實數の領域と連續

三宅剛一

この一篇を西田先生に捧ぐ

一、概說

論述がやゝ細部にわたる點があるので、はじめに大體の方針を述べておきたい。

個々の數はそれ〴〵一つの個體的存在とみられるが、數の個體性はそれの含まれる領域を離れては成り立たない。數に於ける領域は獨立に存在する多數個體の外面的或は偶然的な區界ではなく、個體はそれの存立に於て領域に依存し、領域の一般的法則が個體に對して内容構成的な意味をもつものであることは普通に認められてゐる。實に領域の概念は現代の數學の體系的な方面を特徴づける中心的な概念といつてよいであらう。「フェルマー以後の數論の全發展は、考察の主なる對象を數個體から數領域（ツァルベライヘ）へうつさうとする努力を示してゐる」とはある數學者の言葉であるが、この傾向は數學全般に於てみられるやうに思ふ。形式的な法則によつて規定せら

れた一定のOperationsbereichについての一般的理論を構成し、その領域の要素元素)として の數の性質を論ずるといふ行き方がとられてゐる。集合にもすでに領域としての意味が認められるが、群、體等に至つては明かに領域的概念である。これは數の理論を出來るだけ形式的に一般化しようとする數學の方法的傾向の現はれであるが、さういふ取扱ひが可能であるのは數そのものゝ對象的本質に基くとみなければならぬ。數概念が擴張されて多くの數の種類が並び存する場合に、それ等の數の對象的性質を明かにすることは、それ等がいかなる領域に於て成り立つ數であるかを考へることなしには不可能である。

數の領域として最根本的な意味を有するものは自然數の領域と實數の領域である。そのことは一般的な對象領域への關係からも云へる(自然數は對象一般の集合—有限の—の形式に關し、實數は量的なるもの一般に關する)が、その領域を規定してゐる所の形式の普遍性からもいへるのである。自然數についてはかつて論じたところにゆづる。實數の領域については、その形式的構造の普遍的意義は本論のうちで說かうとするものであるが、手近に、之を例へば代數的數の領域—代數數體—の如きものと比較して、後者を規定する演算の數學的特殊性と、實數體を限定する演算法

則及順序的關係の一般性とを對照してみても解るであらう。基礎論の方面から云つても數學に於て最も深い祕密は自然數の系列と連續(實數領域)にあり、すべての他のもの、負數や分數の導入、複素數其他の導入等は單に形式論理的な手續にすぎぬとワイルのいつてゐるのもある意味で(相當の差扣への下に)眞であるといへやう。私は連續を以て實數の存在領域とし、連續と實數及自然數との關係に於て、數學的對象の世界に於ける個體と領域との關係を考察し、それに基いて數の對象的本質、それの在在性の意味を考へてみようとするのである。

實數の理論に於ては、カントールの實數の定義に對するフレーゲの批評に基き、數學に於ける創造的定義といはるゝものゝ論理的難點を明にし、擴張法による新しき數の導入が論理的にいかなる假定を含むかをみようとする。次に、個々の實數が有理數の法則的な系列(基本數列)として定義され、更に實數の集合乃至系列として連續を定義する場合に必然に伴つて來る循環論の性質を分析する。その循環は結局領域内の要素の間に於て限定された關係又は性質を領域を形成する要素の全體に及ぼし、それによつて全體そのものを限定しようとする所に起ることがみられるであらう。無限な領域に於て循環的に所謂 impredicative に定義されたものは、ある構成の

立場に對して到達不可能なものであるが、かやうなもの丶存在とは何を意味するか、それの存在性の保證は何に基くかといふ問題が起る。そこから數を定義する性質(函數)の、從つてまた對象領域の階段性の主張や、連續を完結的集合とする考に反對する直觀主義者の説やに論及する道が開かれるのである。一般に、それは、要素の個別的に與へられ、限定される仕方と、それの全體の與へられ、限定される仕方の相違に關するのであつて、その相違は結局對象の與へられる、或は限定せられることが必ず一定の領域に於て起ることに基くのである。之を系列について云へば、ある領域のうちに含まれる系列を與へる所の法則によつて領域の全體を系列化することは出來ぬ。領域の全體の系列化は領域そのものを個體的要素として含むところのさらに包括的の場面に於てのみ可能である。この事を私はカントールの數階級(ツァーレンクラッセ)の理論の分析によつて確めることが出來ると思ふ。その場合第二數階級といはれてゐるところのものは、その系列的タイプに於て實數連續と相似的な關係にある。第二數階級は一定したタイプの系列の限定場面と考へねばならぬが、連續もまた系列の場面といふ意味をもつ。直觀主義の主張に對しては法則的構成の實現と、その實現の背後に豫想され、構成法則の共通的性質に基いて一義的に確定せる可能の場面とを區

別することによつて、連續の非過程的完結性を維持し得ることを示さうと思ふ。直觀主義が連續の完結性の可能を容れるべき餘地を全然もたぬものならば、それは連續のアポリーに對する棄權であつて解答にはならぬ。しかし實際にさうではないのである。直觀主義の主張から吾々が引き出し得るものは、法則的構成の場面自身の法則的規定からの自由性である。要素の法則的構成の全體を規定する全體法則(卽ち連續そのものゝ系列法則)が法則として與へられてゐないのであるから、そこに場面に對する個々要素の存在上の一種の偶然性がある。全體の法則的限定がない所に排中律の適用が許されないことも明かである。排中律の適用は否定の積極性を要求し、それは考へられたる體系の完全な限定性の假定の下にのみ可能である。直觀主義の立場はこの假定の放棄によつて特徴づけられる。

ある領域に於ける要素の存在が領域の要素の構成法則によつて必然化されるとき、領域そのものゝ存在はこの同じ法則によつては必然化されない。その法則は領域に含まれるものゝ構成法則に止るのであつて、その法則と領域との關係は前者が後者の領域としての「個性」的の内容を現すものであるといふ所にある。その限りに於てその法則は領域の個體的定性の表現として一の個體的法則といひ得る。であ

るから領域そのものが法則化されることはそれの法則が更に法則に基けられることに外ならぬ。これはまた領域を要素として包む所の包括的領域に於てのみ可能である。この場合包括的領域そのものは他の更に包括的な領域の要素とならぬ限り法則的に「裸か」な單なる所與的存在に止る。法則化の段階を追うて領域の退行的系列が成り立ち得るとしても、その系列の存在から直ちに系列が一定の極限を定めるものと考へることは出來ぬ。極限が定まるためには領域系列の系列法則が定つてゐることを要する。しかるにその系列法則は系列に屬する領域の何れかに於て成り立つものでなく、しかも吾々にはたゞ系列の項となる領域が與へられてゐるにすぎぬからである。かゝる事態はカントールの數階級の系列に於て形式的に現はれてゐる。かゝる狀態にあつては最後の支點は法則を超えた單なる事實的所與としての存在に求める外はない。所謂素朴的集合論は集合の領域そのものに之を求めた。包括的領域の「偶然性」は同時に最低の領域の殘りなき必然化の不可能を意味する。直觀主義者が自然數の系列を直接的所與とすることもかゝる意味に解することが出來る。

これ等は何れも一定の存在領域を獨立的なるものとして承認する立場である。

之に對して公理主義なるものは存在領域の絶對的定立を避け存在を假言的形式に於て主張する。公理によつて定立さるゝ存在命題はすべて甲があれば乙があるといふ形式をもつ。かやうな假言的存在は公理の非矛盾性といふ性質によつて一種の存在性を賦與される。對象領域の存在性は公理主義にあつては、單にその公理體系内での内在的存在性にすぎぬ。かやうな對象領域に對しては、まづそれの領域としての一義的決定性が要求される。公理體系の完全性（フォルステンディッヒカイト）條件と呼ばれてゐるものがこれである。しかし後に述べる如く、集合論の公理體系及實數の公理體系に對しては現在のところ完全な非矛盾性の證明も與へられてゐないし、對象領域の一義性に關しても重要な疑點が殘されてゐる。公理によつて定められる領域の相對性については所謂レーベンハイム、スコーレムの逆理がそれの内面的弱點を示したものと考へられる。

相對的假言的體系に於ける非矛盾性は、それによつて定義さるゝ對象領域の存在の相對的可能性を示すにすぎぬ。非矛盾性即存在の主張が眞に基礎づけられるためには、公理體系そのものゝ存立の基礎づけがなされねばならぬ。これは吾々を演繹的體系一般の形式的考察に導く。そこに數學的論理學と公理主義との關係の問

題が起つて來るのである。數學的論理學もまた一定の公理から出發する。たゞこの公理は普通の數學に於ける公理と異り演繹的理論一般に對する必然的な公理であるといふ要求を伴つてゐる。數學的論理學の問題はこの論文の本題からいへばむしろ附錄乃至補充に屬する部分で、十分に之を論明することは出來ない。しかし私は連續問題の考察から得られる對象界の領域的聯關の洞察に基いて一二の點を抽出して考へておきたいと思ふ。數學的論理學が現在する數學の概念及命題の分析に立脚し、この數學の基本概念の定義と公理の演繹とを可能にする原理を以て出發點としてゐる限り、それは眞の意味に於ける對象一般の形式學ではあり得ぬ。現在の數學の全般的基礎をなすところの自然數系列があらゆる系列の一般的原型であることが證明されない限り、自然數を基礎とする吾々の數學を可能なる數學一般と同一視することは出來ないし、かゝる數學の延長である所の數學的論理學を以て一般的な普遍數學そのものとみなすことも許されない。こゝでも一般的可能性とそれの限定された實現形態との區別が必要であると思ふ。ホワイトヘッド、ラッセルの體系の如きも著者自身の明言せる如く、その出發點となる indefinables の選び方は隨意であつて、たゞ現在の數學をそれから演繹し得ることを唯一の條件としてゐ

る。彼等の體系はその演繹に於てさへも實數體系に對する十分の原理を含まず、中途に於て論理的性質の不明なる公理(axiom of reducibility, axiom of infinity等)をかり來る外ないのであるが、よし他の更に完全な公理體系が發見されたとしても、それを以て直ちに普遍數學と同一視し得ないことは前述の理由から明かであらう。フレーゲ、ラッセル等の體系に於ては元來その基礎概念が單に數概念の定義を可能にするといふ見地の外に、クラスなるものに絕對的な論理的存在性を認定する思想が伴つてゐたのであつて、クラスによつて數を定義することが數に論理的在在性を賦與し得るとしたのである。クラスの概念に存する矛盾によつて、クラスなるものゝ領域の存在性が疑はれるに至つたことは、この點に於て、實に大なる衝擊――大きな例をとれば、無理數の發見がピタゴラス學派に與へたそれに比すべき――であつたに相違ない。かやうな絕對的含意をはなれて、その出發點の相對性をそのまゝ認容するならば、その體系によつてフレーゲの要求する如き概念の完全なる定義、卽ちそれの內包の規定のうちに外延の一義性が含まれてゐる如き限定性は滿たされ得ぬ要求といはねばならぬ。眞に數學的概念の完全な限定を得るには、對象一般を代表する普遍的概念の基礎の上に、あらゆる形式的概念の體系的限定の可能が假定されねばな

らぬ。即ち對象一般の概念が數學の概念を法則的に限定する一の具體的普遍として與へられねばならぬ。現實の數學概念に關してかゝる要求を滿足する數學的論理學の体系は與へられてゐない。かゝる完全な體系が與へられてゐないところに構成的進歩的學としての數學の存在の意義があるともいへる。數學を對象的認識となさず、規約的基礎の上に立つ記號の學であるとする數學者の唯名論的な考方も現實の數學の論理化の非事實性といふことからみて數學の現實形態に對する一種の批判を現すともいへるであらう。數學者のこの様な主張を以て積極的な數學の哲學とすれば勿論非難さるべきものであらうが、疑はしき形而上學をさけるといふ科學者の分限に於ける批判論的な差扣へとみれば必ずしも誤謬として排斥すべきではないであらう。數學が相對的公理體系による相對的立場からの整合的記號體系であるなら、それは相對の立場のまゝに對象世界の形式的聯關を現はすものであることも可能である。たゞ數學者はこの可能を積極的に基礎づけ得ないのである。

フレーゲの完全なる概念の限定性も、ヒルベルトの非矛盾即存在も、現實の數學的論理學及公理體系內に於てのみいはるゝとき、それは單なる假定であり要求であるにすぎぬ。しかしこのことからこの要求が不當であるといふ歸結は生じない。對

象領域一般の普遍的學の公理が一の完結せる體系として成立すると假定すれば、その體系に於て矛盾なきものは絕對的可能性卽ち形式的領域に於ける完全なる存在性をもつ筈である。ある公理體系がたとへ限られた範圍内に於てゞも、かゝる完全なる體系とイソモルフな關係にあることが證し得られるならば、前者に於ける非矛盾性卽存在の主張も是認せられるのである。ある領域の概念の完全なる定義は、その領域の構成法則を含む所の一般概念の完全な原本性を假定する。吾々はイデーとしてかゝる體系的概念の可能を認め、その存在條件を考へることが出來るであらう。この點からライプニッツ以來の普遍數學の思想を批判的に檢討することが出來る。定義から分析的に導き出された命題は假言的の妥當性をもつにすぎぬ、それが定言的妥當性をもつためには、定義が單なる內包規定でなく、概念の對象性を保證することが必要である。ライプニッツはかゝる定義を實在的定義(レアルディフィニション)とよんでゐる。夫々の概念領域に對してその定義の基礎として原本的概念が要求される。これ等はライプニッツに於ては一の普通的體系に屬せしめられ、それによつてそれの單なる假定性が脫せらるとせられる。この普遍的體系は夫々の原本的概念に對して存立の「理由」を與へるものである。かゝる體系がライプニッツの論理學のイデーに外

ならぬとする說(ビヒラー)の歷史的當否は別とし、ライブニッツの概念及定義の說、分析的眞理の考方を遡及してゆけばかゝる普遍的體系の要求は當然に起つて來のである。かゝる體系はライブニッツに於ては單なるイデーに止ることは明かである。近時の數學的論理學者は十九世紀に於ける數學の形式化論理化及論理の數學化於て普遍數學の實現を認め、或は少くともライブニッツに於けるより定全な定述が可能となつたと考へてゐる。しかし私は近時に於ける形式數學と論理との同一化はライブニッツに於て保たれてゐるところの論理の領域の特性の沒却を來してゐるところがあるやうに思ふ。可能なる演繹的理論一般の形式的條件といつても、その形式的條件の間に一般の段階を區別しなければならぬのではないか。この點に於て矛盾原理を唯一の論理の原理としたライブニッツの考に立ちもどつて考へてみる必要があるのであらう。この點から更に論理の領域と對象一般の場面との關係への展望も開けて來るであらう。

考察しようとする問題及考方の方向は大體以上の如きものである。考察の立場としては認識論的よりも對象論理的もしくは廣義に於ける對象論的見地に立ち綜合的よりもむしろ分析的な行き方をとることゝなるであらう。綜合的立場からの

範疇論乃至存在領域の理論が試みられるにしても、それの豫備階段として、純粋な形式的領域であるところの數の領域の特有なる構造聯關の分析的解明が必要であらう。論構の必要上數學的事項の叙述が交つて來るであらうが、一つには近時數學者自身のうちに、一種の問題史的聯關に於て成り立つた基礎論の歴史的なつながりにも留意して、多少の紹介的叙述を交へたわけである。

二、實數の定義

普通に數の概念の擴張とよばれてゐるものは歴史的には實際的必要から起つたものである。一方では代數的演算の數領域に於ける例外なき可能性の要求と、他方には量的な規定或は關係を一般に數として表はす必要とがそれである。かやうな事情の下に新しき數は最初は單に便宜上の記號として導入された。しかしこの新しき記號によつて表はさるゝものを從來の數記號の對象たる數と共に同一の領域を形づくる特有の對象として考へようとするのは論理的に當然の要求であらう。この要求を理由づける根據は新しき「數」と從來の數との間に存する機能的類似性もしくは形式上の類似性に求められる。それは新しき數記號に關して、從來の數に於けると同樣の演算法則が成り立つといふことに存する。かやうな意味でハンケル

の算法上形式不易の原則と稱せられるものが數概念の擴張の原理と考へられる。しかしこの原則を、數學者が普通に解してゐる如く、新しき數記號に對して從來の數に於けると同一の法則が成り立つ樣に、記號結合の形式を規定し得るといふ意味のものとすれば、この原則自身に新しく導入されたものを數として資格づける根據は求められぬ。何となれば從來の數領域に於て妥當した結合關係が本來一定の內容的意味をもつたものとすれば、それは明かに新しき記號の間には成立しない。しかしまたかゝる內容的意味を度外視するとすれば、その結合形式は、それの妥當する領域を數として資格づけるものではない。それならば從來の數領域そのものをも、特殊の內容的意味のない記號の集まりとし、その點で新しき數記號と同一の地盤に立たしめ、兩者が同一の形式的法則に從ふことだけを以てその領域的同一性を基礎づけるものとしたらどうであるか。それは一つの整合的な立場であることは明かである。しかしこの立場はもはや數概念の擴張の立場ではなく、新舊兩種の數を等しく一般的地盤に還元して、それを一定の法則的結合の要素といふ以外に內容的意味をもたぬものとして並立的に統一するものである。これはヒルベルトが數の擴張的(生成的)導入と對立せしめてゐる公理的導入法に外ならぬ。ところで擴張的方法

は元來數としての性質の疑ふべからざるものとして一定の對象領域を認め、その領域の法則を「數の法則」であるとし、この法則に從ふ限り新しき記號の集まりも數としての存在性をもつといふ素朴的假定の上に立つてゐる。しかるに公理主義に於てはこの假定は純然たる假定として現はれて來なければならぬ。何れにしても擴張法は結合法則の內容的意味を無視し得ない立場であつて、その結果として新しき數の導入に際しては、新しき領域に對してあらたにまた演算法則を定義しなければならぬ。こゝにフレーゲの非難する樣な切れ切れの定義が現はれるのである。十九世紀の後半に於ける無理數の數論的導入に於てもこの點は同樣である。

負數分數等に關しても嚴密な數論的導入は十九世紀の後半ワイヤストラス等によつて行はれたのであるが、その數論化の完成的段階として無理數の數論的導入となり、實數が純數論的に定義され、それが自然數と同一の基礎に還元されることゝなつた。茲に於て實數は自然數のもつ所の存在性(對象性)と同じような存在性をもつものとなつたと考へられてゐる。この定義は直接には有理數の集合或は系列によつて實數を定義するものであるが、有理數とそれの集合とに基いて有理數よりも更に包括的な實數の領域が果して定義(限定)され得るかといふ疑問が起る。こゝには

カントールの實數の定義について之を考へてみる。

カントールは有理數の收斂數列によつて無理數を定義する。かゝる數列を彼は基本數列（フンダメンタルライヘ）とよぶ。基本數列はそれの要素たる有理數に對して一の新らしき對象或は記號といはねばならぬ。カントールはまづ基本數列に關して加減乘除の演算が成り立ち、大小相等の關係が規定されることを示す。それについてのカントールの説明は次の如くである。$\lim_{\nu=\infty}(a_{\nu+\mu}-a_\nu)=0$（こゝに$a$は有理數、$\nu, \mu$は任意の正整數）なる關係によつて特徴づけられるあらゆる有理數の集合a_ν（基本數列）に對して次の三つの場合がある。(1)數列の項がνの十分大なる値に對し絕對値が任意に與へられた數よりも小なるか、(2)特定のν以後、ある定つた正の有理數ρよりも大なるか、(3)特定のν以後ある定つた負の有理數$-\rho$よりも小なるかである。(1)の場合は(a_ν)又は之に對應する數bは零に等しといひ、(2)の場合は零よりも大又は正であるといひ、(3)の場合は零よりも小又は負であるといふ。(Cantor, Math. Annalen XXI. S. 567) この定義は基本數列なるものを一の定つた對象として、零との關係によつて定義するものとも見られ、或はまた「(a_ν)が零に等し」「零よりも大」「零よりも小」といふ複合的言表の意味を定義するものともみられる。この場合が前の意味であることは、カントールが

すぐそれにつゞいて、基本數列を一の定まつた對象として論じてゐることからも推知せられる。複合的言表を定義しただけでは、その中に現はれる部分的言表を意味の定つたものとして獨立に用ひることは許されないからである。この定義を以て、基本數列によつて表はされる對象の定義とすれば、それは定義によつて對象を産出するところの所謂 schöpferische Definition である。かゝる定義は定義さるゝものゝ領域がすでにその存在性に於て確定してゐる場合にのみ正當なものとして承認されるべきものである。カントールの定義に對するフレーゲの鋭い批評はこの點に向けられてゐる。重要な點であるから次にその概要を述べる。これは Frege, Grundgesetze der Arithmetik. II. S. 80—96. にのせられてゐるものである。

まづ零に等しいといふのは零と一致するといふのか或は一致するのでなく單に等しいといふのであるか。もし後者ならば零に等しくしかも互に相異る多數の實數があるとも考へられる。(零に收斂する有理數列は多數なる故)從つてその中の何れを零に對應せしめてよいか不明である。もし前者ならば零と一致する數はたゞ一つ、卽ち零そのものゝ外にはあり得ぬ。さうだとすれば上の定義は既知の數の記述に止まり、新しき數の定義にはならぬ。(2)及(3)の場合は零及大、小の關係が新しき數

に關していかなるものであるかゞ既に知られてゐると假定すれば、それは定義ではなくて一の定理である。故に(2)(3)の場合にも、正又は負の無理數といふ新しき對象が與へられるのでなく、たゞ(2)(3)の如き場合に、正又は負の無理數を之に對應せしめよといふ指圖が與へられてあるのみで、何を對應せしむべきかは不明である。カントールはそれにつゞく和差積商の定義に於て、基本數列 a_v, a'_v を以て夫々新しき數を定めるものと假定してゐる。この假定は理由なきものであるから、そこでもたゞ二つの有理數列の項の和差等を項とする數列に一定の數を對應せしめよといふ指圖があるだけである。次に基本數列による定義を有理數にも及ぼし同一の有理數のみを項とする基本數列として之を定義する。この定義はかゝる基本數列に一定の數が對應することを假定してゐる。この假定が正當と認められぬ限り、有理數の如き定まつた、直接に與へられた數に之を對應せしめることは許されない。(この點はラッセルによつても指摘されてゐる。ラッセルはカントールが之を自明のことゝしてゐるのは基本數列に對する極限の存在が假定されてゐるためであつて、その限りに於てカントールが自らの實數の定義は極限の存在を假定せず、かへつて之を證明するものだとする言明を裏切るものであるとしてゐる) (Russel. Principles of Math.

p. 285)

カントールは更に二つの實數の差が零に等しきか、より大なるか、より小なるかによつてそれの相互の相等大小を定義する。これ等の關係は、それがこゝではじめて定義されるといふ以上未知のものとせねばならぬ。しかし一方定義のうちに零に對する相等、大、小の關係が用ひられてゐるところからすれば、それ等はすでに特殊な場合に部分的に知られてゐるものでなければならぬ。卽ちそれ等は二度に分れて切れ切れに(Stückweis)に定義されてゐる。かゝる定義は數學に於て普通に用ひられるものであるけれど、定義は概念を完全に限定しなければならぬといふ標準からすれば不都合な定義の方法といはねばならぬ。なぜならば新しき定義が必要であるといふことは、はじめの定義に於てこれ等の概念が不十分に限定されてゐたことを示すものだからである。「より大」といふ關係が十分に限定されてゐないとすれば「零より大」といふ概念も同樣である。「零より大」といふ概念が十分限定されてゐないとすれば、例へば月が零より大であり得るか否かを決定することは出來ぬであらう。かゝる關係に立ち得るものは數に限るといふならば、數とは何であるかゞ定義されてゐなければならぬ。しかるに今の場合數はこの關係を用ひてはじめて定義され

るべきものを含むのである。

フレーゲの批評の要點は次の如き章句のうちにみることが出來る。カントールの說明によつては「吾々はこの新らしき數と基本數列との結びつきのいかなるものかを知り得ぬ。全く知られざる關係によつて一の知られざるものを規定することは不可能である。誤りは、基本數列への Zuordnung と、新しき數の定義とを一度に併せ行なはうとするところにある。吾々はすでに定義された數を基本數列に對應させることは出來るが、これから定義さるべきもの、從つてまだ與へられてゐないものを之に對應させることは出來ぬ。」「吾々が金屬なるものが何であるかを知らずたゞスペクトル線だけを知つてゐる場合に、このスペクトル線に、それによつて定義さるべき金屬ナトリウムを對應せしめよといつたとする。どこから吾々はこの金屬を得るのであるか。この對應によつてゝないことは確かである。對應は吾々のまだもたぬものを造り出すことは出來ないから。吾々の知つてゐるのは若干のスペクトル線に止まり、各スペクトル線と諸金屬――それは吾々にはまだ知られてゐない――との特殊な關係については何等知るところがない。かゝる場合ナトリウムなる名稱は空にたゞよう外はないのである。之と同樣 b によつて表はされるものを吾

々は全くもつてゐないのである。だから對應はたゞ意圖に止まり、その意圖が達し得るか否かは不明である。」

フレーゲは實數を單なる記號にすぎぬとする形式主義に反對すると共に、實數に內容的意味を認める立場に對しても、あらかじめ實數が何であるかを確定することなしに、有理數列を用ひて新しき數領域を造り出さうとする創造的定義の不合理を指摘するのである。フレーゲ自身は、實數を量の關係 Grössenverhältniss であるとして、之を自然數と領域的に區別し、まづ、ある部類が量領域（グレーセンゲビート）であるためにもつべき性質を定めることから始めようとする。彼によればそれは關係の領域に外ならぬ。從つて實數は關係の關係である。私はこゝにフレーゲの實數論を開陳しようとするのではなく、たゞ彼が新しき數を定義するために、まづそれの屬すべき對象領域の何であるかを確定しなければならぬとする見解だけを注意しておきたい。數學的對象は一定の結合法則と結びついてゐる。故に對象の內容が一義的に定められるためには、當該結合法則の行はるゝ領域が決定せねばならぬ。數學者の數構成の實際的過程は必ずしもかやうな論理的次序によるものでなく、部分から全體に、非體系的な概念、卽ちある意味で一面的抽象的な概念から體系的な概念に進み、しかも體系その

ものは與へられたるものでなく求められたるものとして、公理によつて假定されるに止まるであらう。しかし嚴密な對象論理の要求からすればフレーゲの所謂完全に限定されたる概念が基礎にならなければならぬのである。かゝる見地からフレーゲが創造的定義に反對するのは正當といはねばならぬ。數學に於て普通に用ひられる抽象による定義も創造的定義に類するものであるが(ワイルは之を創造的定義の特殊の場合としてゐる)この定義の仕方も嚴密な意味で完全なものではない。この定義は二つの對象の間の相似關係(一般には移動的、(トランシティブ)對稱的、(シムメトリカル)再歸的(レフレクシイブ)——その對象の領域に於ける——)の存在から、それらの對象が之に對して同一なる關係に立つところの第三の對象が定まるとするのである。例へば二つの圖形が形に於て相似的なる場合、同一なる形なるものを一の定まれる對象として抽き出すのである。

しかしこの相似から同一への轉移は一の假定に基く。それは卽ち第三の對象領域の存在である。二つのものが相似であるといふことからは、たゞ同一的な第三のものがあるならば、それに對して兩者が同一の關係に立つといひ得るのみで、この第三者の存在そのものは抽象原理によつて與へられるものではない。ラッセルが抽象原理を一の公理としてゐるのもその意味であらう。(ラッセル上出、二二〇頁)。ラ

ッセルはこの定義は定義されるものゝ唯一性を保證するものでなく、又それが何であるかを示すものでもないとしてゐるが(同、一一四―五、二八六頁)嚴密に云へばこの原理からは第三のものゝ存在すらも歸結するものではない。相似關係から導き出される第三のものは單なる要求の概念に止まり、それを充實する對象は別に獨立に與へられねばならぬ。フッセルの心理的抽象說の批評の如きも、一方同一的對象の直接なる所與を可能とすることによつて支持されてゐるのであつて、その可能を豫定せず、單なる類似性の立場は無限の逆行に導くといふ如き消極的論據のみによるとすれば一種の循環論に陷るものといはねばならぬ。

數學的對象の如きイデアルな法則的對象領域にあつては、何等かの定つた對象の假定は、同時にそれの屬する完結せる領域卽ち一の體系的全體の假定を含む。所謂創造的定義についてもこの事が當てはまるのである。ワイルのあげてゐる例について考へてみよう。幾何學に於て圓を定義するに、OA＝OB なる三點間の合同關係に基いて、一點Oと一のそれと異る點Aが一の圓Aを通るOの周りの圓を定めるといふ。ある點Pがこの圓に屬するとは OA＝OP であるといふことに外ならぬ。數學者にとつては圓が何であるかはどうでもよいのであつて、一の圓が與へられる仕

方(卽ちOとAとによつて)と、一點Pがかくして與へられた圓に屬するとは如何なることであるかといふことだけが重要なのである。圓の概念はいま述べた如き形式の言表及びそれに基いて顯在的に定義された言表のうちにのみ現はれる。それ故Aを通るOの周りの圓とA′を通るO′の周りの圓とは、第一の圓に屬するすべての點が同時にまた第二の圓にも屬し、且その逆も成り立つときにのみ同一なのである。すべての點といふ無限集合への關係を含むこの標準は、幾何學の公理に基いて、一の有限の標準(O′はOと一致し且OA′=OAたるべし)によつておきかへられることが知られるのである。(Weyl, Philosophie der Math. u. Naturw. S. 8)かやうな定義の仕方が可能であるのは何によるのであるか。幾何學の公理によつて定められる點の集合領域が一の完結せる體系をなすが故である。もしさうでないなら任意の點を代表するPなるものを用ひることは許されない筈である。上の同一性の標準はOの周りの圓とO′の周りの圓とが空間のすべての點に對し考へられたる性質に關し同一のVerhaltungsweiseをもつといふことに外ならぬのであるが、かゝることは空間の點が全體として完全に限定された體系をなすことを假定しなければ意味をもたない。もし一點でも體系的に限定されない點があるならばそれが一方の圓に屬して他方の

圓に屬しないといふ可能性を否定し得ぬからである。ユークリッド空間の點集合によつて限定されない點を含む空間(云ひかへればユークリッド空間と點の配列に於てイソモルフィーの成り立たぬ空間)にあつてはユークリッド空間內で一致する圓が一致せぬといふ場合も可能である。數學に於て一般に同一性をあらゆる場合に於ける相互交換の可能性として定義するとき、その「場合」の關するところの全體が體系的に定つてゐて、體系內で兩者の交換可能と否とが一義的に決定し得ることが條件となつてゐると考へねばならぬ。

形式上相似な性質(概念、函數)と集合との一義的對應を假定すれば、性質の相似から集合の同一性を推斷することが出來る。フレーゲ、ラッセルなどに於て內包的論理と外延との聯結もそれに基く。だから一たび、論理的形式の上で缺陷なく定義された概念に對應する集合の存在が、それの矛盾的性質の故に疑はしくなり、集合領域の體系的完結性が疑問となつて來ると、彼等の自然數の定義そのものが疑はしくなつて來ないわけには行かぬ。同樣な理由によつて有理數の segment によるラッセルの實數定義にも難點が含まれてゐるといはねばならぬ。有理數のセグメントなる概念は有理數の集合の全體が完結せる領域であるといひ得るときにのみフレーゲの

意味での限定性をもつ。しかるに有理數の集合なるものが完結せる全體をなさぬことはラッセル自身の階段説からの一の歸結なのである。即ち有理數の領域に於て何等かの全體を限定することから必然にそれに屬せぬある有理數集合が限定される。その意味で有理數集合の領域はワイルの所謂外延不定なる領域とせねばならぬ。だからラッセル、クーツラー等のいふ如く有理數のセグメントによる定義は實數の存在性を明にするもので、あらかじめ有理數以外の數の存在を假定することなく、有理數の全體が存在する限り實數の存在は疑ひを容れない(Couturat, Die phil. Pr. d. Math. S. 91)といふのも疑問となつて來る。

實數の完全な概念が成り立つためには、それが個體的要素として含まれる實數領域の概念的限定が與へられねばならぬ。有理數の領域以上の個體領域をあらかじめ認容せざる限り、基本數列、又は截斷の如きものが一個の數であることの可能は理解出來ぬ。あたかも自然數系列の順序型として、自然數の系列法則そのものを代表するところのカントールのωなるものが、自然數につゞく數であるといふ樣な言説が、自然數を超え而もそれを部分として含むところの數領域の存在を認め、且つその領域の要素が何であるかを知らぬ限り、全然無意味なものとなるのと同樣である。

ある系列の極限要素は、その要素をも含む包括的系列に於てのみ要素としてあり得るといはれるが、かゝる包括的系列は特定の極限要素だけでなく、同様な仕方によつて定められるすべての極限要素を含むものでなければならぬ。しかも極限要素の系列は、その要素によつて限られる系列と系列として同一のものではなく、後者の系列性だけからは前者の系列性は導き出されない。有理數列の極限要素の系列的定義は連續の系列化の可能を豫想するものである。連續は果して系列化し得るであらうか、もしそれの系列化を可能であるとするならばそれはいかなる領域的に於てゞあるか。かやうな問題は吾々を連續の順序的定義といはれてゐるものゝ考察に導いて行くのである。しかし私はそれにうつる前に實數の公理的導入或は抽象的定義と稱せられるものについて概觀しておきたい。

ヒルベルトは擴張的方法による數の導入を發生的（ゲネティッシェ）方法および之に公理的方法を對立させる。彼によれば吾々の認識の内容の決定的敍述と十分な論理的確保といふ點からすれば公理的方法を優れたものとしなければならぬ。(Hilbert, Über den Zahlbegriff. Anhang VI. zur Grundl. d. G.) この方法は適當な公理によつて規定せられた一定の相互關係に立つところのものゝ體系を規定し、その體系を以て數の體系とする

のである。實數の公理體系としてはヒルベルトの論文の外にハンティントン其他の公理體系がある。私はこゝでは實數を一種の體として定義する仕方に從ひ、ハンティントン、レウィ等に據つて實數體の公理(公準)をあげる。(Huntington, Aset of postulates for real algebra. Trans. of Am. Math. Soc. VI. Loewy, Lehrbuch der Algebra 。實數の公理を便宜上私は二群に分け、(1)を體の公理(2)を順序の公理とする。(2)は又量の公理といつてもよいであらう。それは吾々が量と名けてゐるものゝ純粹な形式的規定とみられるからである。

(1)　體の公理

Kをある集合としそれの任意の要素の間に二種の結合法則を規定する。之を加法及乘法と名ける。いふまでもなくこの二種の結合は全然形式的のもので、その性質はたゞ公理によつてのみ定められる。この二種の結合の結果を夫々和及積と名ける。

1. a及びbがKの要素ならばそれの和及び積($a+b$, $a.b$ で表はす)もKの要素であり a 及 b によつて一義的に決定せられる。

2. 加法に關する結合法則が成り立つ。$(a+b)+c=a+(b+c)$

3. Kのあらゆる要素 a に對し $a+z=a$ なる如き z が存在す、かゝる z を零要素と名け O で表はす。

4. $a+x=o$ なる如き K の要素 x が存在する。

5, 乘法に關する結合法則が成り立つ。$(a.b)c=a(b.c)$

6. Kのあらゆる要素 a に對し $a.u=a$ なる如き關係にある一つの要素 u が存在する。(單位要素)

7. O 以外の K の要素 a に對して $a.x=u$ なる如き x が必ず存在する。

8. 乘法に關する交換法則が成立する、$a.b=b.a$

9. 分配法則が成立する、$a(b+c)=(a.b)+(a.c)$

(2) 順序の公理

10. K の二要素 a と b とが $a \neq b$ なる關係にあれば $a<b$ なるか $a>b$ なるかである。

11. $a<b$ ならば $a \neq b$ である。

12 $a<b$ 且つ $b<c$ ならば $a<c$ である。

13. $a<b$ ならば $a+c<b+c$ である。

14. $o<a$, $o<b$ ならば $o<a.b$ である。

15. $o<a$, $o<b$ なるとき $a<b$ ならば常に $b<pa$ なる如き正整數 p が存在する。（アルキメデス

の公理)

16. Kは10—15の條件に該當する限りのあらゆる要素を含む體であつて、その上に他の要素を加へしかもなほこれ等の條件を滿足する如き體系は存在しない。(完全性の公理)

右のうち15及16からデデキントの連續の公理が導き出される。また16の代りに連續の公理をとつても決定せられる領域は同一である。この場合は15は證明出來る。

これ等の公理の體系はそれの非矛盾性の證明がない限りはそれによつて定義される領域の存在(可能)を確立するものではない。普通には別に發生法によつて構成せられた實數の集合の存在を假定し、その集合へ同型(イソモルフ)的に映寫(一對一の對應)し得ることを以て非矛盾性の證明にかへる(ハンティントン)のであるが、徹底した公理主義の立場からはかやうな證明法は許されない。實數公理の獨立な非矛盾性の證明はまだ與へられてゐない。その證明はヒルベルトの形式化によるにしても、數學的論理學の立場から、實數領域に當るべき關係及部類領域を論理的に構成(定義)するにしても、最大の難關は完全性の公理或は連續の公理である。かりに關係の領域なるものをそれ自身として可能なるものと假定すれば、和、積、零要素及單位要素及逆要素等を關係論理的に定義することは比較的容易であり、加法及乘法に關する結合法則、分

配法則、交換法則(限られた範圍での)等の成立することも論理的に證明し得る。10から14までの順序的關係の成立も關係の系列的規定から導き出される(Whitehead and Russel, Pricipia Mathematica. Vol. 1 Part I. Section C. D. Part II Sect. E. Vol II. Part IV. 參照)。しかし連續の公理の證明(それは上限の存在の證明に歸着する)は還元可能性の公理の如きものを假定しなければ不可能である。この公理は論理的過程の循環を避けるためにおかれるものであるが、連續の公理が何故に循環に導くかは次節に述べるであらう。

完全性公理なるものゝ形式上の難點を示すことは容易である。他の公理がすべて實數領域の任意の要素間の關係の規定であるに反し、完全性公理のみは要素の全體に關する。この公理は之を形をかへて現はせば、某々の條件を滿足し、しかも公理によつて定められる集合Kよりもより多くの要素を含む集合は一般に存在せずといふ形式のものである。これは無制限にあらゆる可能なるものゝ全體への關係を含むところの存在命題である。かゝる命題の非矛盾性の證明は、それが全く不可能でないと假定しても、非常な困難を伴ふことは豫見するに難くない。之を別な方面から云へば、この公準が他の公理と獨立であるためには、それを除いた他の十五個の

公理によつてすでに一の定まれる對象領域が決定されてゐることが必要である。たゞその領域が多樣である場合、この公理によつてそのうちの「最大」なるものを實數領域と定めるものともみられる。しかしそれ以外の公理によつて多樣なる對象領域が定まるといふ如きことは具體的な對象の領域を考慮に入れたときにはじめて起り得ることであつて、純形式的な集合領域としては考へ得ないことではあるまいか、最近數學者の間にも完全性公理の特殊性が注目されるやうになつた。例へば實數公理と平行するユークリッド幾何學の公理體系に關して最近バルドゥスが完全性公理に對し批評的な見解を發表してゐる。(R. Baldus, Hilberts Vollständigkeitsaxiom. Math. Ann. 100. 1928) 集合論の公理體系に於ても完全性公理に當るものがおかれるとき上述の如き見地から非難が起る。このことは後に述べる。ヒルベルトの證明論に於ける公理の分け方に從へば完全性公理は超限數的公理に屬するものであるが、同一群に屬する他の公理と同樣それの非矛盾性の證明は特別の假定を要するのである。

三、順序型としての連續

無理數の構成的定義によつて連續も數論的に構成し得ると考へられる。有理數を系列化する法則が實數を與へると同樣、實數集合について系列的法則を定義する

ことによつて、連續そのものが系列として順序的に定義せられるといはれてゐる。ラッセルなどはカントールの順序型としての連續の概念を以て連續の純順序的、從つて純論理的な定義とみなしてゐる。しかしまた一方また連續の順序的定義或は arithmetische Erzeugung の可能に對しては重要な難點が存することも拒めない。個々の實數は有理數の特定の系列法則である。だから連續は有理數の法則の全體に關する法則といふ意味をもち、連續が系列化され得るには可能なる有理數の系列法則の全體が一の系列法則をもつことが必要である。しかし集合論の逆理から知られる樣に、ある種の全體に關しては正當な概念による限定が成り立たず、それの定義は循環に陷るのであるが、實數の集合の定義もまた循環的となることがワイル等によつて論證せられてゐる。であるから連續の順序的定義なるものは決して簡單に承認し得るものではない。

まづ連續の定義に於ける循環について述べやう。連續の特徴は極限要素の存在にある。極限は順序的に次の樣に定義される。一の無限系列は、その全系列の後に來る項があり、且つその項に先つところのすべての項に對しては、系列中に必ずこれを後るゝ項があるとき、極限をもつといふ。之を形式的に述べると、ある集合 a が系

列的關係Pに關して(1)最大項(マキシマム)をもたぬ、(2)Pの領野(フィールド)に屬するaの要素はPに屬するある要素xに先だつ、(3)Pの領野の要素中xに先だつものはaのある要素に先だつといふことゝなる。こゝに最大項といふのは、Pの領野に屬するaのある要素であつて、しかしそれはaのいかなる要素に對してもPなる關係に立たぬものである。かやうなxはPによつて系列化されるaの上限といふ。それで上限の存在といふことは、Pの領野に屬する一定の集合(零集合でなく、且つその集合中の要素はいづれも集合中の他の要素に先だつ如き集合)の存在に依存する。ある集合に屬するといふことは要素の一定の性質とみられるから、上限の定義にはPの領野のうちにしかじかの性質をもつた要素が存在するといふ命題が含まれてゐる。これはPの要素全體に關する存在命題である。ところで上限そのものもPの要素に外ならぬ。故に上限の概念は自己を含んだ全體の上に定義せられてゐる。これは明かに一の循環的定義といはねばならぬ。ある全體によつて定義せられるものは、その全體の中に含まれるものより一段高次の階段に立つといふ階段説に從へば、上限とそれによつて限界づけられるものとは異つた階段に立つ。從つて同一系列をなし得ぬといふことゝなる。これはワイルが解析數學に於ける circulus vitiosus として指摘してゐる

るところのものである。(Weyl, Die heutige Erkenntnisslage in der Mathematik. Symposion Bd. I. Heft I. 其他多くの論文、著者に出づ。ワイルの義論に對するオットー、ヘルダーの批評については本誌百五十號下村氏の紹介參照)

數學的對象はそれが正當な論理的或は特に數學的構成の方法によつて定義さるるときにのみ存在するといふ立場からすれば、かやうな不當な循環によつて定義されたものの、存在は疑はれねばならぬ。正當に定義される對象の範圍は定義の原理に從つて異つて來る。最もラヂカルな直觀主義の立場については後に論ずるであらう。連續の論理的定義を可能であるとしたラッセル等の方法も前述の如き極限要素の階段的高次性の事實に逢着して、はじめに十分であるとした論理的原理を擴張するの止むなきに至つてゐる。而して所謂還元可能性の公理を加へた定義原理はそれが純粹に論理的であるか否かゞ判明しない狀態にある。而してワイルも、はじめ數學的論理學のそれに類似した構成原理によつて、數學的對象の領域を限定しようとしたのであるが、前述の循環をさけるため、存在原理の適用を一定の領域に制限した。(彼が基本範疇とよんでゐるもの――自然數及その關係、從つて有理數を含むが、有理數の任意の性質及關係を除外する)。それがために存在を認められるとこ

ろの數の領域が從來の實數領域よりも制限されたものとなる。卽ち、從來の連續に比すれば不連續的といはねばならぬところの數體系が得られるにすぎぬ。（Weyl, Das Kontin-uum.）それはワイルが連續の atomistischeA uffassung とよんでゐるもので、後に彼はこの立場をすてたが、それは一定の定義原理により明確に限定された可能的數領域として意味を失はない。

有理數の集合を要素とするいかなる系列が法則的に限定せられても、その系列のうちにあらゆる可能なる有理數集合の全體を含ましめることは出來ぬ。個々の實數を無限小數として規定すれば、實數の全體としての連續はあらゆる可能な無限小數の全體と考へられる。吾々が何等かの無限小數の系列を法則的に限定したとすれば、その限定法則そのものに基いて、この系列に含まれない一の無限小數が定義されることはカントールの對角線的方法の示す如くである。その意味で有理數集合の全體は umfangsdefinit でないといはれる。實數の任意の系列構成に對して連續はそれを含む場面の意味をもつ。いかなる法則的系列もこの場面の中に限定し得るが場面そのものを系列化することは出來ない。この點ではコーンが連續の構成的定義を不可能とし、基本數列による連續の定義は實はネガティフの意味をもち、連續

が基本數列によつてつくしきれないことを現はすものにすぎぬといつてゐるのに同意することが出來る。(Cohn, Voraussetzungen and Ziele des Erkennens. S. 268) 連續のうちに任意に系列が構成され、しかもその何れの系列に對しても偏よることなき平等な關係にあることを以て、コーンは直觀形式としての連續體の受動性を示すものとしてゐるが、直觀形式とか受動性とかの概念が、果して連續を特徴づけるに適當なる概念であるか否かはにはかに斷定し難い。連續の特徴は任意の基本數列がその中に含まれるといふことにつきるものでなく、可能なる基本數列の全體としての一の完結性をもち、可能なる法則の場面としてそれ自身ある法則的な全體をなすものといはなければならぬ。私はこれ等の點を更に明瞭ならしめるために、實數連續と順序型を等しくすると考へられてゐる所のカントールの第二數階級をとつて考へてみよう。連續の系列化の可能の問題は第二數階級のそれと全く同一の性質をもつものである。

自然數の系列は系列の形式の上から一の定つたタイプをもつてゐる。即ち最初の項があり、一の項にはそれにすぐ續く項があり、系列に終項の存在しないことがその特徴をなす。自然數系列と系列的形式を同じくするものはすべて順序型に於て

相似であるといふ。自然數系列のタイプの順序型をωと名ける。順序型とはカントールの説明によれば整列集合に於てその要素の性質を抽象し、たゞそれの繼次の順序だけを保存するときに成り立つ一般概念である。整列集合の順序型をそれの順序數といふ。順序數は一つの定つた思惟對象であり、それについて加法乘法等を定義し得るから、之を數と考へてよい。有限な正整數は一々が一つの順序型をなす。順序型の概念によつて有限數とωとが數として統一される。カントールはωを有限な自然數の極限、之にすぐ續く數であるとする。ωがすでに數であればそれに一づゝを加へた數$\omega+1, \omega+2, \ldots\ldots \omega+\nu, \ldots\ldots$が得られる。この系列の極限$\omega+\omega$を表はすに$\omega.2$を以てする。$\omega.2+1, \omega.2+2\ldots\ldots$の如くしてまた一の新しき系列が生じ、順次に一を加へ行きてその極限をとることに依て$\omega.3, \omega.5\ \omega\mu\ldots\ldots\omega.\omega$に至る。最後のものは之を$\omega^2$で表はす。かくの如くしてつゞけて行つて$\omega^2, \omega^3, \ldots\ldots \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}\ldots\ldots$が得られる。これ等の數の形成は明かに二つの原理に基く、卽ちすでに構成された數に一を加へる方法と、極限を定める方法とである。之をカントールは二つの生産原理と名ける。ωを一の數と考へるとき、自然數の一、二、三等を數であるといふのと意味を異にすることは明かである。ωは自然數の順序型、卽ちそれの系列法則に外ならぬ。だか

らωに一を加へるといふことが意味をもつためにはその場合プラス及び一は自然數に於けるそれと區別されねばならぬ。それは一つの新しき(自然數の初項と異る)初項の次の項といふにすぎぬ。$\omega+1$, $\omega+2$,……の系列と自然數系列とはその初項の相違を除いては全然同一形式のものであつて何れもプログレッションの一つにすぎぬ。兩者の區別は全くその初項の相違にある。自然數の初項一は不定なる一般的初項であり、ωは自然數の順序型である。$\omega.2$, $\omega.3$等の新しき初項としての意味は明かである。ω^2は極限過程によつて生ずるω系列そのものゝ極限に外ならぬ。或はωから初まる初項の無限系列そのものゝ極限である。かゝる極限が定められることはωから始まる初項構成の法則が一定せることによる。即ち$\omega.n$から$\omega(n+1)$に進む過程の一義性的限定性に基くのである。しかしこの系列法則とωからω^2に至るそれとは明かに別なものである。同樣にω, ω^3……からω^ωを導き出す極限過程も又一の新しき系列法則に對應するものである。この系列的進行は自然數から始まり逐次的に達し得るものであつて、各々の初項はすべて自己に至る全過程によつて特質づけられるものとして唯一性をもつ。ω^ωに至るまですでに三種の相異る系列法則が現はれてゐるが、それ等の系列法則の一種類から次のものに進む過程を規定す

る一般法則はないのである。この意味に於てそれは一回的な過程の意味をもつ。ω^ωから第一のユプシロン數に至る極限過程も又第四の新たな系列法則に對應する。新しき系列法則の成立はそれに基く極限に對して絕へず新しき記號の導入を要求する。であるから系列法則そのものゝ系列の構成法則は、結局新しき極限記號の構成の法則とをもみられる。何となればその際の記號の導入は一の新しき極限過程を代表し、極限過程の限定は系列法則の限定に基くのだから。ところで第二數階級のいかなる數をも現はし得る系統的な記號法の可能は現在いまだ證明されてゐないのである。(Becker, Math. Existeuz. S. 128.)これは第二數階級を構成する系列法則の系列はたゞ一步一步逐項的個別的に定め得るのみで、それの系列全體を規定する法則の存在しないといふことに外ならぬ。その限りに於て第二數階級の系列は一回的個體的の性質をもつ。ベッカアは、すでに定義された超限數に基いてより高き超限數を定義するいかなる個々の定義方法も一定の限界をもち、あらゆる可能なる定義の方法が第二數階級の内部に於て一の「極限」に達することも可能であるといつてゐるが(同上、Anmerk. 3)それはいまのところ單に推測に止る。新しき系列法則の定義が無限に進み得ることの不可能もまた證明されてゐない。吾々は第二數階級の系

列化の可能を否定しないで、もしそれが可能であるとすればいかなる假定の下に可能であるかを考察しよう。

第二數階級內の系列のいかなるものも、初項の內容によつてのみ區別される。それ等の一々の初項は之に先だつ系列の系列法則そのものを代表するものであることは既述の通りである。ところでいづれの初項に對應する系列もそのタイプに於ては自然數系列のそれに外ならぬ。これをかりにオメガタイプと名ける。第二數階級內の極限過程はすべてオメガタイプの系列の極限である。即ちこゝには第二生產原理はオメガタイプの極限過程に限られる。第二數階級內でこの原理は二樣に用ひられてゐる。一つはω, $\omega+1 \cdots\cdots \omega 2$に至る場合の如くに一の初項から次の初項にうつる際の極限過程として、第二にはω, $\omega 2 \cdots\cdots \omega^{\omega}$にうつる場合の如くに初項の系列そのものゝ極限過程としてゞある。しかして對應の表をつくることによつてたやすく解る如く、この二種の並用による初項形成の過程の回數(卽ち相異る初項の數)はまた第二數階級の數と相似である。ところで第二數階級全體はオメガタイプの系をなさぬことはカントールの證明したところである。(Cantor, Beiträge. §16)故に初項の系列全體もまたオメガタイプの系列をなさぬ。卽ち初項の系列の系列法則

は從來の系列法則とは異つたもので、それがいかなるものであるかは不明である。であるから第二生産原理によつて第二數階級の數全體の極限に進むことは許されないわけである。數學者は第二數階級の極限は第二數階級の數でなく、第三階級の數、卽ちそれの始數Ω_1であるといふが、第二數階級の系列法則が不明なる限り、かゝる極限の可能は疑問である。もし第二數階級そのものゝ系列化が可能であるとすれば、從來吾々の知れる系列法則とは別な系列法則によるのでなければならぬ。しかしその系列法則によつては、また第三數階級の系列化は成り立たぬ。かくして數階級の系列の連行は、たへず新たなタイプの系列法則の限定を要求し、しかもこの異つたタイプの系列法則の系列そのものを法則化する可能性は、之を推定せしむべき何等の根據もない。上述の如く完全な法則化が成り立たぬとすれば、數階級はどこかで個體的領域としての性質を殘してゐるものと考へねばならぬ。吾々はいま第二數階級以上に進むを要しない。系列的領域の特性は第二數階級に於て十分にみることが出來るのである。第二數階級のうちに限りなくオメガ系列を定め得るが、いかなる系列に對してもそれに含まれない項が第二數階級のうちに見出される。又與へられたあらゆるオメガタイプの數列はこの數階級に屬することが示し得られ

る。しかし一方この數階級は、その中に定め得るあらゆる無限系列がオメガタイプのもの以外にあり得ぬことによつて、それの包括性の限界が定められてゐる。この意味でこれを可能なるオメガタイプの數列の領域として特徴づけることが出來るであらう。第二生産原理をオメガタイプの系列の極限構成のみに限れば第二數階級はヘッセンベルグのいふ如く第二の生産原理の Operationsbereich として十分に限定される。この領域の系列化は之を内に含むところの更に包括的な領域に於てのみ可能である。

これまで述べて來たところによつて、第二數階級と連續との間に、基本數列に對する關係に於いて全く相平行する性質が認められるであらう。これによつて連續の系列化のために要求さるゝところのものも察知し得るであらう。連續もまた可能なる基本數列の領域として限定される。しかし系列領域としての限定は直ちに系列化ではない。領域としての限定は、そのうちに含まるゝものへの關係に基いての限定である。領域に含まれるものは法則的に限定し得るが領域のものはかゝる法則の場面として、それ自身法則的限定を超越する。法則の領域そのものを更に限定する法則がもしありとすれば、それは更に高次の法則の場面を要求し、そこにまた法

則を超越した一の場面を殘すのである。

カントール及び彼の思想を繼承する集合論にあつては、いかなる系列の領域も結局唯一の場面卽ち集合の場面に含まれる。集合は系列と獨立に、系列をまたずして存立する。整列集合は集合のいはゞ一の樣態なのであつて、それは集合に於ける部分の包括關係に基いて成立する。吾々が集合の系列を實際に定める方法は一定の系列法則の定義による外はないのであるが、古典的集合論に於ては一定の仕方による定義の可能は問題ではない。集合が與へられてある限り部分の包括關係もまた與へられてゐる。從つて集合は本質上整列化し得るものである。吾々がそれについてある仕方によつて系列法則を定義し得ると否とに係らず、集合がある限り、それの系列も成立し得るものと假定せられる。集合論に於て系列の領域擴大の可能が問題とされず自明的として假定されてゐるのは、集合に關するかゝる素朴的實在論の立場に基くのである。カントールのインテルネベスティムトハイト(內面的決定)の立場が彼以後の公理主義の集合論によつていかに制限されたかについては後に述べるであらう。集合の獨立的所與性を否定し構成的到達の可能を以て存在の原理とするとき、領域と領域に於てあるものとの構成法則に對する關係の相違が前面

に現はれることは當然である。この相違に特別の重點をおきそこから在來の集合論の根本的な再吟味を企てたものはブラウアー一派の直觀主義である。

四、直觀主義に於ける連續

直觀主義者にとつては數學的對象は特有な數學的構成の產物である。構成は必然に逐次的過程であるから數列の概念が根本的となる。あらゆる數列の構成の基礎となるものは自然數の系列である。それは最初の項と、あらゆる項からそれに續くところの項を導き出す法則とによつて規定される。一切の他の數列は自然數系列の要素を任意に選び出して造られるもので、その選び方が一の法則として構成されたものが特定の數列である。それであるからあらゆる數列は自然數を基礎とした一の函數として成立する。自然數から任意に要素を選び出す仕方は必ずしも自然數と同一のタイプの數列即ち無限數列を與へるものではない。その選擇は一定の項に至つて中絶することもある。撰擇作用がすべて無限(こゝに無限といふのはすべて自然系列と同型の無限なる數列を生ずる時、その撰擇作用が實數の集合を生ずる基礎となる。かやうな立場に於てブラウアーの構成的集合定義なるものゝ意味が理解されるのである。それによれば、集合は一の法則であつて、その法則に基い

て、自然數系列から任意に記號が選び出されたとき、その選擇のどれもが一定の記號系列を生ずる。その際この生産過程は制限なく進行することゝ、特定番目に至つて中絶(ベエンディグング)が起ること、尚又その進行の阻止(ヘムング)が起ることゝがある。かやうな仕方で限りなく進行する選擇作用によつて生ぜられる記號系列が集合の要素をなす。集合はかゝる要素の構成法則であるが、それは又要素の共通な發生の仕方とみなしてもよい。たゞしこゝに一つの條件として、選擇が$n-1$回まで中絶も阻止もなく進んだとき、特定の數をn番目として選ぶことによつて阻止の起らぬやうにすることが出來るといふことがつけ加へられる。(Brouwer, Zur Begründung der intuitionischen Mathematik. Math. Ann. 93.)

この集合の定義は順序を顧慮せざる場合の集合に關する。これは要素の一般的發生方法であつて、個々の要素はこの方法の特殊化として成り立つ。しかし個々の要素そのものゝ限定は撰擇の過程の進行に依存するもので必然に系列の形をとる。實數の場合に於てはこの系列は無限系列である。前の定義に於て中絶、阻止の可能を除外すれば、それは實數集合の構成の仕方を現はすものとなる。卽ち自然數系列から數記號を選び出して無限數列をつくる仕方が實數一般の共通な發生の方法で

ある。之をブラウアーは集合Cと名ける。いま正整數の系列 a_1, a_2, a_3 …… に實數 $\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_1+a_2}}+\frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3}}+$ …… を對應せしめるならばCは零と一(一を含めて)の間にある實數(二進小數としての)の生産手段となる。前記の系列を進めて行くだけ實數はより精密に限定せられるのである。しかしその限定過程は終結に達しないのであるから、實數はどこまでもたゞ有理數的近似値として與へられる。それ故實數は二つの互に限りなく接近しゆく有理數列の間にはさまれる數として、漸次にせばまり行く有理數區間の系列によつて代表される。區間系列に於て、すぐ後の區間が前の區間に含まれるといふ條件だけを定め、次々の區間の選擇は全然任意(自由)とすれば、それは連續を代表し、その自由選擇が一定の法則によつて特殊化的に限定されたものが個々の實數である。

二つの實數 α, β を區間系列 $i_\alpha^{(\nu)}, i_\beta^{(\nu)}$ で現はすとき、この二つは必ず一致するか或は相異るかの何れかであるといひ得るであらうか。まづこの二つの實數が異るといふのは如何なる意味であるか。區間の次々の選擇に於て何番目かに兩區間がはつきりと分離するところに達したとき卽ち $i_\alpha^{(n)}, i_\beta^{(n)}$ が全く分離してあるやうなnが存在するとき、兩者は相異るといふ。次に $i_\alpha^{(n)}, i_\beta^{(n)}$ がnのいかなる値に對しても常に

一致する(區間が全部又は部分的に überdecken する)とき、この兩區間系列によつて定められる實數α, βは一致するといふ。ところで區間の限定は順次の進行に於て實現するのであるから、進行のある段階で分離が起らなかつたとき、それによつて定められる實數が果して一致するか或は相異るかを決定することは出來ぬ。かゝる場合にもなほ二實數は一致するか或は相異るか何れかでなければならぬといふのは、單に論理の排中律の要求に基く外何等の根據もない。ブラウアーはかやうな場合に於ける排中律の適用を拒否する。排中律の適用は完全な二者擇一的對立を豫想する。しかるに區間系列の順次的展開に於て、分離の起る如きnに達し得ることゝ、一般にかゝるnの存在せざることとの決定とは完全な對立をなさない。系列は無限であるから分離を確めることも出來ず、一致を決定することも出來ぬといふ第三の場合が起り得るからである。

かゝる可能性を具體的に示すためにブラウアーの好んで用ふる例をあげてみよう。πの小數展開に於て、コンマ以下ν番目の數字をd_νとし、dm に於て$d_m, d_{m+1}, \ldots\ldots d_{m+9}$が 123456789 の如き配列をとることが最初に起つたとき$m=k_1$二番目に起つた時 $m=k_2$ 一般にn回起つたとき$m=k_n$とし、$\nu \geqq k_1$ならば $c_\nu=(-\frac{1}{2})^{k_1}$、その他の場合は$c^\nu=$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu}$とする。こゝに $c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots$ なる無限系列は一の實數 r を定める。この實數 r に關しては $r=0$, $r>0$, $r>0$ の何れも成り立たぬ。即ちその何れに決定すべき根據も存在しない。この場合も一の實數は零と一致するか相異るかであるといふのは無意味である。この事からすべての實數の順序づけの可能の否定が歸結する。從つて連續は順序づけられた點の集合であるといふ命題が不成立となる。(Brouwer, Über die Bedeutung des Satzes v. ausgeschl. D. in der Math. u. s. w. Journal für reine u. ang. Math. 151)

直觀主義の立場からは一の數がある特定の性質をもつかもたぬかといふ二者擇一的對立は、その性質をもつことの證明の成就と、その性質をもつことが不可能であることの歸謬法的證明の成立との對立の形にかへられる。かゝる對立にあつてはその何れかゞ必ず成立するとはいへない。形式論理の原則から云へば一の實數は有理數であるか無理數であるかの何れかであつて、第三の可能性はあり得ない。しかし數 g に對して $g=\frac{p}{q}$ なる如き二つの正整數 p 及 q が定め得たとき g は有理數であり、この假定の不合理が示されたとき g は無理數であると定義したとすれば、上例の數 r は有理數でもなく無理數でもない。ブラウアーによれば、ある數學的命題

の不合理であることの不合理から、元の命題の眞であることを結論するのは排中律の形式的適用の一例であつて、直觀主義者の承認しないものである。例へば上例のrが有理數であることの不合理性が不合理であつても(卽ちそれの無理數なることが不合理であつても)それが直ちに有理數であるとはいへない。吾々は、たゞ、ある命題の眞なることが知られたる時に、その命題の不合理性の不合理を結論し得るのみであつてその逆はいへないのである。

一の相互排除的の選言的關係(例へば實數に於ける代數的數と超越數の如き)によつてある對象又は集合を定義するとき、(Komplementäre Menge)その定義が一義的決定の方法を伴はないものはクローネツカアがすでに之を排斥した。數學に於ては定義のかゝわるところの領域が無限多の對象を含むことが普通であるから、有限の手續に於て決定し得ない選言的關係に遭遇することはあり勝ちである。ある數が代表的であるか超越的であるかを決定するためには、あらゆる可能な、從つて無限多の代數方程式について調べることが必要である。これは有限の過程に於ては完了しない。故に何等かの代數方程式を滿足するものは代數的數で、然らざるものは超越的であるといふ定義は決定の方法を伴はない定義である。かゝる定義を基として

集合に於ける要素或は部分集合の存在を斷定することは直觀主義者の排斥するところである。在來の數學に於て、決定の方法の有無を度外視して選言的關係を證明の中に用ひたことは、一の根本的假定―數學的對象の體系の完全なる限定性の假定に基く。この假定にいかなる理由があるにもせよ、それは實證不可能な假定であることは爭はれない。直觀主義者の立場は數學の證明をかやうな實證し得ない假定から解放しようとするところにある。體系の完全なる限定性を假定すれば否定命題に積極的な意味を認め形式上正當に構成せられた否定概念が對象的妥當性をもつことを認承するのは不合理ではない。しかしその假定を離れてみれば、否定的概念は空虛なものであつて、將來何等かの積極的事態の出現によつて肯定の形に於て充實さるべき要求を現はすにすぎぬ。かやうな肯定的充實が與へられれば、從來空虛な要求にすぎなかつたものが正しき概念となるのである。對象からいへばある事情の下に從來存在をもなかつたものが存在を得て來るのである。直觀主義の立場では數學的發見が對象の存在に對して決定的意味をもち、對象は發展するもの、生成の過程にあるものである。連續に於てもそれの要素としての實數點の存在は區間系列の限定の進行に依存する。かゝる立場からは連續の要素の個別化は選擇的

系列の進行と共に進み行き、絶へず新しき個體が出現する。その意味でワイルの如く連續は內部に向つて無限に生成するといふことが出來るであらう。連續はすでに完結せる要素の集合として存在するのではない。直線Cの上にOなる一點を選び出したとするとき、前述の如き理由によつて直觀上のすべての點はOと一致するか或はそれと區別されてあるかであるとはいへない。從つて直線CはOと、Oの左方にある部分と、及びOの右方にある部分とから成つてゐるとは云へない。

かやうな立場から連續と實數との關係はいかに考へられるのであらうか。連續は逐次含入の條件の下に、區間の系列を無制限につくり出す選擇作用に對應し、個々の實數はその選擇作用の法則的に限定せられた特定のもの、卽ちすべての自然數に對して云ひかへれば無限の選擇過程の一々に對して)限定された特定の區間をつくり出す法則が個々の實數を與へる。前者は實變數又は任意の實數に當るもので、後者は法則によるそれの個別化的限定である。自然數の各々に對應する選擇作用の一步一步に無制限な選擇の可能性が開かれてあるといふ意味で、前者は自由なる選擇系列と考へられ、この自由がある仕方で法則的に限定されたものが一の實數を與へる。であるからすべての系列といふ言表はこゝでは個別化された要素の既存的

全體に關するのでなく、無限の個體を自己のうちから發生するところの母胎としての自由選擇系列に關するのである。

直觀主義の一般的立場と、その立場からの連續の考方については、如上の說明によつて大體を察知出來るであらう。一般的見地から直觀主義の立場を考察する場合、直觀主義に於ける數學的存在に關する思想の根源をなすところのものを見定めなくてはならない。それはあらゆる數學的對象の構成の、從つてそれの存在の源泉として、一の所與的事實、不可還元的存在としての自然數の承認である。自然數を素材とし、自然數の法則に基いて構成せられたるもののみが存在をもつ。直觀主義に於ては數學的對象の存在は一の事實的(感性的經驗の事實ではない)存在である。直觀主義者も存在を單に現實に構成せられたもののみに限るのではなく、構成可能なるものも存在の圈內にいれる。しかしその可能は、單にある體系內に於ける概念的非矛盾としての消極的或は抽象的可能と異るばかりでなく、一定の論理的構成原理のみによつて限界づけられた構成の可能とも一致しない。自然數といふ動かすべからざる事實によつて限られる可能である。しかし直觀主義に於てはかゝる可能が直ちに存在ではない。可能は存在の領域を限界するにすぎぬので、かゝる領域の中

にあつて何等かの仕方で現實化された可能がはじめて存在なのである。個々の存在はこの現實化の過程卽ち構成作用の進行によつて定まるもので、發展的過程的である。しかしこの過程の動くところの領域、或は生成する個體によつて充實される場面そのものは發展する過程ではない。自然數とそれの法則とが構成過程に先つて定つてゐる限り、そこから生るべきものゝ可能範圍は一義的に決定せられてゐるのであつて、構成過程の進行によつて變ずるものではない。直觀主義者はしばしば自然數をも構成の産物であるかのやうにいつてゐるが、それは自然數の存在を作用的潜在的な形態に於て考へることにすぎないのであつて、その場合は自然數構成の作用の法則そのものが所與的のものとなるわけである。その作用が定つた capacity をもつ限り可能の範圍はそれと共に決定してゐるのである。このことはワイルなどの敍述にあつてはしばしば影にかくされてゐるやうであるが、その點を明かにすることが直觀主義の連續論に對する理解の鍵であると思ふ。

直觀主義者は數の存在と數の與へられる仕方とを切りはなして考へない。その點一種の數學上の經驗主義であるとも云へる。しかし數の如きイデアルな對象にあつては、與へられる仕方の一定することは同時に與へられるものゝ領域の一定性

を伴ふのである。自然數系列からの中絶と阻止のない無限な選擇作用が個々の實數の共通な發生方法であるといふとき、發生し來るあらゆる實數の領域は潛在的にすでに限定されてゐるといはねばならぬ。この實數領域は普通の集合論に於ける自然數のすべての部分集合の集合 (Potenzmenge) としての實數集合に比し限定性と完結性をかいでゐると考へられるであらう。それは領域に含まるゝものゝ存在の仕方から云へば確かにさうである。しかしブラウアーの實數集合も要素を與へる法則としての限定性完結性をもつてゐる。限定された法則に對して限定された可能的領域を考へることも許されぬ理由はない。普通の集合論に於ては可能卽實現であつて、可能の實現の特別な仕方が顧慮されてゐないだけである。直觀主義の立場に於て個々の實數の構成は過程的に進行するので、個々のものとしていかなる數が生ずるかは豫見し難いとせねばならぬが、しかしたとへいかなる數が生ずるにしても、それの構成法則に基いて一定した集合領域の一要素たるべきことはあらかじめ定つてゐる。ソイルが連續を現はすに用ひる用語 Medium freien Werdens についてみても生成のメディウムそのものを生成するものとは考へ難い。生成はたゞ、法則の實現、領域の充實に關するものであつて領域としての法則そのものが生成するの

ではない。ベッカアは直觀主義に於て連續を自由生成のSpielraumとするのは、それを一の完結靜止とすることであつて、それは一の解きがたいディレンマに導くといつてゐる(ベッカア、上出一六四頁)が私は上述の如き理由からその説に賛成出來ない。法則乃至領域としての完結はそれの個別化的實現乃至充實の過程的不完結性と相容れぬものではない。後にのべる如く法則の完結性から直ちに實現の完結性が歸結しない所に直觀主義の主張の中核がみられるのである。ベッカアの所謂ディレンマに對する反駁は比較的容易であると思ふが枝葉にわたる故いまは之を略する。

直觀主義の立場の分析からも連續を系列の場面とする考へが確かめられるやうである。連續が法則としての完結性をもつとするのは連續を法則に對する自由であるとすることに矛盾すると考へられるかも知れない。連續が個々の實數の法則的限定性に對し、自由選擇の立場であるといふのは、連續の法則性が特殊化され、限定されたる法則に對して、かゝる特殊法則の一般的圖式であり、正にその故にそれの何れの特殊化にも拘束されないものであるといふことに外ならぬ。それは一般的可能の特殊限定からの自由である。しかしこゝに直觀主義の主張の特質として銘記すべきことは、この一般的圖式の特殊化は、圖式そのものから起るのではないといふ

ことである。ある特殊化は圖式の特殊化である限り圖式に規定されるが、これ或はそれの特殊化が起ることそのことが圖式によつて必然的に規定されるのではない。領域に於ける個々形象の存在は領域の法則に從ふことは勿論であるが、領域の法則が個々存在の唯一の十分なる規定原理ではない。そこに領域に對する個體的存在の偶然性、法則的可能に對する實現の偶發性が存する。この偶然性を否定して領域にあるものをすべて領域の必然性に還元しようとするならば、それはもはや直觀主義の立場を離れることゝなるであらう。かゝる必然性が存立するためには單に法則の一般圖式としての連續に止らず、法則の實現そのものを規定する高次の法則がなければならぬ。それは圖式そのものを規定する法則であつて、かゝる法則を認める限りもはや自由選擇をいふべき餘地はあり得ないのである。領域の要素の規定法則は領域そのもの〻規定法則ではない。連續の法則性はそれ自身法則化されざる「裸か」の法則であり、その意味で直接に與へられたる事實である。直觀主義を哲學の立場にとり入れて、この事實性を何等かの意味で必然化することが出來るかどうかは別の問題であつて、それを以て直觀主義の立場そのものに入れこむことは無理である。

要素の存在領域としての連續とその要素の存在との間の關係は直觀主義の立場に關するかぎり所謂具體的普遍の概念に該當するものではない。具體的普遍の最もよき實例は數學に於ける函數概念にみられる。そこに於ては一般的なるものが特殊の構成法則であり、特殊の存在はその法則によつて必然的に規定せられてゐる。從つて一般の特殊に對する抽象性、特殊の一般に對する偶然性は全く克服されてゐる。しかしかやうな構成法則は連續のうちに定義さるゝ個々の函數に於てのみ實現されてゐるのであつて、連續そのものを代表する函數に於ては單なる要求ではあり得ても、實現せられてはゐない。ワイルによれば連續を代表する函數は「自由な選擇作用によつて生成するあらゆる數列からさらにまた一の生成する數列をつくるところの法則」(functio continua) であるが、かゝる法則そのものは數學の一般的命題の對象をなさぬ。 Wo es heisst „jede Folge," wandelt sich der Begriff des Gesetzes (functio discreta) in den der werdenden Wahlfolge; hingegen steht uns für die functio mixta und continua kein derartiges Kontinuum zur Verfügung, in das sie sich einbetten, wie die einzelne functio discreta in das Kontinuum der frei werdenden Wahlfolge. (Weyl, Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik, Math. Zeitschrift. 10. 1921) こゝに functio discreta といふのはあらゆる個々の數から數を

つくる法則であり functio mixa とは自由な選擇作用によつて生成する數列から一の數をつくる法則である。あらゆる數からすぐ之につゞく數をつくり出す自然數の系列法則は不連續函數の最原本的なものである。混合函數の最も簡單な例は $f(n)=n_1+n_2+n_3+n_4$ の如きものである。連續函數が含まれる高次の連續が與へられてないとワイルのいつてゐることは、實數領域としての連續そのものを法則化する包括的法則領域が與へられてゐないことに外ならぬ。即ち實數構成の法則(ワイルの連續函數)そのものは更に一般的な法則によつて法則化されてゐないのである。かかる立場から連續の系列化の可能が否定されるのは當然であらう。具體的普遍が數學的概念の特質であるといふ時、その概念が法則的領域内の個體(要素)に關するか領域そのものに關するかといふ樣な區別、及びある與へられたる概念體系に於て、どの程度まで具體的普遍が實現可能であるかといふ樣な吟味が必要であらう。ある體系に於て單なる要求であるものが他の更に根本的な體系に於て實現可能となることは勿論であるが、具體的普遍がある領域に於て可能なることから、前述の區別を無視して一般的にあらゆる領域に於て可能なりとする如き一律的論理は、その論理自身甚だしき抽象的に陷つてゐると云はねばならぬ。數學に於ける現實と要求、事實

に根ざした可能と形式的可能との分界を明かにしそこから形式的可能の法則たる形式論理の法則が無限を對象とする場合に起る獨特の事情を明にした點は論理的見地からみての直觀主義の功績といつてよいであらう。直觀主義のおくところの制限及區別が最後のものであるかどうかは自ら別問題である。(未完)