解析論に於ける拒中律排棄の論議に關する Otto Hölder の一つの批評

下村寅太郎

數學の基礎研究、原理批判に對する關心はたゞに數學者にのみ止まらず、又止まるべからざることは言ふまでもないが、現在の該研究の先端が從來問題にすらなされる處のなかつた論理學的根本原理にまで觸れるに到つて、一層、事態は我々に「所課」の感を深めるものである。我々は勿論その專門的事項に付いては Amateur たらざるを得ないでもあらうが、然し我々の關心は否むべくもない。「拒中律の排棄」「數學の基礎の危機」等々の呼聲は、それの眞實の意味がいかなるものであるにせよ、それ丈で一顧せしめるに十分であるであらう。この小篇はそれの單なる一つの資料である。さてこの問題に關するヒルバート=ブロウアーの相對立する論構に對しては Bernays, Ackermann, Finsler, J. v. Neumann 等の如き新進の勞作が漸時公にされて來たが、學界の耆宿にして往年基礎論に重要なる貢獻をした人々の批判は、之を聞くこと希れであつた。この問題が直接集合論を動機とするにも係らす、著名なる Hausdorff 氏の “Grundzüge der Mengenlehre” (1914)の改訂版(“Mengenlehre” 1927)もこの問題に對しては全然關說することを避けた。ヘルダーの『數學的方法』(一九二四)はあたかもヒルバート=ブロウアーの論稿の出現と時を同じくしたゝめに、これの中には僅かに脚註的なるものゝみを

見るに止つた（五五五頁）。後、Bericht über die Verhandlungen der sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physikalische Klasse Bd. 78. 1926 („Der angebliche circulus vitiosus und die sogenannte Grundlagenkrise in der Analysis")に同氏の簡單なる批評を見出したゝ、埋草にまで次に譯出することにした。（一九二七・十二・九）

ワイルは上限（obere Grenze）の定義が一つの順還論を含むことを説明した。この主張は甚しい物議を醸した。數學者達にあつてさへ自己の學問の基礎の解釋にある不安が入りこんで來た、それ故、事態を詳細に研究し、出來得べくんば、その主張を否定することは價値あることであらう。

1

概念の段階

ワイルは特に、上限の構成に際して間違つたことにはラッセルの概念の段階形成が輕視されてゐるのを見出した（註1）。「段階」(Stufe)を明瞭にするためにワイルは一つの興味ある例を考案した、私はそれを此處で少しく變更して踏襲し、更に展開せしめやうと思ふ。彼は自然（整、正）數を考察し、先づ二つの手續きA及びBを導入する。Aはその時その時に現前する數に1を加へることであり、Bは現前の數を倍加することである。私は今kよりも大にして、kより出發して（註2）せいぜいで手續きA及びBを四回適用することによつて到達され得ない所の最小の數を求めやうと思ふ。kから出發するこの最小の數の組立ては手續きN_4をkに適用したものとして解釋されることが出來る。今、例へば手續き

$$A, B, A, N_4$$

が1から出發してこの順序で遂行されるべきであるならば、先づ手續きA, B, Aは1から2と4を越

えて5に到る。然るに5から出發してA若しくはBのせいぜいで四つの手續きを以てしては唯だ數6—16、20—26、28、40—42、44、48、80、を獲ることが出來る丈であらう、從つて今やN_4は、5から出發するならば、數17に導くことになる。

明かに、今や、A及びBを第一段階の手續きと名付け、例N_4に於て示された仕方で第二段階の無限多の手續き

(1)　N_1, N_2, N_3………

を定義することが出來る。

さて手續きA及びBに手續き(1)の一つ、例へば少し前に言つたN_4自身を附加するならば、新らしく類似の概念を構成することが出來る。それ故、例へば、kより大にして、kから出發して系列

A, B, N_4

のせいぜいで五つの手續きの繼續によつて獲られ得ない所の最小の數を問ふことが出來る、それによつて一つの手續き(4)N_5に到達するであらう。かくして更に高次の段階の手續きに達した筈である。同時に、かゝる仕方で、段階の單純な繼續にすら分たれない無數の概念構成が相累加して構成され得ることは明かである、何故なら實際、手續き(1)の單に或る一つのみではなく、正しくその多くを新らしき概念構成のために附加し、かくして一の新らしき手續きNを定義し、然る後常に復たこれから始め得るだらうから。

ワイルはさて一つの順還論に基く構造原理の例として次の如きものを擧げた——『nから次の如き最小の數、卽ち1から出發して與へられた諸原理(註3)をこの構成原理自身を含めてせいぜいでn回相前後して適用することによつて成立しない如き最小の數を作れ。』このことが一つの全然許し難き順還論であらうと云ふことは何人も認める、唯だ問題は、上限に導く概念構成が今述べた概念構成

と平行するものとされていゝかである。

註(1) Symposion, Philosophische Zeitschrift für Forschung und Aussprache, Bd. I, S. 16, を參照。

(2) ワイルはこの場合常に1から出發してゐる。(a. a. O. S. 13)。

(3) ワイルに於ては先に擧げられた諸原理の下に唯だA及びBの手續丈が考へられてゐる。

2

無限多の場合に於ける拒中律

さて上限の概念を準備するために、ワイルも私も、多くの數學者もが、一致する樣に見える狀況を指示しようと思ふ。この狀況とは、無限多の場合(無限多の對象、無限多の關係、無限多の計算過程)に拒中律を適用することに關する。先づ無限多の場合は唯だ法則によつてのみ定義され得ることを記憶せねばならぬ。さて問題となるのは無限數のある場合と、それが與へられた時、該場合の各に全く規定的に所屬し若しくは所屬しない所の(それは計算の遂行によつて確定され得るでもあらう)性質とである。所でこれらの場合から更に無限數の一定の場合が分離されたならば、即ち、一つの新しき法則によつて與へられたならば、我々は、これらの場合の中に上述の性質を有する如き一つの場合が存在するかの問ひに對する答と、その性質が總べて今定義された諸場合に所屬するかの問ひに對する答とを、拒中律に從つて全然規定されたものと見做す論理的原則に從つて行動する。このことは、我々が今とり出した無限的全體の場合に對して當該の問ひに對する答を――全稱的命題を基礎として――實際に決定することが出來ない時でもこれをなすのである。(註1) 所で拒中律のかゝる適用には種々の分類が基き、然る後復たこれらの

分類の上に我々が形成する新らしき概念が基くのである。所でこの意味に於て、「總べての」及び「存在する」なる言辭は、唯だ既に豫め非難なく形成されてゐた全體にのみ關係してもいゝと云ふワイルの規定を理解することが出來る。そこで今述べた仕方で新らしき全體が形成されたならば、勿論爾後拒中律はこれに對しても適用され得、更に進んだ概念の段階が形成され得るのである、云々。

今述べた意味に於て概念の段階的な形成は確かに必要である。けれどもかゝる事柄に關する認識が特に新らしきものとして主張されることを要するものだとは信じられない、實際、どの時代にでも誰でも數學者と稱せられていゝ人にはかゝる處理は用ゐられたのであつた。

(註1) 拒中律のこの適用を認めないブロウアーの見解には此處では同意さるべきでない。

3

上限の構成

さて上限の構成が實際に最後に述べた處理に反するか否かを研究せねばならぬ。無限多の絶對實數の全體Aが——系列の形に於てでも(しかしそれは問題にはならない)——與へられたとする。

(2) $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$

今、先づ第一に一つの絶對「實數」は絶對的有理數の分割によつて與へられる、卽ち全體の絶對的有理數を全然二類に分割して、第一類の凡る數は第二類の凡る數よりも小にして、第一類は最大の有理數を含まない樣にする。(註1) その時この分割によつて絶對的有理數の領域に所謂デデキント的截斷が生じる、そうしてこの截斷の「下位數」及び「上位數」(註2)に付いて云々することが出來る。かゝる截斷は唯だ一つの法則によつてのみ與へられ得ることは自明である。ワイルはそれに際して、截斷の下位數は一つの「性質」によつて與へられてゐると云ふ

様に表現する。それ故、無限多の絶對的實數は唯だ一つの法則によつてのみ——謂はゞ法則の法則によつて——正さしく初めて與へられることが出來る。

さて(2)の數がすべて一定の範圍下、例へば 100 の下にあるならば、後に上限として現はれる一數 γ を次の如く構成することが出來る。所與の數 x は、x が(2)なる截斷の任意の一に於ける下位の數である時、而してかゝる時のみ、採用される所の絶對的有理數の新らしき總體を形成する。この數 x の全體を定義し得ることを承認すれば、凡ゆる數 x に較べて小なる數は又數 x であること、そして又必しもすべての數が數 x に屬しないこと（何故なら 100 はこれに屬しないから）を、直ちに認識する。同樣に最大の數 x は存在し得ない、而して今やこれらの數 x は新らしく我々によつて構成された截斷 γ の下位の數を表はすことは明瞭である。

所でワイルは、截斷(2)の中に、x がそれに於て下位の數である如き截斷が存在する時にのみ、或はワイルの言ふ如く、x に所屬する A なる種類の性質が存在する時にのみ、數 x は新らしき數の總體に所屬すると云ふ事情に衝き當る。さて然しある種の性質は正さしく問題ではなく、系列(2)の法則によつてよく定義された範圍（クライス）からの性質、即ち一つの下位の數がかの與へられた截斷(2)の一つの中に存在するといふ性質が問題である。又この諸數(2)の合法則的な全體に一つの上限 γ が加はり存在することが主張される。明かに我々はその際、全然上述の論理的原則に據つてゐる。x が與へられそれに對して截斷(2)の中の一つ、例へば A_2 が在るならば、この截斷の與へられた法則によつて、この截斷の無限多の下位の數の一つが x と一致するか或はしないかゞ規定される。然し與へられた x と(2)からの任意の與へられた截斷との上述の關係が完全に規定されて居り、而して無限多の截斷(2)

に對しては一つの法則が現存する故に、截斷(2)の中に、それと共に與へられた有理數xが上述の關係にある如き一つの截斷が表はれるか否か、卽ちその所與の有理數がこの截斷の一つの下位數であることも亦、拒中律によつて規定される。數γの構成に於て、卽ち、數xの全體の構成に於て、この全體自身を使用すると云ふ一つの順還論を——例へばワイルによつて指摘された上に引用した如き謬れる順還定義に於ける如き——私は此處では全然發見することは出來ない。

今、γよりも小なる一つの實數γ'が與へられたと假定すれば、それは截斷γ'がγに於ては下位數である所の、卽ち上の數xに屬する所の、上位數を所有すると言ふことに外ならない。それ故この數x_0は系列(2)の一截斷A_μの中に於て下位數でなければならないであらう、卽ちγ'はA_μによつて追ひ越されねばならないであらうし、他方γ自身は、同樣に容易に理解される樣に、數(2)のいかなるものによつても追ひ越されない。それ故、構成された數γには數(2)に關聯して次の如き二つの性質が所屬する、通常「上限」はこれによつて定義されるのである。——

1　γは數(2)のいかなるものによつても追ひ越されない。

2　γに較べて小なる凡ゆる數は數(2)によつて追ひ越される。

今、一つの實數γ''が與へられ、それに關してこの兩性質が證明されたと假定すれば、明かに$\gamma'' \neq \gamma$なる假定は矛盾に陷るであらう。何となれば二つの一致しない截斷の中一方は必然的に小なる截斷でなければならないから。それ故、上限はそれのこれらの兩性質によつて一義的に定義された數であると言ふを常とするのである。

で、もし我々が、實數の領域中に數(2)に關して

上述の兩性質を有する如き一つの實數が存在すると言ふならば、全然ワイルの非難は當つてゐる樣に見える、なぜならこの存在する(existiert)なる言辭は構成的に與へられてゐない全體に適用されてゐるからである。(註3)然し結局、今やワイルと雖もそれが存在する(es existiert)なる言辭の適用を許されたるものと考へる場合が現存するのである、何とならば此處では數γが順還論なしに構成された後始めてその存在が附加的に後から主張されるからである(註4)。

數γが構成された方法は略、次によつて特性付け得られる、卽ち我々は「數γはγに比して小なる有理數xの全體によつて定義される」と言ふ。もし假りにもこれらの言辭が實際の定義と見做されるのであつたら(勿論全然そうは思はれてゐないが)この定義は確かに一つの謬れる順還論を最も惡しき形で表はすものであらう。

それ故、唯だ、强ひて名付けるなら一つの不都合――數(2)の法則の助けを籍つてこれらに構成し出された上限γは豫め既に建てられた數形成の計算法と適應しないと云ふ唯一つの不都合が殘存する丈である。(註5)ワイルはそれ故、同樣の數定義によつて種々なる段階の數構成に達する(――我々は寧ろ一般に數構成によつて極限經過が對應すると言はう――)こと、又、それによつて統一的な數概念が破綻する樣に思はれると言ふ。それに對して私は力說したい、我々は實數の全體を構成し得ないといふことに係はりなく、我々はデデキントの截斷に於て一つの明瞭なるよく定義されたる數概念を持つてゐると云ふことを(註6)。この概念は又、二つの截斷が各々特殊な法則によつて與へられてゐるならば、云々の形成(和、積等)は一定の仕方で構成され、云々の事實が證明され得る、ことを(註7)我々が決定的に證明し得る限り又統一的でもある。

それ故、私には、近時、哲學の雜誌までが云々する數學の「基礎の危機」なるものは甚だしく誇張されてゐる樣に見えるのである。

勿論、數學のいかなる概念構成が、又、いかなる定理が、夫の上述の拒中律を無限多の場合に適用することなしになしとげられるか、の問題は意味深きものである。恐らくブロウアーはこの問題の解答の發展に寄與したこであらう、然しそれが實際に效果豐かなるものであるだらうかは唯だ未來のみが敎へ得る。

註(1) 敍述を一義的にするためにこの副規定を付加する、そこで、有理數は、それ自身は一つの截斷によつて表はさるべきならば、それを表はしてゐる截斷の第二類に屬する樣になる。

(2) それ故、一つの截斷の上位の、若しくは、下位の「數」は常に有理數である。

(3) ワイルが、連續體は算術的に構成され得ないこと、從つて實數の全體には到達し得ないこと（もし必しも始めから一定の幾何學的公理と關聯して要求し、然る後之を利用しないならば）を極はめて力說した見解に於ては、私は全然ワイルと一致してゐる。截斷が與へられてゐるべきならば、有理數を二類に分割するために一つの法則が現存せねばならぬ、それ故、實數の全體なる概念に到達するためには、我々はかゝる分割の可能的法則の全體を總攬し得ねばならないであらう。私は該見解を既に三十年以上も以前に言ひ現はしてゐる（Göttingische gelehrte Anzeigen 1892, S.594 Anmerk. を參照）。

(4) ワイルが全く始めて同樣に彼の上限に關する見解を討論した論文（Mathematische Zeitschrift Bd. 10 (1921)）の中に、ブロウアー

の概念構成に關する次の如き言葉がある、これは文字通り此處にも適用し得られる(S. 52)——『かくて積極的な問ひはこゝで今も亦、「性質Eなる法則が存在するか」である。然し我々はもはやこの法則の概念を構成原理の絶對絶命の窮地に陷れないで、もし順還論を含まない仕方で、いか樣にしてゞも、所求の法則の構成がなしとげられたならば、我々はかゝる法則が存在することを主張する權利がある。それ故此處では構成の可能性は全然問題ではなくして、唯だなしとげられたる構成、行はれたる證明に關してのみ我々はかくの如き存在主張を建てるのである。』(5)

周知の樣にこの要求が充たされてゐる特殊な場合が存在する、例へば數

$1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\cdots$

(6) の上限2に於けるが如きこれである。

かゝる概念は、例へば無限級數或は函數の概念と同樣に、特殊な構成原理を容れる所の謂はゞ普遍的な框を表はしてゐる。ワイルも他の機會に於てかゝる概念を是認してゐる樣に思はれる。彼は或るブロウアー的な概念形成を眼中に於いた箇所で次の如く言ひ表はしてゐる(Math. Zeitschrift. a. a. O., S. 42)『明瞭な一義的に規定された對象概念の意味によつて恐らく常に、その概念中に言ひ表はされた本質的な對象にはそれの存在範域が指示されてゐるでもあらう、然し決してその故を以てその概念が外延的限定をうけた(umfangs-definit)こと、卽ち、その概念の下に所屬する在存する對象を一つのそれ自體に於て規定され限定された理想的に完結されたる總體として云々することが一つ

の意味を有すること、を決定してゐない。』

(7) 例へば、二つの截斷が與へられ、一方が小、一方が大である場合、第一のものは第三の截斷を加へることによつて補充されて第二のものとなり、第二の截斷は第一の截斷の倍數によつて凌駕され得ると云ふ事實。デデキンドの截斷に對する數の定理が純粹算術的に證明され得ることは、私には『算術の基礎』に對する意義深き事情である如く思はれる、今日この基礎を說明する著者達はこの事情を餘りに顧みなさすぎると思ふ。上述の證明に關しては例へば、 M. Pasch, Einleitung in die Differential-und Integral rechnung, 1882, J. Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, 1886, O. Hölder, Die Arithmetik in strenger Begründung, 1914 (Programm d. Phil. Fak. z. Leipzig)・を參照。