無限に就いて（ダヴイット・ヒルバート）

下村寅太郎

これは D. Hilbert, Über das Unendliche (Mathematische Annalen. 95. Bd. 2. Heft. 1925) の抄譯である。千九百二十二年以來氏が發表し始めた數學基礎論に關する第三番目の、而して私の知る限りに於ては最近の、論文である。その最初の論文 "Neubegründung der Mathematik" Erste Mitteilung (Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 1922) に於ては算術の公理體系の非矛盾性の證明を試み、第二の論文 "Die logischen Grundlagen der Mathematik" (Math, Ann, Bd. 88. 1922) に於ては所謂超限公理の導入が矛盾を含まないことの證明を試みる、そしてこの第三の論文に於てはその方法の問題を取り扱ふ。然し何れも夫々の問題の素描的論文であつて整備したものではない。本來この基礎問題は氏の古典的著作『幾何學の基礎』(千八百九十九年)に出發する公理主義の體系を完結しやうとして爾來今日に到つたものであるが、同時に、千九百七年果然和蘭の數學者 J. E. Brouwer によつて唱へられた徹底した直觀主義(更に Hermann Weyl がこれに加つた)に對する批評と自衞とをも目的としてゐる。これら當代の代表的數學者の論議は正さしく近來の偉觀であらう。我々は老境に入つて益々熾んなるこの學界の耆宿に

對して遙かに尊敬の意を致したい。

この論文の後半はその創案にかゝる「證明論」の方法を集合論の古典的問題とも言ふべき連續體の可算性（アブッエールバールカイト）の問題に適用した試みであるが、(而してこの論文が提供する新しき部分はこれに外ならないのであるが) 内容上著しく特殊的となる故に後の機會に譲ることゝした。

ワイヤアストラスはその巨匠的な鋭利さを振つた批判によつて數學的解析に確固たる基礎を造り上げた。就中、極小・函數・微係數の概念を明瞭にすることによつて微積分學に猶ほ附着してゐた缺陷を除去し、更に微分に關する總べての曖昧な觀念を洗淨し、微分概念から生じる困難を終局的に征服した。今日、無理數や一般に極限の概念に基づく推理法を遣る解析に於て、完全な一致や確實性が嚴存し、微分及び積分方程式論に關する極はめて複雜な問題の中にも猶ほあくまで總べての結果の調和が存在するのは、これは本質的にはワイヤアストラスの學問的活動の功績である。然し猶ほ解析の基礎に關する論議は、ワイヤアストラス的な微積分學の基礎付けを以て完結してはゐない。その理由は、數學に對する「無限」の意味が未だ剩す所なく明にされてゐなかつたと言ふ點にある。ワイヤアストラスの解析に於て無限小や無限大は有限量間の關係に還元されることによつて消去されはした、然し「無限」は猶ほ依然として實數を定義する無限數列の中に、更に又、全く「一の完成完結して現前する全體」として解釋される實數體系の概念の中に現はれてゐる。この解釋を表現してゐる論理的推理の形式、例へば、一定の性質を有する總べての實數、或

は、一定の性質の實數の存在を取り扱ふ論理的推理の形式は、ワイヤアストラスの解析の基礎付けでは全然無制限的に要求され常に反復して適用されてゐる。このことによつてワイヤアストラスの理論中に猶ほ復たも「無限」がその鋭い批判に觸れられずに隱覆された形で入り込むことが出來たのであつた。そしてそのために、完結的に解析の基礎付けを明にすることを妨げてゐるものが「無限」の問題となるのである。

それ故、宛も微積分學の極限過程の際に無限小及び無限大の意味での「無限」が單なる語法として表はされた如く、我々は上述の推理法に今猶ほ存する無限的全體の意味での「無限」をも或る單なる假象的なるものとして認識せねばならぬ。そして、無限小の處理が、それと全然同一のことを爲しとげ、全然同一のうるはしき形式的關係に導く有限の過程で置き換へられた如く、一般に「無限」に關する推理法は、正しく同一のことを爲しとげる卽ち同一の證明法同一の推理法を可能ならしめる有限的程過によつて置き換へられねばならぬ。――これが私の理論の意圖である。それの目的は數學的方法の決定的確實性を打ち立て、ワイヤアストラスの解析の基礎付けが目がけ、それに必然的本質的な進出を果したが、猶ほ到達することの出來なかつたそのものを完成するにある。

確に「無限」の本質の開明は特殊な科學的興味の範圍を遙に超えた、寧ろ人間悟性自身の名譽のために必要となつてゐる。「無限」ほど嘗て人間の心情を動かすことの深かつた問題はない、「無限」ほど悟性を勵まし豐饒にした理念はない、そして又「無限」ほど開明を必要とする概念はない。

さてこの「無限」の本質を開明せんとする課

題に向ふには、我々は極く簡潔に、いかなる内容的な意味が現實に於ける「無限」に屬するかを明にせねばならぬ。先づ物理學に於て之を見やう。自然現象や物質に關する最初の素朴な印象は連續的なるものを印象する。一片の金屬や液體をとれば、それが無際限に可分的で、それのどんな小片でも常に同一の性質を有する樣に思はざるを得ない。然し物理學で物質研究の方法を充分精緻にすれば何處に於ても我々は可分性の限界に遭遇した——研究法の不備に基づくのではなくして、事態の本性に基く所の限界に。その結果正さしく近代科學の傾向を、無限小よりの解放と解することが出來やう、そして今や "Natura non facit saltus" なる古き指導命題の代りに、その反對「自然は飛躍をなす」と主張することが出來やう。言ふまでもなく物質の原子論がこれである。然しこれと並で前世紀の終り頃、電氣の原子論が表はれ、從來流體と認められ、連續的な作用力の模範であつた電氣も今や陽・陰の電子より構成されてゐることが明となつた。物質と電氣の外に物理學には猶ほ、同じく保存律が妥當する他の實在、即ちエネルギーがある。而してこれすら無限の分割を許さないことが今日確立されてゐる。(プランクのエネルギー量子の發見)。——かくして、結果は何れの場合にも、どこまでも分割を許す樣な而してかくして無限小を實現する樣な同質的連續は、現實の中には決して存しないと言ふことになる。連續體の無限的可分性は單に思想内に存在する手續であり、我々の自然觀察や物理學・化學の經驗によつて否定される單なる理念に過ぎない。

自然に於て我々が「無限」の問題に出會ふ第二の場合は、全體として世界を觀察する場合で

ある。卽ち世界の廣がりを、世界の中には無限大なるものが存在するか否かを、研究せねばならぬ。世界を無限とする考へが長く支配してゐた。カントに到るまで又それ以後も猶ほ人々は空間の無限性に付いては一般に何等疑ひを懷かなかつた。此處にも亦近世科學殊に天文學は、この問題を新しく提起し、形而上學的思辨の不充分な手段によらず、經驗に立脚し自然法則の適用に基いた根據によつてこの問題を決定しやうとする。而して此處にもその無限性に對する動かし難い抗議が表はれてゐるのである。空間の無限性の假定に導くものは必然的にユークリッドの幾何學である。而してなる程ユークリッド幾何學はそれ自身の中に矛盾を含まない構成、概念體系ではある。然しそのことから、それが現實に於て妥當性を有するといふ歸結は猶ほ出て來ない。然るか否かは唯觀察と經驗のみが決定し得る。空間の無限性を思辨的に示さうとする試みには明かな誤謬がまじつてゐた。一の空間物の外に常に又空間が存在するといふ事實から歸結するのは唯空間の無際限（ウンベグレンツトハイト）丈で、それの無限性（ウンエンドリヒカイト）ではない。然し無際限性と無限性とは相排除するものではない。數學的研究は所謂楕圓幾何學に於て有限的世界の自然的模型を與へる。而してユークリッド幾何學の放棄は今日もはや單なる純數學的若しくは哲學的思辨ではなく、我々は又これに、初めは全然世界の有限性の問題と何等係はる所なき他の方面から到達してゐるのである。アインシュタインはユークリッド幾何學から別離すべき必然性を示した。彼はその重力論を基礎としてこの問題にも手を着け、有限的世界の可能性を示す、而して又天文學者によつて發見された總べての結果も楕圓的世界の假定と矛盾しない。

さて我々は實在の有限性を二つの方向に於て、卽ち無限小と無限大の方向に於て確立した。それにも係らず「無限」は我々の思惟の中に正當な場所を有し、不可缺的な概念の役を占めるといふのが蓋し適切であらう。それが如何に數學の中で醞梅されてゐるかを視たい、で先づ人間精神の最も純粹、最も素朴な兒である、數論を訊したい。樣々な初等式の中から何れか一つ、例へば

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

なる式をとる、このnには任意の整數を代入していゝ故に、この式は無限多の陳述を含でゐる、そしてこの事は明にこの式の本質をなすものであつて、それによつて始めてこの式は算術的問題の解を表はし、眞の證明思想を必要ならしめる。それに反して特殊な數式

$$1^2+2^2=\frac{1}{6}\cdot2\cdot3\cdot5;\quad 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=\frac{1}{6}\cdot5\cdot6\cdot11.$$

は算へ上ることによつて檢證され、從つて個々のものそれ丈では何ら本質的興味を示さない。

これとは全然別な全く獨特な無限概念の解釋・原理的理解を我々は理想的要素の頗る重要豐富な方法に於て知悉してゐる。既に平面初等幾何學に於てこの理想的要素の方法は適用されてゐる。こゝでは本來、平面の點と直線のみが現實の實際に存在する對象である。之等に對して就中結合の公理「二點を過る直線は常に一つ而して唯一つに限る」が妥當する。之れからその歸結として「二直線はせい〴〵一點に於て交る」が生じる。しかし「二直線が常に一點に於て交る」と云ふ定理は妥當しない、二直線は互に平行でもあり得る。然し周知の樣に、理想的要素、卽ち無限遠點及び無限遠直線の導入によつて、「二直線が常に一點に於て而して唯一點に於て交る」と云ふ定理が一般に妥當せしめ得られる。代數の通常の複虛數量も同樣に理想的要素の

使用の一例である。これはこゝでは方程式の根の存在及び個數に關する諸定理を單純化するに役立つ。

幾何學に於て無限多の直線卽ち相互に平行なる直線が一の理想點の定義に用ひられる如く、高等算術に於ては無限多の數のある體系がイデアル數に綜括される、こゝに恐らく最も天賦的な理想的要素の原理の使用が成立する。このことが代數的「體」の範圍内で一般に行はれるなら、我々は其處に復た、普通の整數1,2,3,4,…に妥當する如き簡單な熟知の可分割性の法則に再會する。此處で我々は既に高等算術の領域に入つてゐるのである。

我々は今や解析に、この數學の最も技巧的（クンストフォル）な最も精細に分岐した組織に來た。其處では「無限」がいかに模範的な役目を演じてゐるか、いかに數學的解析が謂はゞ「無限」の唯一の交響樂であるかを言ふ必要はないであらう。

微積分學に於て到達された力强い進歩は、大部分、無限多の要素の數學的體系の處理に基いてゐる。さて「無限」と「甚大」とを甚だ同一視し易かつたために、直ぐ撞着が、所謂微積分學の逆理（パラドクス）が起つた、これは部分的には既に古代に於てソフィストに知られてゐた。有限に對して妥當する多くの命題、例へば、「部分は全體より小なり」「極小極大の存在」「被加數又は因數の序列の交換性」を直接に「無限」に移してはならないといふことは基礎的認識であつた。私は既に本論の初めに、特にワイヤアストラスの峻鋭によつてこの問題は全き開明を獲得したことを述べた、そして今日、解析はその領分内に於ては「無限」を使用するための確實な指南車と同時に實際的道具となつてゐる。

然し解析のみでは猶ほ未だ「無限」の本質へ

の最も深い洞察に導かれない。これは寧ろ、普遍的哲學的考察法に近い又「無限」に關する複合的な全問題に新しい光明を與へるに適した一分科によつて始めて媒介される。即ちグオルク・カントルを創立者とする集合論。但し此處で我々の考察に入るものは唯、カントルの學説の眞の獨得・獨創にかゝるもの、實際にその核心を構成するもの、即ち彼の超限數論である。これは數學的精神の最も驚嘆に値する精華、一般に純粹悟性的人間的活動の最高所業の一と思ふ。さてそれにはいかなる事情があるか。

カントルが端緒を作つた「無限」の新解釋を簡略に特性化しやうとするなら、次の如く言ひ得るであらう、――解析に於ては我々は唯、極限概念としての、ある轉成するもの、生成するもの、生産されたものとしての、無限小及び無限大、即ち所謂"das potentielle Unendliche"を取り扱ふに過ぎない。然し眞の「無限」自身はこれではない。眞の「無限」は例へば、我々が數 1,2,3,4,……の全體自身を一つの完結した統一として考察する時、又は一直線の點を完結して現前する物の全體と見做す時に得られる。この種の「無限」が"aktual unendlich"と稱せられる。

既に數學の基礎に重大な寄與をした二人の數學者フレーゲとデテキントは――互に獨立に――眞無限を、算術を一切の直觀や經驗とは獨立に純粹論理の上に基礎付け、論理のみによつて演繹する目的に適用してゐる。デテキントの努力は、加之、有限集合數を直觀を藉らずに無限集合の概念の本質的な利用によつて純論理的に導出しやうとする所まで進んだ。カントルは然し眞無限の概念を體系的に發展させた。上述の「無限」の二つの例を眼中に置いて、先づ純粹に

多といふ見地から考へて見ると、總べての有理數の集合從つて總べての分數 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, ……, $\frac{3}{7}$……の集合は整數の集合よりも大ではない、卽ち我々は「有理數は通常の仕方で算へられ得る」又は「可算的(アブツエールバール)」であると言ふ。そして同一のことが總べての代數的數一般の集合について妥當する。上述の第二の例にも類似の關係がある、卽ち平方又は立方體中の總べての點の集合は0から1までの直線上の點の集合よりも――純粹に多といふ見地から見れば――大ではない、加之總べての連續函數の集合に對しても猶ほ同じ事が妥當する。こゝで多といふ見地から見れば、唯一の「無限」しか存在しない樣に見えるがそうではない。上述の二つの例に於てその集合は「濃度」を等しくしない。第二例の集合は算へられない。これは第一例の集合よりも大である。此處にカントルの觀念構成の中に特色ある轉換が導入される。直線の點は通常の仕方の1,2,3,4,……を以ては算へられない。然し「眞無限」を許せば我々は全然この通常の算へ方に制限されてはゐない、決してそれを止める必要はない。我々が1,2,3,4,……を算へたならば、かくして算へられた對象を此の一定の順序(アンオルドヌング)に於て完結した無限集合と見做すことが出來る。この順序をカントルに從てその型式の上からωと稱するなら、當然この算へ方は$\omega+1$, $\omega+2$,……$\omega+\omega$或は$\omega\cdot 2$、更に復$\omega\cdot 2+1$, $\omega\cdot 2+2$, $\omega\cdot 2+3$……$\omega\cdot 2+\omega=\omega\cdot 3$　$\omega\cdot 2$, $\omega\cdot 3$, $\omega\cdot 4$……$\omega\cdot\omega=\omega^2$, ω^2+1……と進み、最後に次の如き表を得る、

$1, 2, 3, \ldots\ldots$

$\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots\ldots$

$\omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \omega\cdot 2+2, \ldots\ldots$

$\omega\cdot 3, \omega\cdot 3+1, \omega\cdot 3+2,$

$\omega^2, \omega^2+1, \ldots\ldots$

$\omega^2+\omega, \omega^2+\omega\cdot2, \omega^2+\omega\cdot3, \ldots\ldots$

$\omega^2\cdot2, \ldots\ldots$

$\omega^3, \ldots\ldots$

$\omega^4, \ldots\ldots$

$\omega^\omega, \ldots\ldots$

…………

これがカントルの第一超限數、彼の所謂 Zahlen der zweiten Zahlklasse である。それ故これに達するには唯、單純に通常の可算的無限を算へ超せばよい。卽ち通常の有限の範圍での計算を全然自然的に、一義的に整合的に進めればいゝ。これまである集合の一番目、二番目、三番目の物を算へた樣に、この場合にもω番目、$\omega+1$番目、……ω^ω番目の物を算へるのである。

かゝる事態に於て次の如き問ひが直ぐ起るのは明である——處で通常の意味に於て可算的でない集合をもこの超限數によつて實際算へることが出來るか？

カントルはこの思想を追究して超限數論を最も成果豊かに完成し、この數の完全な計算法を創り上げた。かくの如くして終にフレーゲ、デデキント、カントルの巨大な協同勞作によつて「無限」は玉座に卽かせられ、最高の凱旋の時期を樂んだ。「無限」は最も大膽な飛昇をして眩惑的な高さの成果にまで達した。

反動が起らずにはゐなかつた。それは甚だドラマチツシュなるものがあつた。丁度微積分學の發展の場合と同樣であつた——所謂集合論のパラドクス。漸時慣用的となつて來た概念構成や推理法の無制限的な適用のために矛盾が——始めはばらばらに、漸時益尖鋭に、益々眞摯に現はれて來た。殊にツエルメロとラッセルによつて發見された矛盾が數學界に知られたことは正し

く異變的結果を及ぼした。このパラドクスに關してはデデキントもフレーゲも實際に自己の立脚地を放棄し陣營を引拂つた。而してカントルの理論に向つては凡る方面から最も激しい攻撃が向けられた。反動は實に兇暴で、數學に於ける最も慣用的にして最も豐饒な概念や最も單純にして最も主要な推理法が脅やかされ、それの適用が禁止された程であつた。防禦者も無かつたのではないが、然しその防備標準は實に無氣力であつた、その上統一ある戰線の正當な位置に立つてゐない。パラドクスを救ふ手段は餘りに多く推擧され、開明の方法は餘りに區々であつた。

我々が現在このパラドクスに關して當面してゐる狀態は長く堪え難いものである事は認められねばならぬ。確實性と眞理性との典型である數學に於て誰でもが學び・敎へ・用ひてゐる概念構成や推理が不合理に陷ることを思へ。もし數學的思惟すら用をなさないならば、抑も他に何處に確實性眞理性を發見し得るであらうか。

然し、我々の科學を裏切ることなしにこれらのパラドクスを避ける全然滿足な路がある。この路を發見するための見地と我々に其の方向を示す希望とは次の如くである。

(1)　豐富な槪念構成や推理法は、些かにもせよ望みがあるならば、愼重に追究したい、そしてそれを養育し、支持し、使用し得るものにしたい。カントルが創り上げた樂園から誰も我々を逐ふことは出來ない筈である。

(2)　通常の初等數論に存在する推理の確實性に付いては誰も疑ひを持たず、又其處ではパラドクスや矛盾は唯我々の不注意によつて起るに過ぎない、――これと全く同一の推理の確實性を打ち立てることが必要である。

これらの目的の達成は明に、「無限」の本質を完全に開明し得る時にのみ可能である。」

先に我々は、現實に於ては何處に於ても——經驗や觀察やどの種の科學をとつても、「無限」を發見し得ないことを見た。抑々事物に對する思惟は事物の出來としかく相異し、しかく違つた仕方で起り、しかく總べての現實と離れてゐるものであらうか。寧ろ、我々が何らかの意味に於て「無限」の實在性を認識すると思つたのは唯、我々が實際に現實に於て極く屢々大・小の極はめて巨大なるものを發見するといふ事情のために惑はされてゐたのであると言ふ方が明白ではなからうか。一體、内容的論理的思惟が何處かで我々を欺いてゐるのであらうか、或はそれを現實的な事物又は出來事に適用した時には我々を見棄てゝゐるのであらうか。否——内容的論理的思惟は缺くべからざるものである。それが我等を欺いたのは唯、我々が任意な抽象的な概念構成、無限多の對象がそれに歸屬する如き概念構成をまで立てた時丈である、その場合我々は正さしく内容的推理の許容し難い適用をしてゐるのである、換言すれば、我々は明に内容的論理的推理の適用に對する必然的豫定條件を顧慮してゐないのである。そこで、かゝる豫定條件が在り、それを顧慮せねばならないと言ふ認識に於て我々は哲學者、殊にカントとの一致を見出す。既にカントは——而もこれは彼の敎說の一主要成素を成すものである——數學が一切の論理とは獨立に定立された内容を處理すること、從て決して論理のみによつて基礎付けられないことを敎へた。フレーゲ、デヽキントの努力が挫折せねばならなかつたのもその故である。寧ろ論理的推理の適用や論理的手續の實行の豫定條件として既に表象中に或るものが——

―直觀的に直接體驗として一切の思惟の前に存在するある異論理的（アウサーローギッシュ）具體的な客體が――與へられてゐる。論理的推理が確實であるためには、それらの客體は完全にその總べての部分に亘つて總覽されねばならず、それらの擧示、區別、順列、並列は客體と同時に直接的に、もはやある他のものに還元されない若しくは還元を要しない或物として與へられてゐる。こは私が數學並びに一般に學問的思惟、理解、表示のために必要と考へる哲學的立場である。而して殊に數學に於ては、我々の觀察の對象は具體的な符號自身であつて、その形態は我々の立場からは直接に判明で再認され得るものである。

通常の有限數論の本質と方法とを思ひ浮かべて見よ。これは確かに、內容的直觀的思慮による數構成のみで建設される。然し數學的科學は決して數方程式によつて悉くされないし又これのみに還元されもしない。だが然し、數學は、それを整數に適用した場合常に正しき數方程式を與へねばならない一の結構であると主張し得ると思ふ。然しそこでこのことを認識するためにこの結構の構造を研究しやうとする要求が提起される。而してその方策としては、數論自身の構成の際に數方程式を導出するために適用されたのと同一の具體的內容的考察法と思惟の有限的立場のみが驅使される。この學的要求は實際に充され得るものである、換言すれば、純粹に直觀的有限的な仕方で――丁度數論の眞理性の如く――數學的結構の確實性を保證する如き洞察をも獲得することが出來るのである。

我々はで今もつと詳しく數論に入つて行かう。

數論に於ては我々は數の符號（ツァールツァイヘン）

1, 11, 111, 11111,

を持つてゐる、この場合各の數の符號は各に於

て1の次に常に1が續くことによつて直觀的に識別される。これらの數符號はそれ自身に於ては何等の意味を有しない——我々の考察の對象は正しくこれである。然しこれらの數符號以外に我々は既に初等數論に於て猶ほ、他のあるものを意味し表示の役をなす符號を用ゐる、例へば符號2を數符號11の略稱に、或は數符號3を數符號111の略稱に。更に主張の表示に役立つ符號$+$，$=$，$>$等を適用する。それ故$2+3=3+2$は、$2+3$と$3+2$がこゝに利用された略稱に關して同一の數符號卽ち數符號11111であるといふ事實の表示に役立つべきである。同樣に$3>2$は符號3卽ち111が符號2卽ち11を超えてゐること或は後者の符號が前者の部分(タイルスチユック)であるといふ事實の表示に役立つ。又文字a・b・cを數符號として表示に用ゐる。卽ち$a>b$, $a+b=b+a$も亦單に同樣な事實の表示の役をする丈である。而してその際この表示の內容的適合は勿論內容的推理によつて證明され得る、そして我々はこの直觀的な內容的な取り扱ひ方で甚だ遠くまで進むことが出來る。

さてこの直觀的な考察法が超越される第一例を示さうと思ふ。今までに知られてゐる最大の素數は（三十九字より成る）$p=170\ 141\ 183\ 460\ 469\ 231\ 731\ 687\ 303\ 715\ 884\ 105\ 727$である。今、「$p+1$と$p!+1$との間には確かに一の新しい素數が存在する」といふ命題は、周知のユークリッドの處理法によつて完全に我々の立場の埒內に於て證明することが出來る。この陳述自身は勿論全く我々の有限的立場に相應する。何者、こゝで「存在」とは、唯『$p+1$ oder $p+2$ oder $p+3$ …… oder $p!+1$は確かに素數である』といふ陳述の略稱の役をするに過ぎない。所で更に進んで、「（イ）pより大にして、同時に（ロ）

$p+1$ よりも小なる(若しくは等しい)素數が存在する」と言つても明に同一である、而してこれによつて我々は此のユークリッド的主張の一部分丈を表現する命題卽ち『pよりも大なる素數が存在する』を形成しやうとする樣になる。これは內容上遙かに低度の主張、ユークリッドの主張の部分的陳述で、その移易は全く無害の樣に見えるが、この部分陳述が上の關聯から分離されて獨立の主張として言表されるならば、あくまでそれは超限的なるものへの飛躍である。

いかにして然るか？　それは此處に於て "es gibt" なる存在陳述をするからである。上述のユークリッド的命題に於て「存在する」とは、(旣に云つた樣に) 丁度「このチョークが赤い、或はあのチョークが赤い、或は……或は其處のチョークが赤い」と言ふ代りに簡略に「これらのチョークの中に赤いチョークが存在する」と言ふのと等しい別の簡略な表現法に外ならぬ。かゝる「一有限的全體の中に一つの性質を有する一の對象が存在する」といふ主張は全然我々の有限的立場に相應する。然しそれに反して entweder $p+1$ oder $p+2$, $p+3$……と無限に到る選言陳述は謂はゞ無限の論理的所產である、かゝる無限への移易は特別の說明なしには、一定の豫防法なしには、宛も解析に於て有限的結果から無限的結果への移易が許容されない如く、許容されない、而してかゝる移易は一般に先づ意味を有しない。

一般に有限的立場からは「云々の性質の數が存在する」といふ形の存在陳述は唯部分陳述としてのみ、卽ち一層詳細に規定された陳述——それのより正確な內容は多くの適用に對しては非本質的ではあるが——の一部分として意味を有するに過ぎない。

我々は此處に、「或は」の結合(eine Order-Verknüpfung)として解されない一存在陳述を分解することによつて超限者に出遭ふのである。同樣に一般的卽ち任意の數符號に亘る主張を否定する場合に、超限的陳述となる。それ故例へば「aを數符號とすれば、常に$a+1=1+a$でなければならぬ」といふ陳述は有限的立場からは否定の可能なるものではない。このことを明瞭にするには、この陳述が“Und”による無限に多くの數方程式の結合として解されず、單に一つの數符號が在る場合それに對して或ることを主張する假言的判斷として解されるに過ぎないことを考慮すればよい。

このことから特に次の事が歸結する。我々は有限的立場の意味に於て、上述の如き無規定な數符號が出てゐる方程式は凡る數符號に對して満足されるか或は一の反例によつて否認されるかの何れかであるといふ選言判斷を適用することは出來ない。何者、この選言判斷は實際、拒中律の適用として本質的にはこの方程式の一般的妥當の主張が否定し得るといふ前提を基礎としてゐるからである。

我々は常に確言する、我々が有限的陳述の領域内に留るならば、又どうしても留らねばならないならば、其處には甚だ見渡し難い論理的關係が存する、而して夫の“alle”と“es gibt”とが結合されて組入れられた命題中に表はれる時には、この見渡し難さは堪え難さに高まる。そこでは人間が思惟して以來常に使用してゐる所の、アリストテレスさへ之を敎へた所の、論理的法則が妥當しない。そこで有限的陳述の領域に對して妥當する論理的法則を樹立しやうと努めるかもしれないが、駄目であらう、何故なら我々はアリストテレスの論理學の簡單な法則

の使用を断念することを欲しないから、そして何人も、例へ如何に縷說しやうとも、人間が任意の主張を否定し、部分陳述を形成し、拒中律を適用することを妨げ得ないであらうから。我々は如何なる態度をとるか。

　我々は我々が數學者であることを、而して數學者として既に屢同じ様な難境に當面したこと而してその際如何にして理想的要素の天賦的方法がそれを解放して來たかを想起しやう。本論の初めに引用したこの方法の適用の顯著な模型と同様に、我々は此處に於ても有限的陳述に理想的陳述を附加して、形式的な簡單な通常のアリストテレスの論理學の規則を維持せねばならぬ。そうして奇妙なことには、クロネッカーがあんなに情熱的に攻撃した推理法は、同じクロネッカーが數論に於てクンマーをあの様に熱狂的に嘆美し最高の數學的事業と賞讃したものゝ正しく側面をなすものである。

　さて我々は如何にして理想的陳述に到達したか。そういふ場合、我々がそれに到るためには唯、自然的整合的な仕方で數學の基礎論が既に遂げてゐる發展を延長する丈でいゝといふことは注目すべきことであり、常に都合のよい有利な事情である。實際既に初等數學は直觀的な數論の立場を超越してゐる。卽ち代數的文字計算の方法は我々がこれまで解して來た如き內容的—直觀的數論の中に包括されてはゐない。後者に於ては式は常に表示に適用された丈である、文字は數符號を意味してゐた、方程式によつてこの符號の一致が表示されてゐた。それに反して代數に於ては我々は文字の表現それ自體を獨立の形象として考察する、かくして數論の內容的命題は代數によつて形式化される。數符號に關する陳述の代りにこれはこれで直觀的考察の

具體的客體である所の式が表はれる、そして內容的數論的證明の代りに一の式は他の式から一定の規則に從つて導出されるのである。

それ故既に代數が示してゐる如く、有限的客體が增加することとなる。これまでは唯 1, 11, …… 11111 の如き數符號のみが內容的考察の對象であつたが、既に代數に於て、數學的實施はそれを越えてゐる。實際その陳述は我々の有限的立場から內容的指示と結付いて許容されはするが、（例へば $a+b=b+a$ （a・b は一定の數符號を意味する）なる命題の如く）、然し我々はこの表示の形式を選ばずに、寧ろその代りに $a+b=b+a$ なる式を置く、而して之はもはや決して或る內容的なるものゝ直接の表示ではなく、一定の形式的形象である。かくして我々は、a・b・$=$・$+$ 並びに $a+b=b+a$ は宛も數符號が意味を有しないと同樣に、それ自身に於て何ものをも意味しないといふ解釋に達する。尤もそれからは、我々が意味を付與する式——但しそれを有限的陳述の表示と解することによつて——が導出することは出來る。この解釋を一般化すると、數學は式の存立——但し第一に有限的陳述の內容的表示が對應する式の、第二に何ものをも意味せず我々の理論の理想的形象である式の——となる。

さて我々の目的は何であつたか。我々は數學の中で、一方、我々の有限的立脚地に於て直接直觀的に卽座に理解される $3>2$, $2+3=3+2$, $2=3$, $1 \neq 1$ の如き數符號のみを含む有限的陳述を發見した、これらは否定の可能なるもの、正か僞かの何れかである、自由に無造作にアリストテレス的論理を以て處理處置し得られる、矛盾律は妥當する、卽ちこれらの陳述の一つとそれの否定とは兩者共に正であることは出來ない、

拒中律は妥當する、卽ち陳述或はそれの否定の中一つが正しい。その陳述を僞なりと言へば之はその陳述の否定が正しいと言ふのと同意である。これらの全然非問題的な性質を有する基本的陳述の外に問題的性質を有する有限的陳述があつた。さて最後に、總じて復た通常の論理の法則を妥當せしめるべき理想的陳述を導入した。然しこの理想的陳述卽ちそれが有限的主張を表現しない限りの式は、何ら意味を有しない故に、それらに於ては論理的手續は有限的陳述に於ける如く內容的に行ひ得ない。それ故論理的手續及び數學的證明自身をも形式化する必要がある。これは論理的關係を式に置換えることを要求する、從つて數學的符號に更に & (und) $\vee$ (oder) → (folgt), — (nicht) の如き論理的符號を附加し、數學的變數 a・b・c・…… の外に論理的變數卽ち變數的陳述 A・B・C …… をも利用せねばならぬ。

如何にしてこれをなすか。そこに幸にも我々には、屢科學の發達史上に見るその同じ豫定調和——アインスタインには、その重力論のために完全に仕上げられた一般不變量論が存在してゐて彼を助けた、その同じ豫定調和——が表はれる、卽ち我々には進步した豫備勞作として論理計算學が存在する。勿論これは根源的には全然他の見地から作り上げられたものであり、從つて論理計算學の符號は根源的には勿論表示のために導入されたのである、然し今我々が數學的符號と同樣に論理的符號からも總べての意味を奪ひ、論理計算學の式と雖もそれ自身としては何らの意味を有しない理想的陳述であると說明するならば整合的となる。論理計算學には數學的命題を式に容れ、論理的推理を形式的過程によつて表現し得ゝ符號言語がある。內容的數

論から形式的代數學への移易の場合と全然相應して、我々は論理計算學の符號や手續の記號をその內容的意味から引離して考察する。これによつて我々は最後に、通常の言語によつて表示される內容的數學の代りに今後、一定の規則に從つて相並ぶ數學的及び論理的符號を持つた式の存立を得ることゝなる。數學的公理に相應するものは式の中のあるもの、內容的推理に相應するものは式がそれに從つて相繼起する規則である、從つて內容的推理は規則に從ふ外的處理に置き換へられ、それによつて、一方、根源に於ては全く素朴的に根本原理と思はれてゐたが既に長く近世の公理學に於て單に概念の結合と見做された公理自身に對して、並に又、根源的には唯他の言語たるに止るべきであつた論理計算學に對しても、今や素朴的な取り扱ひから形式的取り扱ひへの嚴密な移易が完成される。

數學的證明が形式化される仕方丈を簡單に說明して置かう。既に言つた樣に、數學の形式的構造の礎石の役をなす一定の式が公理と呼ばれる、數學的證明とは、それ自身として直觀的に現存せねばならぬ一圖形であつて、推理圖式

$$\frac{\begin{matrix}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S}\to\mathfrak{T}\end{matrix}}{\mathfrak{T}}$$

に從ふ推理より成る、その際、前提卽ち當該式$\mathfrak{S}$及び$\mathfrak{S}\to\mathfrak{T}$は公理若しくは代入によつて公理より出づるか、或は前の推理の結論式と一致するか若しくは代入によつてそれから成立するかの何れかである。式が證明の結論式である場合に之を「可證明的（ベワイスバール）」と稱する。

我々のプログラムによつて我々の證明論に對する公理の選擇は既に描かれてゐる。公理の選擇は甚だ任意であるけれども、やはり幾何學に於ける如く性質的に個々の分離した群が區別される、今、その中から若干の例を引用する。

I. 歸結の公理

$A \to (B \to A)$　前提の附加

$(B \to C) \to \{(A \to B) \to (A \to C)\}$　陳述の消去

II. 否定の公理

$\{A \to (B \,\&\, \overline{B})\} \to A$　矛盾律

$\overline{\overline{A}} \to A$　二重否定の法則

これらI.IIの公理は陳述計算(Aussagenkalkül)の公理に外ならぬ。

III. 超限公理

$(a)\,A(a) \to A(b)$

(普遍より特殊への推理、アリストテレスの公理)

$\overline{(a)\,A(a)} \to (Ea)\,\overline{A}(a)$

(もし一つの賓辭が總べてのものには妥當しない時には、一つの反例が存在する)

$\overline{(Ea)\,A(a)} \to (a)\,\overline{A}(a)$

(もし一つの陳述に對して何ら事例が存在しない時には、總べてのaに對する陳述は僞である。)

その際猶ほ一つの甚だ注目に値する事情が明になる、即ちこれらの超限的公理は全部唯一の公理から導かれること、而してそれは同時に從來數學の文獻中最も攻擊を受けた所謂選擇公理の核心を含む公理である、曰く

$A(a) \to A(\varepsilon A)$

こゝでεは超限的論理的選擇函數である。

これに特殊に數學的な公理が續く

IV. 等の公理

$a = a$

$a = b \to [A(a) \to A(b)]$

V. 數の公理

$a + 1 \neq 0$

完全歸納法の公理

かくの如くにして我々は我々の證明論を成就

し、可證明的な式の體系卽ち數學を建設することが出來る。

然し一般にはこの成功を、特には、我々の助力なくとも極はめて不可缺的な武器として存在した論理計算學を悦んで、我々の所業に對する本質的な豫定條件を忘れてはならぬ。卽ち一つの制約、理想的要素の方法の適用に結び着いてゐる唯一の、然し絕對に必然的な制約が存在する。卽ち非矛盾性の證明である。卽ち理想的なるものを附加することによる擴張は、それによつて前の狹き領域内に何等矛盾が成立しない場合にのみ、從つて理想的形象を消去する際に以前の形象に對して表はれる關係が常に以前の領域に於て妥當する場合にのみ許される。

しかしこの非矛盾性の問題は現在の狀境に於て全然處理し得られる。直に認められる樣に、これは、我々の公理から、定立された規則に從つて、"$1 \neq 1$"が結論式として表はれ得ないこと、從つて"$1 \neq 1$"が可證明的な式でないことを洞察することに歸する。而してこれは原理的には同樣に直觀的考察の領域内にも存した課題である。(例へば内容的に構成された數論に於て$\sqrt{2}$の不合理性の證明、卽ち$a^2=2b^2$なる關係に在る二つの數符號a, bを見出し得ないこと、從つて一つの一定した性質を有する二つの數符號を擧げ得ないことを示すべき證明問題の如き。)それと相應して我々の問題は、ある一定の性質を有する證明が擧げられないことを示すことである。然し形式化された證明は全く數符號と同樣に具體的な通覽し得る對象である。$1 \neq 1$なる所要の結論式の性質も亦證明の具體的に確立し得る性質である。實際にこれは證明される、而してそれによつて我々は我々の理想的陳述の導入

に對する權能を獲得する。

猶ほ同時に我々は、これによつて夙に緊急になつてゐる一の問題卽ち算術的公理の非矛盾性を證明する問題を解くといふ悅こばしき驚愕を經驗する。卽ち公理的方法が適用される時には常に非矛盾性を證明すべき問題が表はれる。幾何學や物理學的理論に於いては非矛盾性の證明は算術的公理の非矛盾性に還元することによつて遂げられる。この方法は明に算術自身に於ては無效である。理想的要素の方法を基礎とする我々の證明論がこの最後の重要なる進出を遂げることによつて、それは公理學の組織を完結する。而して我々が再度體驗したもの、——一度は微分學のパラドクスに關して、次には集合論のパラドクスに關して——それは三度起ることは出來ない、そして復た起ることはないであらう。

然し此處に略述された我々の證明論は、唯に數學の基礎を確立し得るに止らず、それは又一般に、これまで着手することの出來なかつた數學的思惟領域に起つた一般的な原理的な問題を取り扱ふ路を開くものと信じる。

數學は謂はゞ、原理的な問題を決定——總べての主張が一致し得ねばならない而して各の主張が制御され得る具體的基礎(konkrete Basis)に於て——決定するために、一つの仲裁々判所最高判決の法廳にまで擴張する。

近年の所謂「直觀主義」の主張と雖も——それがいかに謙遜なるものにせよ——私の考へによれば、この法廳から始めてその資格證明書を獲得するであらう。

原理的問題を取り扱ふ一例として私は、「凡る數學的問題には解が可能である」といふテーゼを選びたい。我々は皆それを確信してゐる。我々が我々の中に不斷に「此處に問題が在る、

その解を求めよ、汝はこれを純粋思惟によつて見附け得る、何者、數學には不可知的なるものは決して存しない故に」といふ激勵を聞くのは實際確かに數學的問題に取りかゝつてゐる際の根本刺戟である。勿論、私の證明論は、凡る數學的問題が解かれる一つの路を一般的に示すことは出來ない——かゝる路は存在しないのである——が然し、凡る數學的問題の解の可能を假定することは矛盾を含んでゐないといふ證明は全然我々の理論の範圍内に屬する。

最後に我々はも一度我々の本來のテーマを顧み、「無限」に關する我々の總べての考慮からの結果を引出して見たい。全體の結論はこうである——「無限」は何處にも現實化されない、自然の中にも存在しないし、我々の悟性的思惟の基礎としても許容されない——存在と思惟との注目すべき調和である。フレーゲやデテキントの以前の努力とは反對に、我々は、學的認識の可能に對する豫定條件として一定の直觀的な表象と洞察とが不可缺的であること、而して論理のみにては足らないといふ確信を得た。「無限」の處理は「有限」によつてのみ確立され得る。

「無限」の依然たる役割は寧ろ專ら理念のそれである——もし、理念をカントの言葉に從つて、一切の經驗を超越し、それによつて具體者が全體性の意味に於いて補足される理性概念と解するならば。——のみならず、私が此處に略述し代表する理論が立てた埒内に於て躊躇することなく信頼してよい所のその理念の役割なのである。