哲學研究 第百六十五號 第十四卷 第十二册

實數の領域と連續

三宅剛一

五、公理主義

こゝでは公理主義の一般的性質を論じようとするのではなく、前世紀末以來數學の全般的基礎づけの一の方法として考へられてゐるところの公理主義について、實數論との關係に於て考察しようとするのである。かやうな見地から重要な意味をもつものとして、自然數に關するペアノの公理、集合論に關するツェルメロの公理の如きものがあげられる。公理の領域的關係といふ上からは前者は後者のうちに含括せられるとみてよい。即ち自然數公理の中核をなすところの數學的歸納法は特定の集合(有限集合)の定義として、集合論の公理のうちに收められる。それで私はま

ヅツエルメロの公理の考察から始める。

公理主義の方面でツエルメロの公理體系のもつところの史的意味を示すものとして、私は最近ボロニアの數學者大會に於けるヒルベルトの講演の一節を抄録しよう。ヒルベルトはいふ。最近三十年間に於ける基礎論の狀態はどうであつたか。カントール、フレーゲ、デデキント等は基礎論の古典的創始者であるが、ツエルメロは彼等のふさはしき解釋者である。ツエルメロは集合論の公理主義的建立に必要な假定をうち立て、それによつてカントールデデキント等がたゞ不確定的にある部分は無意識に用ひたところの手段を嚴密化した。彼の公理はすべてそれの正當さをまともに疑ふことの出來ぬ種類のものである。それにも係らずこの正當な進路が一時重要な障害のためにはゞまれるに至つた。クロネッカーの古い議論のむし返し、ポアンカレの數學的歸納法に對する見解、imprädikative Aussage の禁止等がそれである。かゝる事情の下に、數學はそれの最奥の數論的本質及根據に關し二十年のあひだ一の惡夢におそはれてゐたのである。最近若き數學者の一群が再びツエルメロの思想にかへり、彼の公理を補正し、更に、深い重要な諸問題を功果的に處理するに至つたことは一の覺醒、一の黎明として迎へらるべきものである。(Hilbert, Probleme der Grundlegung der Mathematik. Math. Ann. 102.1929 による。）基礎問題の終極的解決はヒルベルトによれば、公理的方法の基礎となつてゐる內容的假定をもれなく形式化する自己の方法によつてのみ達し得られるといふのであるがその點については後に論ずる。

ツエルメロの公理に於て論理的に最も重要な點は、集合の限定性（デフィニティトハイト）の概念の確定である。素朴的な集合論にあつては、集合を代表する一の性質又は概念に對して、對象的世界の全く無制限な領域に於て、それに屬するものと屬せざるものとが內面的に定つてゐると假定せられてゐる。集合の限定性をかやうに無條件的に考へるところから多くの矛盾的集合が成り立つて來るのである。それで矛盾を除去するためには集合の限定性の條件にある制限を加へることが必要である。ツエルメロは彼の definite Eigenschaft の概念によつてこの要求に應じようとするのである。彼は集合をその一部分として含む所の Bereich B なるものを前提し、その領域の對象の間に一の基本關係 ε を考へる。これはある要素がある集合に屬するといふ關係に當るものであるが、かゝる內容的意味は全然度外視し、それの性質はたゞそれに關する公理の全體に依て定まる。限定せる性質又は言表といふのは領域 B のこの基本關

係と論理の原則とに基いてそれの妥當性を決定し得る如き性質又は言表をいふのである。限定せる性質は一の集合を定める。與へられた集合に於て、それの要素に關して限定せる言表は、その言表の妥當する要素の集合(部分集合)を定める。(分出(アウスゾンデ)の公理(ルング))。集合の公理はすべて集合に關する存在公理とみられるが、その中零集合の公理及び無限の公理(領域Bは、零集合を含み、且つあらゆる要素aに對しaを唯一の要素とする集合{a}を含む)は領域内に於ける集合の獨立な或は絶對的な存在に關するものであるが、その他の公理はすべて派生的存在に關するもので、ある集合の存在から他の特定の集合の存在を推定する公理である。それは前述の分出の公理の外、一つのものaに對しaだけを要素とする集合、a及bに對してたゞその二つだけを要素とする集合に關するもの(要素集合の公理)、ある集合の部分集合の全體を要素とする集合に關するもの(羃(ポーテンツメング)集合の公理)、一の集合の要素の全體を要素とする集合に關するもの(合併(フェルアイニグング)の公理)及選拔(アウスワール)の公理等である。これ等の公理は與へられた集合から新しき集合を定義的に導き出す原理であつて、それは集合構成の Operation 或は Funktion とみることも出來るのである。たゞこの公理による集合の定義はイムプレディカティブであるがために、一定の基礎的集合を土臺として逐次的構成によつて到

達乃至實現することの不可能な集合の存在を含んでゐる。これ等の定義原理が普通の意味に於ける構成原理と區別されねばならぬ理由はそこにあるのである。ツェルメロの公理體系によつて集合の概念の充分な限定(それは集合領域の限定と同一である)が得られるであらうか。第一に、評家は彼が限定せる言表の概念を規定するに「一般妥當的な論理の法則」に據つてゐることを不正確であるとする。その點を明確にするためには、所要の論理の法則そのものを公理のうちに列擧しなければならぬ。これはヒルベルト等のとる所の方法であるが、ワイルもこの點の反省から彼の Das Kontinuum に於ける定義原理に到達してゐる(同書三八頁參照)。フレンケルなどのもこの點にある補正をなさんとしてゐる。次には領域Bの概念である。ツェルメロはものが存在するとはそれがこの領域に屬することであるといつてゐるが、それでは集合を含む所の領域の存在をはじめより假定することであつて、評者(Skolem)のいふ如く公理主義として許しがたい循環論である。公理主義の立場から云へば公理體系の非矛盾性が證明されたときに、はじめて、それに對應する對象領域の存在が確立せられるのである。しかるにツェルメロはかゝる證明を與へてはゐない。第三にこの公理體系は完全性の條件を滿足してゐない。卽ちそれによつて

定められる集合の範圍が一義的に定まつてゐない。そのことはこの公理體系によつて、存在するかしないかを決定し難い集合が定め得ることから知られる。（その實例については Fraenkel, Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre. S.101 參照）。フレンケルの如きはこの缺點を除くために更に一つの公理――限局性（ベシュレンクトハイト）の公理――を加へることを提議してゐる。それは「上掲の公理によつて要求さるゝ集合の外には集合は存在しない」といふ意味の公理である。公理體系のうちにかやうなものを加へることに對しては、實數公理に於ける完全性公理に於けると同樣の論理的難點が存することはたやすく推知されるであらう。他の公理が集合の領域內での特定の集合の存在に關する命題であるに反し、これは集合の全體そのものに關する存在命題である。かやうな論理的難點を別としても、公理の定述上からも困難が起つて來ることは、フレンケルと同じく公理主義的に集合論を基礎づけようとしてゐるノイマンの如きも明かに認めてゐるところである。（J. v. Neumann, Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. Journal für die reine und angew. Math. 154. 1925）

公理主義の立場から集合領域の一義的限定性を保證することの困難であることは上述の如くであるが、近時公理主義に關する論理的考察に基いて、かやうな限定性

の不可能であること、卽ち公理の對象領域の必然的相對性が論證せられた。Löwenheim-Skolem の逆理と稱せられるものがそれである。レーベンハイムはシユレーダーの論理計算の方法に基いて、數學的命題の典型的形式を求め、それの妥當する領域の集合的タイプ(個體數)を考察し、次のやうなことを證明した。「數言表はそれが何等かの思惟領域に於て erfüllbar であるならば、それはすでに可附番的(アブツエールバル)無限の思惟領域に於て充實される。」(Löwenheim, Möglichkeiten im Relativkalkül. Math, Ann. 76. 1915)。レーベンハイムの證明はシユレーダー論理學の記號を用ひることなしに敍述することは出來ないが、私はこゝにスコーレムに據つて不完全ながら大體の筋道を示さうと思ふ。

數言表といふのは部類並に關係の記號に數學的論理學の基本的演算――ラッセル、ヒルベルト等の記號によれば und(&), oder(v), nicht(~) alle( ), es gibt(E)――の五種を施して構成さるゝ有限な言表である。(すべての數學的命題がかゝる言表に還元され得ることは別に證明を要するわけであるが、いまはこれを可能として假定する)。この數言表の基準的形式を例へば次のやうに現はす。

$(x_1)(x_2)\cdots\cdots(x_m)(E_{y1})(E_{y2})\cdots\cdots(E_{yn})\ Ax_1\cdots\cdots x_m\, y_1\cdots\cdots y_n$　こゝに $Ax_1\cdots\cdots x_m\, y_1\cdots\cdots y_n$ は部類及關係の記號と前提の演算記號中初めの三種だけを含む言表とする。この言表

はm個のxのあらゆる値に對して成立すべきものであるが故に、xの値を選び出すべき範圍をはじめ最小にとり(この式の成立を不可能ならしめぬ限りで)その場合の妥當なる式の可能なる數を考察すれば、それが必然に有限個でしかも定つた個數をもつことがわかる。次にxの値を選び出す範圍を一定の法則によつて順次に擴張し行けば、それに應じて可能なる妥當式の數は増加する。しかもその可能なる式の全體が一定の法則によつて順序づけられることが證明されるのである。卽ち可附番的領域に於てこの言表の妥當の可能性はすべてつくされることが知られるのである。

この證明が正當であるとするならば、それは公理主義の集合論に對して重大な結果を意味するものといはねばならぬ。スコーレムによれば公理主義の集合論は必然に集合の概念の相對化に導くのである。ツエルメロの「限定せる言表」なる概念を一義的に限定して、集合領域の基本關係によつて成り立つ$a \varepsilon b$或は$a = b$の如きElementaraussageに上述の五個の基本演算を施すことによつて得られるものとする。さうすれば集合論の公理及びそれから導き出される命題はすべて上述の意味での數言表といふ性質をもつ。從つて上記の證明が之に妥當する。卽ち集合論の公理が矛

盾を含まぬならばそれは可附番的無限の領域に於て滿足される。詳しく云へば、その公理は集合及その包含關係を現はす記號の適當な選び方によつて、自然數系列と一對一の對應におかれ得る如き集合領域に於て滿足される。これは不合理である。何となればツエルメロの公理によつて可附番集合以上の集合濃度をもつ集合が定義せられるからである。この不合理はいかにして說明されるか。スコーレムによれば公理主義の立場で、ある集合Mが超可附番的といふのは、公理に對應する領域内で(公理に基いて)集合Mと自然數系列Zとの間に一對一の對應を定義し得ないといふことにすぎぬ。しかし他の仕方で領域Bのすべてのもの、從つて考へられたる集合をも自然數に對應せしめることが出來ないのではない。即ち別な新しき公理體系に應ずるより包括的な領域に於ては、前の領域で成立しなかつたやうな對應が成立し(定義され)この對應の仕方によれば前に對應不可能であつたもの(集合Mと自然數系列Z)が對應可能となることが起り得るのである。かやうに公理主義に於ける有限、無限、可附番、超可附番といふ如き概念は全く相對的(公理の體系そのものに)の意味をもつにすぎぬ。かやうな相對性の基く所は何にあるのであるか。それは、一定の公理によつて定義し得るもの、從つて對應する領域のうちに含まるゝものが、一般

に何等かの仕方で定義し得るものに比してずつと範圍が局限せられてゐることによる。公理主義に於ける「限定せる言表」なるものが、若干の限られたる定義原理に基く言表に限られる以上、上述の如き相對性は不可避的なものといはねばならぬ。「絕對に可附番以上のものを得んがためには、公理そのものが可附番以上の無限な數に於て存在するか、或は可附番個以上の數言表を與へ得る如き何等かの公理がなければならぬ。しかしこれ等はいづれも高次の無限の循環的導入に外ならぬ。」(Th. Skolem, Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. Wiss. Vorträge auf d. 5. Kongress d. Skandinav. Math.)

このスコーレムの議論が公理主義の集合論の論理的な機構の中核に觸れてゐることは認めなければならぬ。しかしこの逆理の關する所の論理的事態そのものは新しき發見ではなく、素朴的集合論に關するリチャードの逆理とよばれてゐるものゝうちにすでに包含されてゐたものであり、ポアンカレ、ラッセルなどによつて論理的に解明されたところの集合論に於ける特有の循環論的定義の方法(nicht-prädikative Verfahren)にかゝはつてゐるのである。レーベンハイム、スコーレムの證明は、私の理解し得るかぎりでは命題の導出を一歩一歩の逐次的過程とし、しかも最初に言表中

の Allzeichen の可變區域を有限(有限個のうちから有限個の部類をつくる仕方のあるだけ)としてそれの滿足さるゝ可能な場合を考へ、逐次にその區域を擴張して行くのであるが、それは當然各階段に於て有限個、高々可附番無限個を超えることはないのである。かやうな方法で可附番以上の領域に達し得ないことは明かである。一般に有限個或は可附番的無限個の集合を基礎として逐次的に論理的演算による定義の方法によつて達し得る範圍も可附番集合以上に出ないことは素朴的集合論の定理によつて推定し得る。しかも定義と構成とが同義である限りそれを超えることは出來ぬ。かゝる制限を超えるためには構成的到達の原理的に不可能な定義、卽ち一定の定義原理に基いて定義し得るものゝ全體を、從つて構成的に完結して與へられることの不可能な全體を、さらに定義の土臺として用ひるやり方――imprädikative Definition――による外はない。かやうな定義の仕方は嚴密な意味での「限定せる言表」によつてなされるものではない。それは定義の中途に於て、定義の原理そのものをたへず擴張することに外ならぬからである。この擴張によつて(ベッカアの用語をかりれば自己超越的構成によつて)有限個の定義乃至構成原理が超限個の命題を與へ得るものとなるのである。かゝる立場では公理體系の完全性或は所謂 Kategorizit-

註——公理體系に對する對象領域の一義的限定——の成り立たぬことは明かである。なぜなら、公理主義の立場からは、領域そのものゝ自體としての限定性を假定することは出來ぬのであるから領域の限定性は公理的定義の到達範圍の限定に基ける外ない。しかるにいまの場合のやうに何等かの限定が成り立つや否やそれを又定義の上臺として用ひてさらにより大なる領域へ進行し、しかもその進行の終結が全然豫定し得ぬとすれば限定の成り立ち樣がないからである。對象領域のかゝる不定性はノイマンの如きも公理主義そのものゝ本質に根ざした不可避の結果としてゐる。

集合論の公理體系にとつては、いまのやうな理由によつて、ツエルメロの企圖した「限定性」の要求を忠實に守つて可附番の領域に止るか、それとも限定性の要求を放棄し、イムプレディカティフな定義を許すことによつて高次の無限を獲得するかの二途があるだけである。ツエルメロ自身ではかゝるディレンマが明にせられてゐないが、これはラッセル・ワイル等の批判からも、レーベンハイム、スコーレムの逆理らもか當然歸結するところのものであつて、ツエルメロの公理主義を繼承し發展するとと稱してゐるフレンケルなどでは明かにその二途の選擇の避け難きことが承認され

てゐる。彼等はその後者を以て公理主義の立場だとしてゐる。

公理主義の集合論なるものは素朴的集合論の逆理に陷ることなしに、しかもそれと同一の結果に達するといふことを主眼として、本來の集合論の假定及推理方式を一定の仕方に整理し制限しようとしたものである。であるからそこでは在來の集合論の不可缺的假定は單に形をかへただけでやはり假定のまゝに殘されて居る。從つて在來の集合論の原理的素朴性は公理主義に於ても脫却されることなしに殘存してゐるのである。公理主義が嚴密な意味で基礎づけとしての意義をもち得ないのはそれがためである。新しい公理主義は集合論の不可缺的假定を、より完全に列擧するといふ點に於てツエルメロよりも一步を進めてゐることはあり得やうが素朴性からの脫却を之に求めることは出來ないのである。一般に公理主義の立場を保存しながら、しかも單なる假定から出發するといふ素朴性を脫却して、之に數學の基礎づけとしての任務を果さしめることが可能であらうか。ヒルベルト一派のBeweistheorieなるものはそれが可能であることを實行によつて示さうとしてゐるものである。前に引用した論文の續きに於てヒルベルトはいふ。「基礎問題の終極的解決はこの(ツエメロ流の)公理的方法によつては決して得られない。なぜなら、ツエ

ルメロによつて基礎におかれた諸公理は純然たる內容的假定である。しかも、自分の信ずるところでは、この假定を證明することにこそ基礎研究の主なる課題が存する。……それ故に近年私は基礎問題の取扱ひの新しき途をとつて來た。數學のこの新しき基礎づけ——それは證明論と名けることが適當であらう——によつて、數學に於ける基礎問題なるものを、もはや左樣な問題としては存在せしめぬやうにすることが出來ると信ずる。それはあらゆる數學的立言を一の具體的に提示し得るところのまた嚴密に派生し得るところの式となし、それによつて全體の問題の複合體を純粹數學の領分にうつすことによつてなし得るのである」。

ヒルベルトの基礎づけの試みの目的とするところのものが何であるか、それがいかなる史的問題的聯關に於て成り立つて來たかは上の叙說によつて理解されるであらう。次に私は彼の證明論なるものゝ內容の論述にうつらう。この證明論に於てはまづ第一に數學に於ける重要なる假定(基礎概念及び推理方法或は證明手段)の完全な列擧が必要である。ヒルベルトが數學的公理の上に論理の諸公理を加へ、有限なる公理群の上に超限的公理群を加へるのはそのためである。かゝる列擧に次いでそれの「證明」がなされねばならぬ。この證明について吾々は二つの點を明確に

つかんでおかねばならぬ。一は何を證明せんとするかであり、他はいかにいかにして證明せんとするかである。後の點についていふならば、ヒルベルトに從へばあらゆる確實性の源泉であり「そこですべての人が一致することが出來、あらゆる主張が kontro-llieron され得べき最高の法廷」たる具體的直觀の地盤に於て、有限な直接的內容的考察によつて、證明さるべき事項を絕對的に確證することがそれである。かやうな考察はその範圍が限られてゐる。それ故數學の基礎的なくみ立ての全體が有限化され具體化されて、直觀的に見透しの出來るものとして與へられねばならぬ。この有限化直觀化は記號による數學の「形式化」によつて可能となるとする。次にかやうな方法によつて證明さるべきものは何であるか。それは公理の非矛盾性である。矛盾の生起を、具體的に表示し得る一定の形の式の出現として考へ、公理の具體的考察からかゝる形の式の出現し得ぬことを示さうとする。數學の全般にわたつての本質的假定の全體に關する非矛盾性を前述の如き方法によつて證明することによつて數學の完全な基礎づけがなされ、公理主義に最後の完成が與へられるのである。

ヒルベルトの證明論の全般的敍述はこの場合私の目的ではない。（それについては「思想」七十二號に揭載の下村寅太郎氏、數學基礎論に於ける公理的方法について。參照）。私の考へようとするのは、こ

れまでに論じて來たところで實數及連續の問題の中核をなすもの及びそれの解決の必然的前提をなすものとして摘出された、しかも問題として殘されて來た諸點(上限の存在、imprädikative Definition 公理體系の完全性等)がそこでいかに取扱はれてゐるかにある。ヒルベルトによれば、それ等の問題はすべて非有限的超限的推論を含むものであつて一の中心的公理——Transfinites Axiom oder ε-Axiom——を假定してゐる。この公理の式述超限的推論の諸形式のそれからの導出、並にそれの非矛盾性の證明が證明論の中心的題目である。超限的公理といふのは

$$A(a) \longrightarrow A(\varepsilon A)$$

の如き記號で表はされる。こゝにAは何等かの述語(性質)を代表し、aは一定の領域に屬する任意の對象を代表する。εAはAなる述語がいやしくも何等かの對象に妥當する限り、必ずその述語をもつ所の特定の對象を表はす。それでεなる記號は無限の對象領域から一定のものを選び出す意味に當り、ヒルベルトはそれを transfinite logische Auswahlfunktion ともよんでゐる。この公理を言葉に現はせば「ある述語が一般に何等かの對象に妥當するならばそれはεAなる特定の對象に妥當する」となる。

集合論及び解析論に於て從來問題となつてゐる諸假定は、この公理に於ける a に

よつて代表さるゝ「變數」領域と、Aなる述語とのタイプを特殊化することによつて得られる。impradikative Definition 及び上限の存在命題は a が函數の領域である場合に當る。單に函數といつてもその Argument となるものが單なる數領域に限られるか、それが更に函數であるかによつて種々のタイプが區別される。例へばヒルベルトは第二數階級の理論は前者に還元されるとしてゐるが、より高き數階級の理論はより高次のタイプの函數變數に關するものとしてゐる。數論及解析論に對する公理體系の完全性の如きも證明論に於て解決せられるものとしてゐるが、それの函數タイプがより高次のものであるべきことは明かである。概してこゝにあげた證明論の諸問題はまだ殆んど全部が未解決のもので、たゞ若干の試みがヒルベルト自身及その學派の人によつてなされてゐるにすぎぬ。私はこゝで、まづ、內容的立場から超限集合を取扱ふ場合に必然的に伴つて來るところの定義の循環が、ヒルベルトの立場でいかに處理されてゐるかをみよう。私の知るかぎりこの問題の獨立な研究はないやうであるが「無限について」と題する論文に現はれたところによつて大體の取扱方をみることが出來る。

內容的立場で、ある領域の個體に對する構成的な系列法則によつて、その領域を構

成的に定義するのに對應して、形式的立場ではその領域に關する函數、卽ちその領域の任意の個體を代表する變數をアーグメントとする函數記號を一のRekursionによつて定義する。その最も簡單なものは變數が直接に數を代表する場合であつて、その場合には、まづ變數を0とおいたときの函數の値を示し、次にnに對する函數の値からn+1に對する値を導き出す仕方を示すことによつて函數は定義される。しかしかやうな簡單なレクルジョンによつて定義し得られるのはたゞ單純無限系列として系列化し得るものに限る。然らざるものに對してはもつと複雜なレクルジョンを要する。例へば第二數階級をレクルジョンによつて定義するには、前に述べた樣に初項の無限系列そのものの、系列法則に當るべきRekursionsformelを要する。しかしこれは「nからn+1にうつる仕方が一樣でない」ものであるからそれに對するレクルジョンは普通の逐次的なそれでなく、ヒルベルトがverschränkte, nach verschiedenen Variablen zugleich genommene (simultane) Rekursionとよんでゐるものとなる。かやうなレクルジョンをヒルベルトはある方法(Variablentypenの導入)で逐次的なレクルジョンに還元しようとする。何故にかゝる還元が必要であるのか。レクルジョンによる定義は元來定義過程を有限化する方法である。「所要のレクルジョンの探出の方法

は、大體に於て、當該の定義方法を有限なものとして認識するところの考察と一致する」といふ主意からみて、上述の如き複雑なレクルジョンはこの目的にかなはないからである。その還元の仕方を示す例をとつてみよう。

$\varphi_1(a,b)=a+b,\ \varphi_2(a,b)=a.b,\ \varphi_3(a,b)=a^b,\ldots\ldots$の如く定義された函數$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\ldots\ldots$があるとき標數（インデックス）のついた$\varphi$の系列に於ては、$n$から$n+1$への進行の方式は一様ではない。從つてそれは變數を數に限る立場では普通の逐次的なレクルジョンによつて定義することは出來ぬ。之を Funktionsvariable を用ひて次の如く逐次的レクルジョンとして定義する。

$$\varphi_1(a,b)=a+b$$

$$\varphi_{n+1}(a,b)=c(\varphi_n,a,b)$$

こゝにcは三つのアーグメントをもち、そのうち第一のものは二つの數變數の函數である。cの定義は次の如くである。

$$c(f,a,1)=a$$

$$c(f,a,n+1)=f(a,c(a,f,a,n))。$$

こゝに用ひられたcの如きは一般の Variablontypen の特殊のものであるが、何れの

場合に於ても、非逐次的レクルジョンを逐次的なそれに還元することは、函數のタイプを一つだけ高めることによつてなされる。それであるから數學に現はるゝ諸種の超限的領域の理論を有限的具體的に表示し得るためには上述の如き還元が常に可能であることが假定されねばならぬ。現存する解析及集合論を對象とする場合變數タイプの無制限な還元可能を假定する必要はない。ヒルベルトは連續の問題に關して、數變數をアーグメントとしてもつところの函數の定義に用ひられるレクルジョンがすべて普通の單純なレクルジョンに還元し得ることを假定してゐる。(Lemma II)。かゝる假定もまた證明論に於て非矛盾性の證明を與へられるべきものである。この假定と超限的公理との關係についてはヒルベルトは特に明記してゐないが、ノイマンの公理の式述の仕方からそれをみることが出來る。ノイマンは公理の第五の群として函數に關するものを掲げてゐる。それは彼の記法によつて

$$\Sigma(x_p)(\Pi(x_q)(Zx_q \rightarrow (\Phi x_p, x_q) = a)))$$

の如く表はされる。$\Phi(x_p, x_q)$はx_pなる函數とx_qなるアーグメントとからその函數の値を作り出す Operation を表はす。この公理の意味はアーグメントx_qが數(自然數)であるといふ條件の下に、あらゆるx_qに對してそれをアーグメントとして一定の値を

與へる所の函數x_pが存在するといふにある。卽ち數(自然數)の領域に於けるあらゆる言表は一の函數として表はされるといふのであつて、これは數學に於て函數或は集合の概念と結びついて起るイムプレディカティフなエレメントに當る。連續集の理論はこのx_p如き函數を、從つてこの公理を缺ぐことは出來ない。上の公理はヒルベルト、アッカーマンの記法によれば

$$(Ef)(x)(f(x)=a)$$

として表はされそれは函數變數に關するε—Axion

$$A(f)\rightarrow A(\varepsilon_f(A(f))$$

からたやすく導き出すことが出來る(J.v. Neumann, Zur Hilbertschen Beweistheorie, Math. Zeitschrift. 26.1927)。ノイマンによればヒルベルト一派の證明論に於てこの超限的公理の非矛盾性の完全な證明は與へられてゐない。從つて連續の理論を含む數學の非矛盾性の證明はまだ殘された問題なのである。これまでに非矛盾性の證明が成功した部分は、數學者(ノイマン・ハーディ等)の證言によれば、還元可能性の公理に依存せざるPrincipia Mathematicaの數學の範圍にすぎぬ。解析論及集合論の公理體系の完全性の假定に對しては、それの非矛盾性の一般的證明がいかにしてなされ得るかの

方法すら全く示されてゐない。しかし連續の理論の非矛盾性の證明が同時に實數公理の完全性の假定の非矛盾性の證明ともなるべきことは第二節に述べたところから推知されるのである。

證明論によつて基礎づけらるべき數學の假定のうちでその中核となるべきものは上述のやうなものである。次にその證明の方法であるが、その說明にうつる前に、超限的公理の如きものが數學の本質的假定とみなされるのは何によるかを考へておきたい。無限に關する理論がたゞ transfinite Auswahlfunktion の如きものを含む超限的公理の假定によつてのみ可能であると考へられるのはヒルベルトの徹底した Finitismus の結果である。ラッセル、ワイル等の Stufentheorie が素朴的集合論に對する論理的分析による領域識別の立場であり、直觀主義は一の斷定的前提からの更にラディカルな領域識別、むしろ領域の限局であるとすれば、ヒルベルトは素朴的集合論と同一の範圍を確保せんとしながら、それが基礎づけの立場に於ては、一足とびに、直觀主義と同一の、否、自然數タイプの無限の內容的法則の直觀をも拒否せんとする點でそれよりも更に狹量な有限主義に立脚するのである。ヒルベルトに於て所謂超限的公理なるものが著しく超越的な假定としての色彩をもつのは、目的と手段との

間に存するこの極端な隔絶に基くのである。

次に證明の方法を略述しよう。有限的公理群については證明は簡單であるがここにはこれを省く。超限的公理を加へた公理體系についてそれの非矛盾性を證明するには、公理そのもの、及びこれから一定の規則(代入及Schlussschema)によつて導き出し得る式の全體(かゝるものを beweisbar な式といふ)について、その中に現はれる變數記號をすべて除去したとき、卽ちそれを適當な個體的數記號でおきかへたとき、$0 \neq 0$或は$1 \neq 1$なる形の式が起り得ぬことを有限な具體的考察によつて示し得ればよいとする。卽ち上の如き形の式が證明し得る式の中に含まれないことを示すのである。その證示に於てはまづ何等かの證明式が與へられたとして出發し、その式の證明に於て假定せられる式の全部、卽ちそれの派生に用ひられるべき式の全部を殘りなく書きならべ、それ等に於て變數をすべて常數におきかへる。かやうにして證明過程の全體が數記號と、それの關係を現はす Individualzeichen (+, =, →等の如き)のみから成る具體的な式の系列となる。かゝる書きかへがなされ、それに公理の全部が何かの形で含まれ、而も上式の如き矛盾的な形のものが含まれぬやうな式列が得られるならば、それで證明は完了するのである。その際この式列の逐次的檢査は有

限の手續で完了することが假定せられてゐる。この方法上の假定のうちにすでに自然數タイプの無限そのものが內容的に假定せられてゐるとするスコーレム、ベッカアなどの批評の當否はヒルベルトの證明論の完成の曉にはじめて決定せらるべきものであらう。しかし左樣な假定があつたとしても(ノイマンの如きははじめからそれを承認してゐる)直觀主義の認めてゐる範圍で超限的公理を證明するといふ主旨からいへば別に差支はないわけである。

超限的公理に關する變數記號の除去の具體的方法については記載を省くことゝし、その證明の歸着點といふやうなものを考へてみよう。ヒルベルトの證明が成功したとしていかなることが證明されるのであるか。超限的公理を加へた公理體系と一定の派生規則とが與へられたとき、その兩者の組合せから一定の形の式(禁止された形の式)が起り得ぬことである。之を別の云ひ方でいふならば、公理群と派生規則とが與へられたとき、そこに派生さるゝ式がすべて一定の限定された部類(正しき式の部類と名けてもよい)をつくる卽ち起り得る式と起り得ない式との一貫した區別がどこまでも維持されるといふことが證明されるのである。證明論の結果をかかる形式に云ひ現してみるとヒルベルトの證明が何を意味するかゞ明瞭となるで

あらう。公理の矛盾とは上記のやうな區別が維持されなくなることに外ならぬ。かゝる場合には式派生の規則そのものが規則としての意味を失ふ、卽ち數學的推理は成立しなくなる。公理は單なる假定であるからそれの直接の眞僞を問ふことは意味がない。超限的公理の役目はそれが數學の推理領域を擴張することにある。かゝる擴張が數學の推理を不可能にすることなしに行はれることを示すのがヒルベルトの非矛盾性の證明の目的なのである。ヒルベルトの證明の態度はみづから解析論の推理に疑ひを懷く人のそれでなく、不當なる攻擊に對してその推理のために辯護する人のそれである。彼のなさんとするのは公理の眞理性の闡明ではなく、それの無害であることの證示である。「私の證明論に於ては、無限多の對象の中で一つの對象が常に見つけ出され得ると主張するのではなく、誤謬のおそれなしに、吾々はかゝる選拔が出來るものであるかのやうに行動し得ることを主張するのである」。その誤謬とは何等かの超越的標準に照しての虛僞を意味するのでなく、數學的推理過程の進行の阻止を意味するのである。

ヒルベルトの數學の基礎づけに對して從來なされた批評は大體に於て次の二點に要約することが出來るであらう。一はそれが單に數學的推理の內面的齊合性を

示し得るのみで、それが對象的認識として眞理性をもつことの證明とはならぬといふ點、一は彼の所謂哲學的立脚地、卽ち具體的なものゝ直接的な直觀を以てそれ自身として充足的な絕對の確實性をもつものとする點である。前の點についての非難は數學的對象の存在性に關する見解に於て根本的に異るところの立場からの批評である。私はこゝではかゝる立場に立つて、はじめから非矛盾性卽存在の主張を排斥する代りに、いかなる條件の下にヒルベルトの如き主張が是認し得るものであるかを考へてみたいと思ふ。直觀主義の主張も公理的形式主義のそれも數學者自身にあつては、その立場の正當さは純理論的な根據の上に立つといふよりもむしろより多く信念的本能的に主張されてゐるやうである。しかしいかなる學も認識の全體の聯關から孤立して眞理性をもち得るものではない。だからかゝる論點の徹底的決定は學問の體系に於ける數學の位置を明定することによつてのみ可能である。しかしてかゝる明定は、單に數學が事實上しかじかの方法的特性をもつといふ斷定だけによつて立てられるべきものでなく、對象領域の全體に於て數學的對象の占むるところの位置を明かにすることが先決問題として要求されるのである。私は最後の節に於てこの問題に觸れてみたいと思ふのであるが、次のことだけはこゝです

ぐにも云ひ得るであらう。公理の非矛盾性卽ち公理體系內に於ける內在的齊合性が、たゞちに、それによつて規定される對象領域の存在を保證するといふことが、單なる假定として或は獨斷的主張としてゞなくいひ得るためには、その公理體系そのものが何等かの存在根據を卽ち何等かの必然性をもつことが示されねばならぬ。しかしてこの存在根據そのものは公理體系內に於ける內在的非矛盾性の證示だけによつて示し得られるものではない。それがためには數學の公理と對象一般の原理との關係の論明を要するのである。要するに非矛盾性卽存在の主張は、それの妥當なるための條件として公理體系そのものゝ根據づけの可能を豫想するものである。數學と論理とを結合しようとする數學的論理學の立場がその意圖の上に於て公理主義と對立するものではなくむしろそれの完成であらうとすることもかゝる見地の下に認容することが出來るのである。しかしその場合には論理の範疇、論理の公理そのものについて何等かの Deduktion を求めねばならぬ。グー、シユタムラーが、公理主義の最後の問題は、あの科學(ディスチプリン)のそれ自身に於ける完結性にあるのではなく、かゝる完結性が可能であるとしたとき、認識の全體との統一的聯關を求め、その全體への體系的編入の可能を示すことにあるといつてゐるのはこゝに述べた考方に近いも

のといへる。(G.Stammler, Der Zahlbegriff seit Gauss. S. 170—71)。かゝる見解は勿論新しいものではなく、カント學派等に於て明瞭な自覺の下に主張され、それが實現を試みられたものであるが、私はこゝにある哲學的立場からでなく、現代數學に於ける公理主義そのものゝ立場の分析から提起される問題として考へてゐるのである。

第二の點は證明の行はるゝ地盤或は媒介に關する。ヒルベルトが證明論の「哲學的」立場と稱してゐるものについては、その直觀なるものゝ性質、範圍の不明、數學の基礎づけとしてのそれの不充分さ等については多くの評家の説に相當の理由のあることは認めねばならぬであらう。私の目的はヒルベルトの證明論の認識論的考察にあるのではないからそれ等の點を詳論することは避ける。數學的概念の對象的領域への關係を考へて來た立場からいつて、超限的公理と有限公理とを同一の地盤にもち來す際に、兩者の領域的差別に對しいかなる顧慮が拂はれてゐるかといふ點を吟味しなければならない。ヒルベルトは公理體系への超限的公理の導入を數學に於けるideale Gebildeの導入に當るものとしてゐる。複素數論に於て實數の上に虚數を加へ、幾何學に於てリアルな形象の上にイデアルな形象を加へるのと同樣證明論に於ては有限公理の上に超限的公理が附加される。いづれの場合もその動機と

効果とは同一であつて、それによつて理論の單純化及完成がもち來されるのであるといふ。私はさきに數概念の擴張に關して、新しき要素の導入が根據づけられるためには、擴張された領域そのものゝ對象的存在が示され得なければならぬことを述べた。ガウスは虛數の導入についてこの點に考慮をはらつてゐるやうである。彼はまづ、人々が、對象のある領域に於てそれの adäquates Substrat が見出されるといふ理由の下に負數に Realität を認めながら、虛數に對しては ein denkbares Substrat を否認してそれを無内容なる記號遊戲(ツァイヘンシュピール)とみなしてゐることを述べ、自分はこれを異つた見地から考察して虛數にも負數と同樣ある對象が配與され得ることを明にしたといふ。「正數及負數は、數へられたるものが相反を含み、相合して無と等しくなるときにのみ適用され得る。精密に考へれば、數へられるものが實體(ズブスタンチエン)(それ自身として思惟し得べき對象)でなく、各二つづゝの對象の間の關係であるときにのみこの假定が實現される。この際にこれ等の對象はある仕方で一の系列に整列せられることが要請せられる………。」「對象が一の――たとへ無限なりとも――系列に整列されるのでなく、系列の系列に於てのみ整列される、卽ちそれが二次元の Mannigfaltigkeit を形づくるならば、そしてまた、一系列の他系列に對する關係或は一系列から他系列への推移が、同一

系列の一項から他項への推移と同樣な關係にあるならば、その體系の一項から他項への推移の測定は從前の＋1及び－1の外になほ二つの互に對立した＋i及び－iなる單位を要するのである。」(F. Gauss, Werke II.S. 176) ガウスのこの論述はフレーゲが無理數導入に於て實數領域なるものを考へる際にも想起してゐるものであるが、それはベッカアなどのいふ樣に虛數の直觀的具象化の可能といふことにのみ重點をおいてゐるものとは考へられない。むしろ實數と虛數とを同等の關係に立たしめ得べき關係の場面の提示、卽ち虛數の直觀化をrechtfertigen（ガウスの用語）するところのそれの對象的意味づけが根本であると思はれる。今日の數學に於ても複素數領域に於ける實數は單なる實數でなくimaginary partの値がゼロなる一種の複素數とみられてゐる。幾何學に於けるイデアルな要素についても、ラッセルなどの强調する如くreal pointの上にideal pointを加へて空間を擴張したとき、その空間の點は、事實上實點に對應するものをも含めて、すべてがideal pointであるとするのが論理的に正當であるとせねばならぬであらう(russel, Principles. p.400.) イデアルな要素の導入は、舊來の要素をも新しき聯關に立つ新しき意味の個體として含む所の包括的領域の存在によつてのみ根據づけられるのである。超限的公理の導入に於てこの條件が

滿足されてゐるであらうか。ヒルベルトに於ては超限的公理の對象的の可能は初めから問題とされてゐない。それは單に理論の形式的單純化の目的を達せしめるに必要なる記號にすぎぬ。たゞその記號の導入の唯一の條件として從來の理論過程に矛盾を起すことがない、換言すればその導入によつて、從來可能であつた推理及び演算に何等の障碍も起されることがないといふ證明が與へられればよいのである。イデアルな要素の導入は「それによつて舊來の狹き領域に何等の矛盾も起らぬとき。卽ち ideale Gebilde の除去に當つて舊形象に對して起つて來る諸關係が、常に舊領域に於て妥當であるときに許さるべきである」のである (Hilbert, Über das Unendliche)。超限的公理によつて擴張せられた領域の對象的 Substrat の可能の如何は問はれないで、たゞそれが有用な而も無害な記號であることだけを示せば足りるとしてゐるのである。之によつてみれば、上述の如き、對象的可能の積極的基準によつてその導入が正當化されるところの數學に於けるイデアルな要素と超限的公理とは同一視することの出來ないものといはねばならぬ。ハーディは數學に於いてイデアルな要素とみらるゝものゝ二種――一方前例の幾何學に於けるイデアルな要素(無限遠點、線の如き)と、他方ラッセルの所謂不完全記號に當るもの、卽ち獨立には意味をもたず

他の記號との複合に於て全體としてのみ意味をもつもの、例へば $\frac{d}{dx}$, $\int_a^b \cdots\cdots dx$, 8 の如きもの――のうちで、ヒルベルトの超限的公理は後者に多くの類緣をもつものとしてゐるが(G. H. Hardy, Mathematical Proof. Mind 149. 1929)少くともそれを前者と同一視することの不當であることは前述のことから推定される。しかしその公理は單に必要とか便宜とかいふだけでなく、非矛盾といふ條件を具備するところに單なる symbolic fiction と區別すべき性質をもつてゐるとせねばならぬ。ヒルベルトは數學に於ける無限をもつてカントの意味でのイデー、あらゆる經驗を超越し、しかもそれによつて具體的なるものが完補されるところの理念に比してゐるが、カントに於てイデーが對象構成の原理と區別せられ、從つて公理に該當すべき Grundsätze のうちに現はれることがないのに對し、數學に於ける無限概念はそれに關する公理を通して對象を構成(定義)する任務をもつてゐる點で同一に論じ得ないものである。

かやうな理由から、超限的公理の導入を本來の數學に於けるイデアルな形象のそれに比する考へは、兩者の機能上の類同性に關しては正しいとしても、對象的可能性の保證の有無といふ上からは正當といへない。その類比が正當であるためには超限的公理によつて擴張された公理體系の對象領域を提示し得なければならぬので

ある。そしてそれは單なる内在的非矛盾性の證明によつてなされるものではない。

ヒルベルトは本來の内容的數學から證明論或はMetamathematikの立場にうつるのは、初等算術から代數の立場にうつるのと同樣、考察の立場が一段高き水準にうつされることであるとしてゐる。この立場の高揚は本來の數學のそれよりも更に高次的な變數記號の使用によつて可能となるのであるが、變數領域の次位の相違に應じて、變數記號そのものにタイプの相違を認めねばならなくなり、解析論の定義及推理過程例へば實數連續の理論の如きものに應ずるためにはその所謂高められた水準の地盤の上で更に超限的過程が起つて來ることは前に述べた如くである。ヒルベルトはその場合にもなを證明論のfinite Einstellungを維持し得るために、簡單なレクルジョンの可能なることを要請してゐる。こゝにヒルベルトの證明論の大きな難關があることは明かであるが、たとへそれが何等かの仕方で回避或は進んで除去し得たとしても、變數のタイプを認める限り、形式化の方法を通して實數の數學の基本的公理全體を具體的記號の直觀の下にもち來し得るかどうかは大きな疑問といはねばならぬ。直觀の範圍をある種の法則の直觀にまで擴げるとしても、それが全體として見とうし得る限度で止るといふ保證もないのである。しかしかやうな認識論

的な提言は更に精細な論究をまたなければならないものであつて、このやうな簡單な考察によつて論定し得るものではないが、數學の形式化が對象の領域的聯關の事實を無視しては成立しないといふことだけは上述のことから理解されるであらう。

公理體系の考察に於て對象領域への關係を認めるとするならば、超限的公理によつて擴張された公理全體の對象領域を想定し、所謂有限公理もまたこの擴大された領域に關する公理として考へられねばならぬ。即ちすべての公理が超限的のものとなつて來る。それは數論の集合論的基礎づけに於て、有限數に關する命題までも集合の一般命題に基けられるのと同樣である。ヒルベルトが有限なる領域に於て疑ひなき妥當性をもつとするアリストテレスの推論式の如きものをも超限的公理に加へるのもその意味と解せられる。であるから嚴密にいへば、有限的公理群だけについてまづ非矛盾性を證明し、しかる後に超限的公理を別に考へるといふ仕方も妥當とはいへないであらう。かゝる點が適當に處理され、超限的公理を含む公理の全體について非矛盾性の證明が與へられたとしても、前に云つた通りそれはたゞ公理からの合則的な式の派生過程の障碍なき進行の可能を保證するに止り、公理體系の對象領域の積極的可能性、卽ちそれの存在の證明ではない。いはゞヒルベルトの

立場では特有の演繹過程の方法的可能性の證示はあり得てもそれの對象的可能性の明示が缺げてゐるのである。形式主義の立場としては前者のみが必要なので後者はすでに純粹數學の範圍を超えた問題であるといふかも知れない。數學者はそれ自身として矛盾なき記號的操作の無限の發展の可能に信賴し、その實現につとめれば足りるので、記號體系の對象的意味如何は直接の問題ではないともいへるであらう。それは特殊科學の研究者としての立場としては正當なことではあらうが、かゝる立場を以て數學の基礎づけとすることは出來ない。ワイルは、ヒルベルトの記號的數學に何等かの理性的意味を認めようとすれば、それを知ではなく信——超越的實在への信憑と解釋する外なく、その信憑の對象は理論物理學のそれと同一であつて、數や函數などの數學的概念はエネルギー、重力、電子等の概念と同樣の仕方で現實的世界の理論的構成に與るものであるとみる外はないといつてゐるが、この數學と物理學との同列化がヒルベルト自身の思想と一致するか否かは別とし、かゝる超越的對象の承認は非矛盾即存在といふ立場を裏ぎるものであることは明かである。しかし公理に對應する對象領域がかゝる現實世界以外にあり得ぬとする考へが公理主義に對象的意味を與へるための唯一の可能なる解釋であらうか。いづれにし

ても數學の公理に對する特有の對象領域が果して存在するか否かの問題は證明論の立場では決定し得ないものである。たゞ、公理體系の內在的非矛盾性の證明が成り立つとすれば、少くともかゝる存在の不可能でないことは示されるわけである。

公理主義の集合論は、素朴的集合論に於て存在を假定された無制限な集合領域に一定の明確な制限を加へることによつて、その領域の矛盾を除去しようとした。しかしその方法は集合領域の一義的限定性を確立することが出來なかつた。それは高次の無限に達するために不可避的な imprädikative Definition の認容によつて、公理的言表の限定性の要求も維持し難いといふ事實と聯關してゐる。ヒルベルトの證明論は數學的公理の完全な列擧とそれの非矛盾性の證明とによつて公理主義を徹底して、それを以て數學の基礎づけとしての任務を果さしめようとするものであるが、その證明論の立場の性質上、公理を全然それの對象領域から游離せしめる結果となり、その所謂基礎づけなるものが極めて限られた意味のものとならざるを得なかつたのである。

六、數學と論理學

こゝに論理學といふのは形式論理學の意味である。形式論理學といつてもその原理並に領域は必ずしも明確に決定せられてはゐない。私は主として數學的論理學(或はロギステイク)の解剖によつて數學の領域と論理の領域との關係及分界を考へてみようとするのである。この論文の題目上の制限と自分の準備の不足とのため十分に問題の全面に觸れることは出來ないであらうが、哲學の方面から論理學を論ずるとき一部には殆んど誇大的に重要視されながら、一般には比較的閑却されてゐる(殊に我國では)觀點から論理學を考察するのは、論理學自身の本質の鮮明のためにも無意味ではなからうと思ふ。

直觀主義並に公理主義にあつては數學の基礎がそれ自身として孤立的に考へられてゐる。直觀又は推理といふ如きあらゆる學問に對して基礎的意味をもつところの原理を數學の基礎として要求するにも、數學には獨特の直觀乃至直觀と推理との結合が基礎となつてゐることに力點がおかれる。數學が獨立した學である限りその基礎に他の諸學のそれに還元し得ないものをもつことは疑ひのないことである。しかしその特有の基礎なるのをその成素に分解してみるとき、そこに他の諸學と共通なものを發見し得べきことも明かである。そのどこまでが數學特有の原理で、どこからが他の學と共通のものであるかといふことを確定することによつてのみ、數學の學としての「可能性」數學の對象界の對象一般の領域に於ける位置が明かにせられるのである。數學的論理學はかゝる分析の結果論理學と數學との基礎の同

一性が確かめ得られることを主張する。この主張の當否が吾々の問題である。

直觀主義もヒルベルト一派の形式主義も數學の基礎として論理以外のものを認める。ブラウアーの如く數學を全然論理と獨立な基礎原理即ち直觀の上に立つ自律的な構成の學であるとするものも、ヒルベルトの如く論理の原則の外に、その原則の適用さるべき土臺として、直觀的に與へられたものを要するとするものも、論理學の原理が數學的對象構成の唯一の原理ではあり得ぬとする點で一致してゐる。前者は全然その可能を否定し、論理の法則がむしろある意味で數學から導き出されるものとする。ブラウアーによれば論理の法則は數學自身にとつては單に外面的隨伴的な現象に止るところの言語的表出に關する原理たるにすぎない。排中律の如き論理の法則はそれの成立上有限集合の性質から抽象されたものなのである。從つてかゝる制約をこえた無限集合に妥當するものではない。といふ。しかし數學が直觀に基く「全く創始的自律的な思惟活動」であるにしても、その直觀が系列法則の直觀であるとする限り、系列法則に於て豫想されるところの論理的關係を含まぬといひ得るか。またたとへ第二次的にもせよ、數學の構成が言語的表出にうつし得るものならば、その言表的聯關の構成原理に對應する對象的聯關の構成原理がある筈

であらう。前者をのみ論理的であるとして後者をさうでないとすることが正當であらうか。ヒルベルトは論理的な推理の適用、論理的操作の運用の豫備條件(フォルベディングング)として一定の ausser-logishe konkrete Objecte が直接の體驗として直觀的に與へられねばならぬ、さうして、論理的推理が確實であるためにはこれ等のものが部分に至るまで全部完全にみとうされ、それのそこにあること、それの區別、繼次、並存がそのものと同時に直接に直觀的に與へられてゐなければならぬといふ。しかし論理的過程が直觀に結びつくのは直觀物のいかなる契機に於てであるか、それが直觀的に與へられてあることによるのか、それとも與へられたるものゝうちに直觀的に把捉される相互の關係によるのであるか。對象構成に於ける論理的なるものゝ基層はむしろ直觀的なものと共に直接與へられるといはれるところの關係からはじまるのではないか。かやうな疑問を提出しただけでも、ブラウアー、ヒルベルトなどが常識的に考へてゐる論理的原理なるものが眞正の論理學の原理そのものでなく、或はそれの全體でなく、それの單なる一面的現象にすぎぬのではないかといふことが考へられて來る。數學的對象の構成に於ける論理的原理の關與の正しき限界をつけるためにはまづ論理學の原理とは何であるかを明にしなければならぬ。

數學的論理學は一方で論理學の原理の何であるかを明示すると共に、他方その原理がそれ自身一種の內容を構成するものとし、その內容的なるもの――それはどこまでも單に形式的な對象たるに止るであらうが――を以て數學の對象領域に外ならぬことを示さうとするのである。

數學的論理學に於ける論理學と數學との結びつき、論理形式の內容的原理への延長を可能にするものは何であらう。ある者はそれを論理學の原理そのものゝ擴張卽ち傳承的形式論理學の改變と所謂關係の論理の編入とに歸するであらう。しかし實際に就いてこれをみれば、單にかやうな擴張だけで數學が論理學にとり入れられるのではない。その轉廻の樞軸はむしろ特有な外延的見地の導入、卽ち命題から、それの妥當する個體領域としての部類(クラス)へうつるところにある。かゝる轉廻によつてのみ關係の論理が系列構成の原理を與へ得るのである。ブール、シュレーダーの外延計算或は領域計算(ベライヒレヒヌング)の前に命題計算或は所謂眞理價値の計算をおいたこと、もつと正確には數學的論理學を命題或は概念の理論を以てはじめるところに從來のロギスティクに對するフレーゲ、ラッセル等の立場の論理的優越性があるとせられてゐるのであるが、その論理的により純粹なるべき立場が徹底的に守られてゐるかど

うか。それは後者に於ける部類の導入が純粹に論理的になされてゐるかどうかに歸する。

それであるから數學的論理學が純粹な論理學であるか否かを考へる當つては、まづ外延的見地の導入、概念又は命題の論理學から部類乃至集合の「論理學」への轉換が論理學の範圍を超えることなきや否やを問題としなければならぬ。それには内包論理のみが純粹な論理學で外延的見地は非論理的であるといふやうな想定から問題を決定すべきではない。外延なるものが論理學に缺ぐべからざる概念であるならそれをとり入れることは何等差支ない筈である。それよりも數學的論理學に於て所謂外延に對していかなる意味が與へられ、それについていかなる假定がなされてゐるかを考察しなければならぬ。

まづ、概念乃至命題の論理と部類の論理との媒介となるものは何であるか。吾々はすでに、概念の完全な定義はそれの外延の一義的限定、卽ちその概念に屬するものと屬せざるものとの明確な限定を伴はねばならぬといふフレーゲの説を述べた。ブルカムプによれば概念論理と部類論理との媒介となるものは概念の Wohldefiniert-heit といふ性質である。彼によればある概念がよく限定されてゐるといふのは、そ

れの全體の構成が定つてゐる、卽ち概念を構成するあらゆる要素がその內面的構成に於て限定をもつことである。いひかへれば、他の限定された諸概念に關して、それ等が該概念の構成部分であるか否かゞ決定し得られるといふことである。この意味でよく限定せられた概念にあつては、ある個體領域に於てそれに從屬する個體の部類が十分に限界づけられてゐるのである。ある成素に關して限定が缺げてゐればそれに從屬する對象の部類は決らない。例へばキリスト信徒なる概念にアタナシウス說を信ずるといふ規定が含まれるか否かゞ定まらぬならば、ある人(例へばアリウス)がキリスト信徒なる部類に屬するか否かは決定されぬ。しかし概念の成素のいかなるものゝ不定でもが、必ずかやうな對應の不定を結果するとは限らぬ。その成要が、考へられたる部類の含まれる個體領域に關係なきものであれば、その成素の具備如何にかゝはらず概念は十分限定されてゐるといへるのである。(W. Burkamp, Begriff und Beziehung. §68) 概念の限定性に種々の程度のあることは明かであるが、いかなる限定がそれに外延決定の保證を與へるかは概念の種類、卽ち外延たるべき「個體」領域の如何に依存するといはねばならぬ。經驗的對象に關する概念は如上の意味での完全な限定をもつことは出來ないと考へられる。數學的論理學の概念は

經驗的概念と異り經驗的なもの丶個々部類に關するものでなく、部類一般に關する。それで數學的論理學の概念の限定性は部類なる領域の限定性に關するのである。ところで周知の如く部類概念に關するラッセルの逆理、卽ちそれ自身を要素として含まぬ部類の部類なる概念の矛盾包含性によつて、部類なる概念が限定性を缺いでゐることが暴露された。部類一般の領域を對象とする概念が限定をもたぬとしても、その概念を適當に制限することによつて部類に關する限定された概念が得られるであらうか。ラッセルの命題及び命題函數(概念に當るものとみてよい)に關する Theory of types の說は、論理學の範圍で、集合領域に關してのツエルメロの限定せる言表の確定と類似した目的をもつものといつてよい。はじめに何等の矛盾も含まぬものとしてある原本的領域(ワイルの所謂基本範疇)を定め、それに關する命題から、定まつた基本的關係(negation, disjunction, conjunction, 等、或はたゞ一種の基本關係 incompatibility)によつて導き出し得るもの卽ちか丶る關係によつて結合されたものだけを特に一のタイプとして之を原始的命題(エレメンタリープロポジイション)とよぶ。この命題に對應する命題函數は限定をもつたものとする。限定をもつた函數から順次に Generalisation (all, some) によつてつくられる函數も限定性をもつ (predicative)。

それで函數の限定性の基礎となるものは原始的命題である。原始的命題とは消極的には variables を含まぬもの、或は"all", "some" 等の語を含まぬものとして定義される。命題はラッセルによれば、ターム又はサブゼクト(ある定述がそれについてなさるゝもの)と函數(述語的或は關係的部分)とから成るのであるから、原始的命題の積極的特性はそのタームによつて定まる。原始的命題のサブゼクトは individuals である。それで函數の限定性は結局個體の概念に依存することゝなる。個體は一のタイプを形づくる。これがあらゆる高次的タイプの基礎となる。こゝに吾々はラッセルの論理學の基礎となつてゐる一の超越的假定に出くわすのである。いかなるものが個體であるかは個別化の原理の如何に依存する。個別化の原理が多樣であればそれに應じて個體領域も多樣な部分領域に分れる。それ等の相異る部分領域の個體が次位を等しくするといふ保證はどこにあるのか。ロイスの如く個體なるものは部類及び關係等の成立の不可缺の制約として、Ordnungswissenschaft の可能は個體の存在を假定するといふが如き目的論的(或は實用主義的)理由はいまの場合直ちに認容することは出來ぬ。ラッセルの個體なるものは結局フレーグの對象(ゲーゲンスタンド)の概念と一致するもので、それは函數(概念)に對立し、函數(及び命題)ならざるものゝすべてで

ある。個體とはそれ自身で(on its own account)存在するものといふやうな説明(Principia. p. 162)は函數の非獨立性、非充實性に對するものとしてみて初めて有意味となる。個體は函數でないものといふ限りでは、それの限定性は函數の領域の限定性と相關的である。然るに今の場合は函數の限定性が個體のそれに基けられやうとしてゐるのである。だから個體領域の限定性は純然たる假定としておかれる外はない。

かりにかやうな難點を度外視して、原始的命題なるものが明確に限られた領域をなすものと假定しやう。命題にタイプの差違があるがためにすべての命題に關する立言は無意味である。それで論理學の公理即ち基本命題(プリミティブプロポジション)ははじめに、まづすべて原始的命題だけに關するものとして定述されねばならぬ。ところでこれ等の公理そのものは原始的命題のすべてに關するものなる故、それ自身もはや原始的命題ではない。この事實は公理からいかなる推論も導き出されぬといふ結果をもたらす。Principia に於ける推論に關する公理は「眞なる原始的命題によつてイムプライされるいかなるものも眞である」といふ形に現はされてゐる。これは、ある implication の前提が眞であるときには、それを除去して結論だけを斷定してよいといふ規則なのであるが、原始的命題といふ制限があるため、公理の一つを推論の前提として用ゆ

ることが出來ないことゝなる。しかしてこれは命題のタイプのどの階段に於ても起ることなのである。證明はすべて公理に基くべきであるとすればかゝる禁止は致命的である。公理に對する推論規則の有效性を保存するためには、階段說による制限を放棄しなければならぬ。この理由からシュタムラーはラッセルの體系も他の數學的論理學と同樣論理學の純粹な理論的體系たり得ぬもの、單なる技術的意義をもつにすぎぬものと斷定してゐる。(G. Ptammler, Begriff Urteil Schluss. § 75)

數學的論理學に於ける階段性の說は、部類概念の導入を論理化しやうとした試みであるが、上述の如き難點からみて、十分にその目的を達成してゐるといへないのである。吾々は、こゝで一般的に純粹論理學としての數學的論理學なるものが果して成り立ち得るものであるかといふ問を提起せざるを得ない。

數學と論理學とが融合した一體をなすと考へられる根據はどこにあるのであらうか。それは近代の數學が純形式的な演繹の體系であることによる。純粹數學は特定の對象、例へば數とか空間とかの學ではない。數學に於て對象はたゞ一定の形式をもつた理論の妥當するといふ以外全然任意なる領域としてのみ現はれてゐる。數學は一定の領域が一定の理論の支配領域であることからそれについて導き出さ

れる性質を論理的に引き出すものである。即ち數學に現はれる概念は演繹的理論の形式又はタイプに關するものゝ外にはない。ところで理論の形式の研究は論理學に屬する。その意味で數學は論理學に還元され、數學は擴張された論理學の一部となるのである。かくして論理數學を一體とした普通的マテシスのイデーが成り立つて來る。

この論理數學の統一的體系はいかなる學問的內容をもつのか。私はそれをフッセルの論理研究に說くところに從つて述べてみやう。フッセルによればそれは三つの部分に分つことが出來る。ある學を構成する認識に客觀的な理論としての體系的統一を與へるものは、その認識內容卽ち眞理の間の Begründung の聯關である。而してそれは法則によつて成り立つ。從つてある理論はその體系的統一の基礎して一つの又は幾つかの基本的法則及その法則の構成要素となる原本的概念を豫想する。この關係はそのまゝ現實の科學から可能なる科學一般或は理論一般にうつされる。可能なる理論一般はその根柢にそれを理論的體系として可能ならしめる所の基本的法則及基本的概念をもつ。その法則は一の基本的法則であるか又はいくつかの同質的法則の結合であるかであるが、何れにしても理論的體系一般の本質

を構成し、その統一の基礎となる原本的概念（プリミティフェベグリッフェ）卽ち範疇的概念に基いて成りたつ。そこで論理學の任務はまづ第一にこの範疇的概念の確定であつて、次にはこの概念に基く基本的法則の確定である。これ等は理論一般のイデアルな可能條件をなすものであるが、更にその條件の上にアプリオリな可能として成立する可能なる諸々の法則及理論のタイプの研究が論理學の第三の任務をなす。第一の問題に屬するものとしては、理論的體系一般の構成要素としての「概念」「命題」「眞理」等の概念、及び命題の種々の結合形式、概念の命題への結合に關する諸形式等の確定があげられる。なを、これ等の意味的範疇に對應する形式的對象的範疇の研究も之に屬する。第二の問題群をなすものはこの兩範疇に基く法則の研究であるが、フッセルによればこの法則そのものがまた一の理論をなすので、一方には推理論例へば Syllogistik の如きものがあり、他方には reine Vielhltitslehre, reine Anzahehre 等々がある。第三のアプリオリに可能なる理論の諸タイプの研究は reine Mannigfaltigkeitslehre とよび得るものであるがかゝるものが可能であることは近代の形式的數學の成果が之を示してゐる。この第三群に屬する問題のみでなく推理論の如きも數學的な方法で研究されて從來に見られなかつた發達をとげてゐる。「推理論の數學的取扱に對して、哲學的論理學

者は之を輕視しがちであるが、それにもかゝはらず、推理論のみならず、すべての嚴密に展開されたる理論に於ては數學的な取扱ひが唯一の學問的な形式である。それのみが體系的完結と完成とを與へ、又あらゆる可能な問題とその解決の可能なる諸形式とに關してみとうしを與へるところの方法である。」しかし論理問題に對する數學者の取扱ひは理論的でなく實際的技術的である。彼等は理論をくみ立てるだけで、それの本質、意味を問はない。そこに論理學に關する哲學的な問題が存するのである。 (Husserl, Logische Untersuchungen I. Elftes Kapitel. Die Idee der reinen Logik.)

論理學卽普遍數學の立場からの論理學のイデーを示した代表的なものとして私はこゝにフッセルの說の大要を述べたのであるが、論理學を以て演繹的理論一般の形式の學であり、從つてそれは特殊の內容と無關係に理論の一般的形式或はタイプの確立と、その形式に基いて成り立つ命題の展開とを含むもので、しかも後の部分はすでに純粹數學の圈內に屬するものとする點では所謂ロギスティクの考方と一致してゐる。(それについては例へばラッセルの Principles of Math. 及び Scientific method in philosophy. Lecture II. Logic as the essence of philosophy 參照) この立場の特徵は理論的領域に於いて一般的形式的なるものを直ちに論理的なるものと同一視し、形式的なも

のゝ内部に更に論理的なるものと然らざるものとの區別を設けないことである。その結果論理學に屬するものは理論的體系一般の形式であるべきであるのに、その形式自身がまた一の理論的體系を形づくることゝなる。形式的理論體系そのものはそれを體系たらしめるところの、さらに一般的な形式をもたぬか。論理數學の體系そのものゝ形式なるものはいかなる形式であるか。それと論理學として現はれてゐるところの理論的體系一般の形式とはいかなる關係にあるか。さういふ問題は特に問題とせられてゐない。之と關聯して論理學自身も學としては演繹的な學なのであるかといふやうな問題も起つて來る。演繹的理論はそれの前提を演繹するものではない。論理學そのものが演繹的體系をなすとすればそこに前提として假定されるものはいかなる性質のものであるか。數學的論理學では論理學も公理から出發する外はない。しかしその公理はあらゆる演繹的體系一般の公理であるといふ意味で論理的なものであると考へられる。ラッセルの用語をかりれば、あらゆる論理的公理はlogical constantsに分解せられ、後者は命題の形式に外ならぬ。であるから論理學の前提は形式的なものであり、從つて論理的なものである。

しかし、普通に、ある理論が論理的であるといふときに意味せられるのは命題又は

命題體系の構成要素(コンスティチュエント)に關するのでなく、その要素の結合の仕方に關する。分析的命題が論理的であるといふとき、論理的であるのは主語と述語の關係であつて主語的概念そのものではない。結合の形式が論理的であつても、結合される要素自身は必ずしも論理的であるとは限らぬ。ところで概念が論理的であるといふことは、それを構成する要素、卽ちその概念の定義に用ひられる基礎概念がすべて logical cocstants に還元せられることだと考へられる。logical constants とは何か。それは命題の形式であると説明される。命題の形式とは特定の命題に於けるあらゆる構成要素を可變的と考へたとき殘されるところのものである。さうして、かやうにして得られるところの命題の形式なるものは傳承的論理學者の考へた樣にたゞ一つの形式(Subject-predicate form) に歸着するものでなく、若干の相互に不可還元的な形式(關係の根本形式を含む)に導くのである。この多元的な基本的形式によつて論理が內容をもち、形式的ではあるが、しかしすでに概念の形式ならぬ形式的概念を與へるのだと考へられる。

命題に於ける要素に關する論理的と結合の形式に關する論理的とは直接には同一のものではない。その關係はどうなるのであらうか。この兩者が一致する如き

命題の部類が存在するであらうか。ラッセルは近ごろになつて、數學の命題に於ける兩者の關係を問題としそれが一致しないことを認めてゐる。數學の概念がすべてlogical constantsに還元されるといふことは數學が論理學と一致するための必要條件ではあるが十分なる條件ではない。更に、數學の命題がすべて「論理學に屬する命題」或は「論理學の命題」であることを要する。論理學の命題の特徴は從來それが分析的である、或はそれの反對が矛盾を含む、それが純粋に論理學のみによつて證明される等として現はされたものである。ラッセルはこれ等の特徴づけが表はさうとした性質はtautologyとして表はすのを適當だとする。彼によればトートロジーの本質が何であるかを規定することは困難であるが、それが獨立な特徴であることは、事實上構成要素がすべて論理的に定義され得るにも係らず論理のみによつて證明し得ない命題の存在することによつて知られる。例へば「nを任意の自然數とするとき、少くともn個の個體が存在する」といふ命題(無限公理)の如きがそれである。このトートロジーなる概念に一定の定義(例へばWittgensteinの與へてゐる如きもの)を與へ數學の命題が果してトートロジーであるか、或はそれのいかなる部分までがさうであるかと考察することも出來るであらう。しかしその定義が更して妥當なもの

あるかどうかはたやすく決定されない。それでこゝでは、ある概念が論理的に定義されるといふことゝ、それが論理學に屬するといふことゝの間の區別、並に後者はその要素の結合の仕方がある特徴卽ち分析的又はトートロジイカルといふ特徴をもつことだといふ說にいかなる實質的意味を與へ得るか、それによつて數學と論理學との異同がいかに規定せられるかを數學的論理學の構造の分析によつて考へてみやう。

形式的に論理學の領域を規定しやうとするには、公理主義の方法によつて、論理學の基本關係を求め、それの領野を考へればよい。數學的論理學は推理論を中心とする。であるから命題の論理は演繹の理論となり、命題間の基本關係は推理に於て豫想さるゝ關係と同一とせられる。命題の本質を眞又は僞であり得るものとしてみると、命題間の最も普遍的な關係、いかなる命題に於てもそれが命題である限り成り立つ關係としては矛盾關係が考へられる。いかなる命題にも之と矛盾關係に立つ命題があり、かゝる關係に立ち得ぬものは命題といへない。しかし矛盾關係だけでは推理は成り立たない。推理の領域に屬するものとして命題は單なる矛盾關係に立つところの或ものではなくさらに他の關係にも立つものでなければならぬ。ア

リストテレス論理學に於ては推理は概念の包攝的關係におかれる。命題の間の關係としてのimplicationの關係は之に對應するものとみていゝ。現存する數學的論理學の體系として比較的最もよく系統だてられてゐるとされてゐるPrincipia Mathematicaについてみてゆく。演繹の理論としての命題の論理學は「いかにして一の命題が他の命題から推論されるかの理論である。一の命題が他の命題から推論され得るためには、兩者は一を他の歸結たらしめる關係をもつことが必要である。命題q命が題pの歸結であるとき、吾々はpはqを包含（イムプライ）するといふ。かくして演繹は包含關係に依存する。あらゆる演繹的體系はその前提のうちに、通常の演繹の過程を正當なものたらしめるに足るだけの包含關係の諸特質を含まねばならぬ。」こゝにいふところの諸特質が命題一般に必然なものであり、それに關する公理（演繹論の前提）が論理學一般の前提であるといへるであらうか。

演繹的體系は全體が「pがqを包含する」といふ形式をもつ。こゝにpは一つ又は多數の命題で、眞なるものとして assert された命題である。だから演繹の理論としての論理學もまたかゝる基本的な命題をもつ。それはPrincipiaでは演繹の形式的原理と名けられてゐるところの五個の命題である。（基本命題中專ら命題のタイプに

關するものは除く)。これ等の基本命題は「單に演繹の規則であるのみならず、それの實質的前提でもあるので、pはqを包含するといふ圖式のthe pとしても用ひられる」。(Russel, Introduction to Math-Phil. p. 150)五個の基本命題は結局一つの命題(それ等のlogical product)に歸着する。事實M. J. Nicodは基本概念に關するH-M. Shefferの研究を基として五個の基本命題がたゞ一つの基本命題によつておきかへられることを示した。こゝにラッセルのいふthe pがいかなる命題であるにしてもpの否定もまた命題の領域に屬する。即ちpに對してはそれに矛盾的に對立する命題が存在する。「pが可能なる演繹一般の前提であるなら、それの否定の立場では演繹は勿論成立しないであらう。しかしそのことはnot-pが命題であることを妨げるものではない。」現にそれはpと矛盾的關係に立つことによつて、命題の基本的關係の一つを滿足してゐる。「pはqを包含するか包含しないかである」といふ命題はpqの如何にかゝはらず一般的に妥當する。しかるに「pはqを包含する」といふ命題の妥當性はpqの內容に何等かの制限を豫定する。ある論者は完全な選言的命題を以てトートロジーの特質とし、可能なるalternativesの全體からあるものを選び出すものはもはやトートロジーであり得ぬ。論理學の命題は前者であり數學は後者であるとして

ゐるが（P. Weiss, The Nature of Systems. Monist. 29. 1929）定まつた演繹的體系は常に假言的命題の形式をもち「pはqを包含するかpはqを包含せぬかである」といふ論理的選言命題の一方をとり出して獨立にassertするものに外ならぬ。トートロジーとしての假言的命題は「pはpを包含する」といふ形式の外はないがこれでは演繹とはならぬ。トートロジーの立場に止つてゐては限定されたる命題の體系は成り立たない。上述の如きトートロジーカルな選言命題は命題の領域内に於けるあらゆる變更と無關係に妥當する。しかるに演繹體系の原則は命題一般の領域に於て二つの部類を、卽ち前提から出て來るものと然らざるものとを截別する原理に外ならぬ。矛盾せざるもの一般ではなくて、ある定れる前提に矛盾せざるものだけが一の體系をつくり得るのである。であるから演繹的體系一般の十分原理は、命題領域一般に關する論理的原理と一致するものではあり得ぬ。後者のみを原理とする論理學なるものがあるとしたら、演繹的論理學はこれと區別さるべきものである。矛盾律、排中律の如きは、眞理の概念と矛盾的關係とによつて定まる命題領域一般に關する原理であるといつてよい。かゝる原理と演繹論理學の原理とは領域的に區別すべきものである。演繹的論理學の內部に於て、その公理の一つとして矛盾律、排中律

の如き原理が現はれるとき、それは他の公理と同一の領域に關することは勿論である。例へばPrincipiaに於ては矛盾律、及び排中律の如き原理が演繹論の原則から導き出されてゐる。しかしそれは、かく導き出された矛盾律及排中律等は限られたuniverse of discourseに關するものであることを考へれば、それが上述のことゝ矛盾しないことが知られる。

演繹の原則の否定は命題の領域内に於て成り立つ。矛盾律の否定に於てはどうであらうか。その場合はpredicationの一義性が失はれるが故に命題は成立しない。矛盾律は命題及概念の一義的限定性の必然的制約である、それがなければ論理的限定一般が成り立たない。その意味で私はこの原理及排中律の如き原理を論理的領域の形式的規定を現はすものと考へる。何か特定の限定に關するのでなく限定一般に關するものである。之に反して演繹の原則はすでに特定の限定形態にのみ關するものである。命題は勿論この限定形態のうちに立ち得るが、しかし必ずしも立つことを要しない。より原始的ではあるが明かに之と獨立な、その包括する領域に於てもつと一般的な限定形態である。演繹的限定形態を何等かの意味で最も「完全」なものとなし、論理學はかゝる「完全」な形態の學でなければならぬといふならば、かゝ

る論理學の概念に對して反對すべき理由はない。しかしそれがために論理的形式の間に存する領域關係の相違、卽ち「一般性」の相違を沒却することゝなるならばそれは偏頗な立場であるといはねばならぬ。

論理の領域に於て形式的原理の間に上述の如き區別を認めるとして、その區別の本質が何であるかが問はれるであらう。私は矛盾原理の如きものは論理の領域そのものゝ形式的規定であり、演繹の原則の如きは領域にあるものゝ或はその部分領域の形式的規定であるといへるであらうと思ふ。その意味で命題のみに關して他の限定形態に關することなき原理があるとしたら、それもやはり領域に含まるゝものゝ形式的規定たるにすぎないであらう。こゝに論理の領域といつゐるものは特有なる限定の領域である。その限定を概念的限定とよぶとすれば、論理の領域は概念的限定一般の領域である。この領域に於ける限定形式の全體が論理學の對象である。演繹的體系は多樣の限定形式を法則的に系統づけるものである。領域に含まれるところのすべての限定形式が唯一の法則的系統に統一されることの不可能は、系列の領域としての連續そのものが一つの系列として法則化され得ないのと比較し得る。矛盾律、排中律の如きは領域の形式ではあるが、體系的法則ではない。形

式的眞理の可能的全體を唯一の演繹的體系に收めることの不可能は、あらゆる體系が領域のうちに成り立つものであり、いかなる體系の法則も限定された法則である限り、すでに可能なる形式の一つであつて、それによつて可能なる形式の全體を系統的に統一することは出來ないのによる。論理學自身が演繹的體系として成り立ち得るか否かの問題はかやうに考へれば明かに否定されねばならない。理論の領域に關する「理論」がいかにして成り立つか、論理の領域はいかにして領域としてあり得るかは別に考へるべき問題である。それには論理的限定が矛盾原理による限定であり論理の領域が矛盾關係の領域であることを眼目として、これを矛盾關係を超越した場面への關係に於て考へることが必要であらう。しかしその問題にはこゝで立ち入らぬことゝする。

論理的形式を「形式化」によつて考へる場合、對象一般の構成形式がいかなるものであるかといふやうな問題に於ても形式化の段階と之に伴ふ範疇的形式の段位を考慮に入れる必要があると思ふ。フッセルの形式的本質學の概念に關して起つて來る疑問もさういふ點に關係してゐるのである。フッセルは對象一般の形式的本質は實質的本質と異り uneigentlich なもので、本質の單なる形式あらゆる可能なる本質の空虛な形式であるといふ。それに應じて所謂形式的領域も、諸々の實質的領域とならぶところの本來の意味での領域ではなく領域一般の空なる形式にすぎぬといふ。(Ideen. §10) しかしまた、形式的領域も實質的領域と同樣領域に關する形式的公理と、その公理を通して定められる形式的範疇の總體をもつ。そこに形式的領域及びそれの本質學を本來の實質的領域及びそれの本質學とたとへ外面的ではあつても、相平行せしめる理由があるとしてゐる(§16) 領域がすべて形式をも

つとすれば、形式的領域もまた形式をもたねばならぬ。この形式はいかなるものであるか。それは領域一般の形式の學としての形式的本質學の對象とはならぬのであるか。フッセルはかゝることを問題としてゐない。それは彼に於ては對象一般とか、單なる或ものとかの概念が限られた意味をもち、形式的領域が諸々の實質的領域を基として考へられてゐることによつて一應理解出來る。しかし對象一般を構成する形式(論理的範疇)そのものも何等かの意味で對象とみるべきではないか。從つてすでに對象一般の形式をもち、形式的領域に屬するものではないかといふ問ひは成り立たぬものであらうか。形式のかやうな二重性は認めないといへば問題は簡單であるがそれが正當であるかどうかは疑問である。こゝには形式の問題に關してなほ考へるべき餘地が殘されてゐると思ふ。それはたゞ機械的に形式の形式或は論理の論理を考へることによつてではなく、形式といはるゝもののうちに於ける次序をみることによつてのみ解決されるのだと思ふ。

これまでに述べたところは嚴密に、純粹な論理學の原理から出發して、所謂論理計算と純粹數學とを統一的に導き出さうとする立場(ラッセル一派のロギスティク)についてであつた。次にはかゝる立場からでなく、普通の algebra of logic の立場に立つものとして論理學と數學との關係を考へてみよう。ラッセルなどの立場も數學の命題に達するには普通の部類論理學を通らねばならぬのであるから、以下の考察は上述の部分に接續するものである。こゝでは數學に於てはたゞ連續の理論だけをとつて考へる。

ある領域の要素に對してたゞ論理的(こゝでは部類論理をさす)關係卽ち inclusion (or subsumption) の關係だけを與へたとき、そこには系列形式に關して種々の可能性

が殘される。(系列的關係は包攝關係よりもより特殊的なる故)。系列の決定はこの多樣な可能性のどれかを選び出すことに外ならぬ。卽ち論理的關係と矛盾しない系列は多樣にあり得るわけである。それはライブニッツの可能の世界に比較し得るであらう。しかし論理的關係が與へられただけでは、これ等の可能形式は定つたものとしてあるのではない。それは單に消極的な可能であつて、特殊なる系列法則の限定の前に、何物かゞ可能であるか、いかなる可能があるかといふ如きことが決定せられてあるのではない。一般は特殊を必ず可能態として含むといふやうな考方はすでに一般と特殊とを包括する體系的法則の存在を豫想するのであつて、その條件を考慮せずしていひ得べきことではない。その意味で特殊化の原理は論理的關係に對してどこまでもある新たなるもの、contingentなもである。連續的系列の限定は部類論理の一般的關係の上にいかなる規定を要するのであらうか。

ロイスは部類論理と連續の問題との關係を論じた興味ある論文を發表してゐるが。(J. Royce, The Relation of Logic to the Foundations of Geometry. Transctions of the Amer. Math. Soc. 6. 1905) その中で論理的な部類の關係と點の系列との相違する點として

(1) aがbに含まれ、bがdに含まれる、など又aがcに含まれcがdに含まれるとするならば、(イ)bがcに含まれるc(ロ)c

がbに含まれる、（ハ）cとbとは相等であるといふ三つの關係はいづれも可能である。しかし論理的關係にあつてはbとcとの間に上記のいかなる關係も成り立たぬこともまたあり得る。

(2) aがbに含まれ、bがcに、cがdに含まれる、なほ又、iがbにbがcにcがjに含まれるとするならば、iとa、jとdとの關係も不定である。卽ちそれ等の關係は必ずしも包攝關係によつて現はし得るものたるを要しない。

この理由によつてロイスは、logical entities の體系は空間の點の體系よりも一層一般的包括的であり、從つてある空間形式は論理的包含關係を例表（エクセンプリファイ）するところの體系中に現存（プレゼント）する entites の中からの一の選擇（セレクション）とみなすことが出來るとしてゐる。ロイスの system Σ 及び O-relation なるものは、その中から種々の特定的體系をとり出すことの出來るものとして、體系間の關係を明かにすることに役立つものであらうが、ロイスは體系の要素の存在に關してはじめからあまりに大きな假定をおいてゐるので體系そのものが非常に隨意的な假定的性質のものとなつてゐる。ある一般的關係が與へられたとき、それと兩立し得るあらゆる可能なる要素がはじめから與へられてゐる如き體系を考へるならば、より特殊化された關係によつて定められる體系をその中から選び出すことが出來ることは當然である。しかしさうした existential principles は全然超論理的であつて、ロイスのいふ如く部類や關係の世界があるために必然に豫想せらるゝものであるといふことによつてそれ自身論理的だとは

いへない。

それであるから、部類論理と連續との關係をみる場合に、關係のタイプに關する規定と要素の存在の假定とを區別して、假定の少ないものから多いものに進むといふ方法をとるのが妥當であらう。この意味でハンティントンが general law と existence postulates とを區別してゐる見方に從つて考へて行くことゝする。上のロイスの例でも解る如く部類の關係だけからは系列に於ける要素の配置は一義的に定まらない。しかし例外として要素の數が限られてゐるときは、その不定なる場合のすべてを遺漏なく列擧することによつて、論理的關係だけを用ひて要素の配列の仕方を完全に定めることが出來る。例へば、たゞ二つの要素については

$a=b,\ a<b,\ b<a$ （$<$は先だつ關係）

が可能なる配列の總體であつて、そのいかなる場合も論理的に限定される。（a=bは相互包攝の關係として定義される）。論理的といひ得ないのはたゞこれ等の可能なる場合の何れが選ばれるかの決定である。ハンティントンは四個の相異る要素について系列的可能の全體を一般法則的に、卽ち論理的關係のみによつて規定した。

(E.V. Huntington and J.R.Kline, Sets of Independent Postulates for Betweenners. Trans. Amer.

Math. Soc. 18. 19 7) しかしロイスの例(1)にみられる如く四個の要素の相互の異同不定ならばもはや純論理的關係では配列を決定し得ないのである。即ちそれ以上は要素の中にこれ〳〵の性質のものがある、或はないといふ如き存在要請の助けをからねば系列は決らない。自然數のタイプの系列、稠密(デンス)系列、連續系列等は皆それぞれの存在要請を含む。例へば自然數タイプの系列は最後(最初)の要素以外のあらゆる要素は直接之につゞく(先だつ)要素をもつといふ如き要請によつて(これのみではない)定められる。

これ等の存在的假定はこゝに考へられた部類論理にとつては、すべて偶然なるものである。しかしこれ等のいかなる系列も論理的關係によつて禁止されないもの、即ち可能なるものである。だからいづれの系列も論理的可能のうちの特別なものの選定にすぎぬとも考へられるであらう。ある關係的規定によつて禁せられざるもの、即ちそれに矛盾しないものがすべて可能であるといふことは、あらかじめ無制限な可能の領域を假定し、關係的規定はたゞその可能の一部を除外するものにすぎぬといふ思想に外ならぬ。かゝる可能の概念と二つの要素について $a=b, b<a, a<b$ のいづれもが可能であるといふときの可能の概念とを比較するならば論理的可能の

全く異つた意味を見出すであらう。後者に於てはあらゆる possibilities が論理の範圍内でつくされてゐるが前者のそれは全然 open な可能である。

與へられた體系に於て、一定の關係に對して、あらゆる可能なる alternatives を漏れなく列擧することが論理的概念のみによつてなされるときそこに全然存在的假定に依存しない命題が成り立つ。それは存在するものについての眞理のあらゆる變動に係らず成立する命題である。かゝるものがウイットゲンスタインの所謂トートロジーに當ると考へてもよいであらう。(Wittgenstein Tractatus Logico-Philosophicus. p 97)かゝる命題の否定は內面的矛盾である。それでこの特徵を嚴密な意味での分析的といふ槪念の意味とすることも出來るであらう。かやうな定義からすれば連續の數學が分析的といひ得ないことは明かである。何となれば連續系列は一定の存在假定を必要とするからである。基礎におかるゝ關係を上述の如き簡單なものに限らず、もつと特殊化せられたものをとるならば、前に存在假定によつてのみ限定し得た系列が、一般法則的に限定し得るであらう。しかしその場合はその「關係の論理」は部類論理とは別なものである。しかしいかなる論理の體系によつても存在公理を用ひることなしに全然分析的に連續系列を限定することは不可能である。

ハンティントンの一般法則といつてゐるものは部類論理學に於ける「論理學に屬する命題」であり、存在要請といつてゐるものは「論理的に定義し得る要素のみから成り、しかも論理學に屬するといへない命題」に當る。ロギスティクに於ては後者は定義の形に於て現はれてゐる。その意味で數學歸結法は自然數タイプの系列の定義であり、連續も論理的に系列タイプとして定義される。その意味でクーチュラーのいふ如く數學は論理的定義からの論理的原理による演繹であるといへるであらう。しかしクーチュラー自身のいふやうに定義は必ず定義されたものの、存在を主張する命題を伴はねばならぬ。而してこの存在命題は「分析的」ではあり得ぬのである。

以上は部類論理學の立場からの連續の數學の分析である。部類論理の上述の如き限界はこれまでいかなるロギスティクによつても本質的にはこえられてはゐない。その意味で數學の論理化はついに到達されざる理想に終つてゐるといはねばならぬ。だから直觀主義の主張する如き數學に於ける純粹なる非論理的事實性や、公理的形式主義の立場そのものに潛んでゐるところの數學の假定性(形式主義はその假定の內在的非矛盾性といふ消極的合理性に滿足しやうとする)やはロギスティクによつて論理的に合理化せられたとはいへないのである。かゝる方法によつて

數學の學としての「可能性」が闡明されるといふことは望まれない。吾々はロギスティクに於ける數學の概念構成及證明方法の精密な分析そのものゝ價値は十分に認めてよいと思ふが、その分析から數學の論理學への還元を期待することは出來ない。

（完）

第百六十三號揭載の分正誤

		誤	正
二〇頁	八行目	否定の積極性	否定の限定性
二七頁	五行目	於けるより完全な	於けるよりも、より完全な
五五頁	二行目	ユプシロン数	エプシロン数
七四頁	一五行目	抽象的に	抽象に