して殘りの不等式(31)も亦妥當するが故に質點の靜止へまでの如上の變換は一つの本來的時空變換である。

他方(61)に於て見出されたる圓運動せる質點の速度の上限 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ も亦一つの簡單なる意味を有する光の運動に關する公理によつてその運動は一つの測地的零線によつてあらはされる。從つて(51)のうちに、$\varDelta=0$ を入れると圓運動せる光の運動に對して不等式(59)の代りに方程式

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2-\frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2=0$$

が得られる。(57)と一所にするとこれから光軌道の半徑に對して

$$r=\frac{3\alpha}{2}$$

が出て來て圓運動せる光の速度に對して上限として(61)にあらはれたる値

$$v=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

が出て來る。

一般的に吾々は光軌道に對して(56)から $\varDelta=0$ なるによつて微分方程式

$$(62)\qquad \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2=\frac{1}{B^2}-\rho^2+\alpha\rho^3$$

を得る。これは $B=\frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha$ に對して圓 $r=\frac{3\alpha}{2}$ をポアンカレーの圓輪 (Zykel) として有する――そのときには $\rho-\frac{2}{3\alpha}$ が右側に二重因子としてあらはれると云ふ事情に相當して――。實にこの場合微分方程式(62)――より一般的な方程式(56)には相當したことが妥當する――はポアンカレーの一般的圓輪論 (Zykeltheorie) が要求した如く、かの圓に螺線をなして無制限に近づくところの無限に多くの積分曲線を有する。

無限から來る一つの光線を考へてその重力の中心から最も短い距離に對してを小さくとすれば光線は近似的にその中心に焦點を有する一つの双曲線の形を有する。(a)

圓の上の運動と相ひ對するものは重力の中心を通る直線上の運動である。(54)に於て $\varphi=0$ とおきしかる後(53)(54)から p を消去するとこの運動に對する微分方程式が得られる、かくしてでてくる微分方程式は(51)から導かれる積分

$$(64)\quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^2+A\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^2$$

とともに

$$(63)\quad \frac{d^2r}{dt^2}-\frac{3\alpha}{2r(r-\alpha)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{\alpha(r-\alpha)}{2r^3}=0$$

である。(63)により速度の絶對値 $\left|\frac{dr}{dt}\right|$ が $\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{r-\alpha}{r}$ より小なるか或は大なるかに從つて加速度は負或は正となる、換言すれば重力が牽引的に或は拒斥的に作用する。

光に對しては(64)により

$$\left|\frac{dr}{dt}\right|=\frac{r-\alpha}{r}$$

である。眞直に中心に向けられたる光は後の不等式（$\left|\frac{dr}{dt}\right|>\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{r-\alpha}{r}$ のこと）に相當することゝして、常に拒斥せられる、その速度は $r=\alpha$ に際しての0から $r=\infty$ に際しての1まで增ます。

α も $\frac{dr}{dt}$ も小なるときは(63)は近似的にニウトンの方程式

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{\alpha}{2}\ \frac{1}{r^2}$$

に移り行く。（終）

註

（a） Räumliche Variationsproblemen mit symmetrisches Transversalitätaedingung, Leibziger Berichte, Math.—phys. K I. 68 (1916) S. 50.

（b） アルベルト・アインシュタインは彼のもとの、今はすてられたる理論に於て(Sizungsberichte der Akademie zu Berlen. 1914 S. 1067)實に古き理解に於ける因果律を救ふために $g_{\mu\nu}$ に對して不

變的ならぬ方程式を特に要請した。

（c） Näherungsweise der Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Berichte d. Akad, zu Berlin 1916 S. 688.

（d） Perihelbewegung des Merkur. Sitzungsber d, Akad. zu Berlin 1915 S. 831,

（e） Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes. Sitzungsber. d. Akad. zu Berlin. 1916. S, 189.

（f） シュワルツシルトがした樣に點 $r=\alpha$ を零點に變換することは、私の考へによると、適當でない。その上シュワルツシルドの變換はこの目的を遂すべき最も簡單なものではない。同樣の意味に於て質點をまた一點のまはりの電氣のある配分の極限の場合として理解せらるべきである。しかしながら私はこゝではそれの運動方程式を私の物理の根本方程式から誘導することはやらない光運動に對する微分方程式の問題についても同じこと。

（g） この最後の制限をおくところの附加へはアインシュタインに於てもシュワルツシルトに於ても存しない。

（h） それに從へば圓軌道上の質點の速度は軌道半徑の小さくなるに際して極限 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ に近づくのであるところのシュワルシルト結果は不等式 $r>\alpha$ に相當するものであつて上のことによつて至當でない。

（i） 微分方程式(56)及(62)の詳細なる議論はまもなくこゝにあらはれるファウ・フレエデリックの報告の課題であるであらう。

專門的知識を缺くことゝ、原論文が充分に利用し得なかつたことゝのために、この飜譯に意外の誤謬があるかも知れないことを私はおそれる。識者あつて叱正の勞をいとはざれば望外の幸である。(譯者)

寄贈書籍雜誌

哲學雜誌、丁酉倫理講演集、心理研究、東洋哲學、六合雜誌、日華公論、教育研究、內外教育評論、教育、教育界、教育學術界教育時論、國際聯盟、精神運動、三田文學、見眞、講座、東洋思想研究、支那學