

直觀空間の先驗的構造 (ベツカア)

下村寅太郎

(はしがき)

幾何學は一般に「空間の數學」と稱せられる。より精密に言へば「空間及び空間に於ける形象の數學」である。それ故我々は異なる幾何學に相應して夫々の異なる空間を知る。新しい幾何學の成立は新しい空間の發見である。今日の我々は實に様々な空間を持つてゐる。數(整數)と形態との一義的對應性の發見からピユタゴラスの——一般にギリシヤの

——幾何學が成立した。ギリシヤに於ては幾何學は即數學であつた。現實的形象との相應性を離れ得なかつたギリシヤの幾何學には唯一の幾何學しか存在し得なかつた。從て此處には唯一の空間しか「存在」しなかつた。而し

てその空間はその幾何學の特性を持つことも當然である。エウクリッド空間は勿論直觀空間でなければならぬ。

デカルトの「幾何學」(一六三七)は幾何學を單なる幾何學でなくした。幾何學を空間から解放した。デカルトに於て幾何學は代數學的になつた。近代は種々の幾何學を、從て種々の空間を發見し得る機縁を得た。エウクリッド空間は單にこれらの諸空間中の一特殊なる空間となつた。このことは一般的には、古代の表象的思惟法と近代の概念的思惟法に基づくものではあらうが、直接には専ら幾何學の方法の反省に基く。

方法の反省は當然、「單に直線と圓よりの構

成」なる無意味の制限を破棄せしめる。一般化され、形式化された幾何學的方法が専ら代數的に取扱はれ得ることを拒むべき理由はない。かく形式化された幾何學がその方法を徹底し純化するならば、當然それは公理主義的幾何學とならざるを得ない。それは形式的な公理の矛盾なき演繹體系以外の何ものでもない。此處に於ては「點」や「直線」や「平面」等の言葉は唯、單なる内容の空虚なる記號たるにすぎない。勿論我々はこれに何らかの内容を與へて了解するではあらうが、然しそれ自身はかゝる内容によつて成立するものではなく、それとは獨立に成立する。その内容は唯だ單に當該公理的關係を満足せしめる一例であるにすぎない。一八九七年のクラインの所謂、Erlanger Programm は近代の幾何學的研究を綜合し、且つ、豫定して、幾何學を以て、

「變換群下の不變式論」と規定した。(最近の研究 (Levi-Civita-J. A. Schouten) は更にその領域を擴張した様である。)

この場合、我々がかゝる幾何學を猶ほ空間論と稱し得る根據は唯だこれらの體系に空間的表現或は意味を與へ得るといふにすぎない、この意味に於て純粹數學としての、即ち公理主義的な幾何學は「空間の數學」ではない。空間論としての幾何學は別に位置を持たねばならない。(このことは勿論幾何學の先驗性を否定することにはならない。)

かくの如き發展過程を有する今日の幾何學の問題は極めて多様たらざるを得ぬ。方法或は公理組織の異なるに應じて異なる幾何學が成立し、それに應じて種々の異なる可能的空間が成立する。曲率零なるエウクリッド空間、一定の曲率を有する非エウクリッド空間、更

に全然不定なる曲率を有する空間、即ち曲率が點の函數なる如き空間等々。かくして空間論の問題はこれらの諸空間の性質及び相互の關係、それらの現實性、我々の經驗との關係、殊に輓近の物理學の基礎問題との接觸、等々に集注する。(かゝる問題はギリシヤ的幾何學に於て問題となり得なかつたことは、恰も公理主義に於ける非矛盾性の問題に於けると同様に、明であらう。)此處に數學と自然科學と哲學との交渉が他のいかなる問題に於けるよりも緊密に結合する。従てそれには廣汎な準備が要求される。

こゝに紹介しやうとする Oskar Becker 氏の勞作 „Die apriorische Struktur des Anschauungsraumes“ („Philosophischer Anzeiger“ IV. Jahrgang, 1930, Heft 2. 所載) も亦この問題に寄與せんとするものである。この論文の特色

は既に豫想される如くハイデツガアの解釋學的立場に立つて、人間の環境的世界としての直觀空間の構造を考察しやうとするものである。その中特に興味ある貢獻は、直觀空間の三次元性の問題である。この問題は數學的には平易であるに係らず、經驗批判の問題としては從來猶ほ殆ど解決されてゐなかつたことは人の知る所である。或は「コロンブスの卵」と感じ様ともこれの一つの貢獻を認めざるを得ないであらう。

勿論問題が論じ悉くされてゐるとは考へ得ない。例へば此處では直觀空間が一義的にエウクリッド的空間とされ、それが「解釋」されてゐるのであり、又それに終つてゐる。又その直觀空間の規定も必ずしも十分に明瞭ではない。その他この論文中に現はれてゐるカント解釋や新物理學の解釋に就いても別に論が

あるであらう。これらの點については別の機會に譲る。猶ほ本論文は特に H. Reichenbach „Philosophie der Raum-Zeit-Lehre“ (1927) に關聯して書かれたものであるが、我々の關心はこれに存しない故に、これに關するものは省略した。その他の點に於ては、脚註を除いては、略々忠實な抄録である。

今日、空間問題は、ライヘンバハ及び同様な批判的、經驗論的方向をとる研究者が唱へる如く二つの問ひを含んでゐる。それに應じて經驗論的解答も二つのテーゼを含む。兩者はある意味に於て獨立である。

その問題とは

一、近代理論的物理学に於ける非エウクリッド的(四次元及び多次元的)空間形式の適用は、我々

の直観空間のエウクリッド的三次元的構造の——本質必然性ではなく——偶然性、純粹な事實性を制約するものであるか。

二、我々の直観空間のエウクリッド的三次元的構造は専ら我々の自然・環境の純粹に事實的(な)從て偶然的、非本質必然的(な)屬性によつて制約されてゐるか、若しくは、我々の「世界」〔環境的^{ウムウエル}世界〕のアプリオリに認識し得る構造から本質必然的に生じるか。

である。經驗論者のテーゼは第一の問ひを肯定し第二の問ひには、空間構造の偶然性を主張する前選言肢を採る。

この第二の問題の解答はそれ自身に於ては第一のそれに對する答とは全然獨立に與へられ得ること、又恐らく與へられるであらうことは明である。然し又このエウクリッド的空間構造の先驗性を決定すべき第二の問題の滞りなき研究は、もし實際

にこの問題に於ける先驗的、テーゼが眞として證明される様な場合、近代物理学の存立が眞面目に疑問視され、或はとにかくその哲學的理解が殆ど不可能となるであらうといふ外見的事實の暗示に、事實上、無頓着に、行ひ得ないであらうことも、同様に否認されない。近代理論物理学の「學の事實」〔殊に一般相對性理論及び量子力学〕に對する根據ある尊敬から、今日では、例へばカント（歴史的な、單に新カント派的ならざる）の意味に於ける、エウクリッド的空間構造の先驗性に對する凡ゆる信仰は望みなき反動である、何者、かゝる信仰は、一種の哲學的專制を以て物理学によつて新しく獲得された數學的補助手段の自由（これのみが物理学をしてその輝かしき最近の成果に導いたのである）を偏狹な先驗的立法によつて再び否定しやうとするものであるからである、といふ意見に極めて傾き易いのである。

然しこの懸念は、唯だ第一の問ひが肯定さるべき場合、即ち正さしく近代の「非エウクリッド的」物理学が實際に經驗論的空間理論を基礎としてのみ可能である場合に、根據あるものとなるのである。もし、全く立ち入つた研究なしに前提された、經驗論的空間解釋と物理学の數學的補助手段の自由とのこの聯關が存しないならば——而して我々はそれが存しないことを示すであらう——新物理学の全要求は經驗論に對する證人たる權利はないのである。それ故これの權利なきことの立證によつて、空間構造の由來及び基礎付けの問題の滯りなき何ら不安なき考察が促され得るであらう。

それ故以下の研究は空間構造の問題を次の如き順序に取扱ふであらう。（一）物理学に於ける非エウクリッド諸幾何學の適用と通常の直観空間のエウクリッド的屬性の偶然的性質との間に必然的聯關が存するか。（この問題は次の問題とは全然獨立

に答へられ得る。(二)我々の直觀空間のエウクリッ下の、三次元的構造はアブリオリに、若しくはアポステリオリに存立するか、而してそれは偶然的(純粹に事實的)若しくは本質必然的であるか。

豫め言ふならば、第一の問ひは我々の意見では否定さるべきであり、第二の問ひは、アブリオリとなす方を探るべきである。

I

直觀的空間及び物理學的空間の

幾何學的構造の關係

幾何學及び物理學の歴史は、古代エジプトに於てナイル河が氾濫した原野の測定に起原を發して以來、エウクリッ下の三次元幾何學を我々の空間的環境に適用し得ることを示してゐる。この事實は物理學の最近の發展によつても動搖せしめられてはゐない、又決して動搖せしめられ得ないであらう。何者、物理學(及び自然科学一般)の進歩

は、以前の成果や理論を根本的に破壊し無効にすることによつて成し遂げられるのではなく、それをより包括的な關聯に於て「止揚」特に保存の意味に於て)するにある。それ故、古代の靜力學、幾何學的光學、天體學や、西歐の古典的なガリレイ・ニュウトンの機械學、ホイゲンストフレネルの光學、十九世紀の電氣力學は、新理論の一定の範圍内に於てその妥當性を保有するのである。古き理論の妥當領域の制限は存しはするが、然しこの制限はそれの否定にはならないのである。古き、比較的正確な觀察は、その正確さの限度内に於ては依然として存立する、同様に、古き觀察(現象)域は新らしきその範圍内に於て、又、古き數學的方法は新らしきその特殊な或は變性せる場合等々として存立する。かくの如くして、自然の空間は、人間の環境に於ては人體の大きさの程度に於て且つ人間の裸の感官に達し得る正確さを以

てしては、三次元的、エウクリッド的であること
を、終局的確認として確定することが出来る。

こゝでは、このことが正確に何を意味するかは
考究さるべきでない。(即ち)純粹な感官空間(殊
に「視空間」)の如き「形象」や、専ら一定の——種
々な仕方で規定され得る——原理に従ふ測定によ
つて認識され得る「物理學的空間」に對して「自然
の直觀的空間」を特徴付けるものも、研究さるべ
きでない。又、いかなる「自然現象」(これはそれ
自らがとにかく何ら自己自身に於て明瞭なる概念
ではない!)がエウクリッド幾何學の抽象的體系
に於ける純粹數學的要素及び關係にその「實現」
として配當され得るかも、考究さるべきでない。

「實在的」な幾何學的基本形象(點、直線、平面等
の如き)や基本的關係(内含、並行、合同等の如
き)を取扱つてゐることが、——而してこのこと
は、結果が示す如く、正當に——彼等の特色であ
るからである。この疑問に没頭することは、エウ
クリッド的空間の構造の根本命題が放棄された場
合に初めて、學問的實際的(空虚な思辨ならざる)
意味を勝ち得るのである。それ故我々はエウクリ
ッド的空間構造の事態の「古典的」(勿論ある意味
に於て素朴的)な解釋を云々し得、又この解釋を
古典的物理学に於て自明的として假定されたもの
として、爾後の考究の基礎とし得るのである。

さて此のエウクリッド空間の構造の「事態」に付
いては猶ほ、それが一の(純粹に經驗的、アポス
テリオリな)「事實」であるか、或は一の(必然的、
アブリオリな)「本質態」であるか否かに付いては
全然不定である。兩者の中の何れであるかは一見

した丈では決定し得ない。廣い意味に於ては「實在化された」具體的な形で現存する本質態も「事實」として存する。唯だそれが單なる事實であるか否か、疑問なのである。例へば、四つの違つた色の四個の點取りを事實上くり返し並べることによつて四つの物の $\text{D} \parallel \text{D} \parallel \text{D} \parallel \text{D}$ の順列が實際に存在することを確認することが出来る。唯だそれにも係らず、(この「組合せ」の例では何人も反對しないであらうが) 先験的な本質態が問題となるのである。

それ故、物理學の歴史を通じて凡ゆる理性的疑問を超越して認められて來た上述の限界内に於ける、エウクリッド空間構造の事態が存立しても、猶ほ未だ、一の「純粹な事實」が存するか或は一の「本質態」が存するか否かの決定は全く未解決のまゝに置かれてゐるのである。だが然し「古典以後」の物理學の發展から(一般相對性理論及び量子力

學に於て) 非エウクリッド的空間形式の適用に到り、エウクリッド的空間構造は「人間の近傍に於て」純粹に事實的性質のものであることを結論した。即ち次の如く論證した。――

もしエウクリッド的空間構造が先験的であるとすれば單に「人間の近傍」(人間の周圍の世界、彼の身體の大きさの程度、彼の裸の感官の觀察力)に關係するのみでなく、全然一般的に、全世界空間に對して、大部に於ても小部に於ても、妥當せねばならないであらう。従て、それは大なる宇宙的次元に於ける空間の非エウクリッド的(例へば、計量的に歪曲せる)構造や、小部に於ける、原子的次元に於ける計量的或は位置解析的なる(次元數や接絡に於ける)變則をも除外するであらう。かくしてそれは一般相對性理論並びに(シュレディンガアの)量子力學を不可能ならしめるであらう。――

それに反して、もし我々の人間的「環境」に於けるエウクリッド的空間構造を経験的と見做すならば、何ら強ひて宇宙的或は原子的次元に於てこれに拘束しやうとするものはない。理論的物理学に於て用ひられる空間幾何學を、次の如く設定すれば全く十分であり、——而して又全然必要でもある——即ち人間的「環境」は十分近似的に常にエウクリッド的である。換言すれば、人間の近傍に於て、又、人間の程度に於て剛體は「自然的」人間の觀察力の範圍内ではエウクリッド的法則に従ふ様に、物理学的事實（例へば、物質の分布、重力の場、原子内に於ける量子力学的事象等々）に依存せねばならない。——

それ故、近代物理学にとつて正さしく本質的である所の數學的空間形式の選擇の自由は、直接、我々が素朴的に觀察するエウクリッド的空間構造は一の單に偶然的な事實であり、従て何ら本質必

然性に基かないといふ點に依存する。——と得意の論證を結ぶのである。

この論證は堅牢であらうか。——右に略述した證明法自身に従へば、直接に直觀的な、古典的物理学に於て用ひられたエウクリッド的空間構造の「現象」を「救ふ」ためには、人間的「環境」が十分近接的に常にエウクリッド的であることが必要にして十分である。この條件を充す凡ゆる空間形式は——いかに多くの點に於て非エウクリッド的であつても——許される。然し又唯だかゝる條件を有する空間形式のみに限る、何者、これとは異つた性質を有するものは凡べて、古代以來全古典的物理学を確立して來た動かし難き事態を否認するであらうからである。

それ故空間形式の選擇は夫の事態を保證する夫の一つの條件のみに拘束されてゐるのである。——この場合、猶ほ、夫の事態が經驗的若しくは本

質的に存立するか否かの問ひを決定することは必要であらうか。物理學は夫の事態を確かにいかなる事情があつても「救は」ねばならない故に——物理學はその事態を又先驗的に存立せしめ得ないであらうか。もし物理學があくまで此の桎梏に服するならば——我々が後に見る様に、これは甚だ容易な桎梏にすぎない——物理學がその破り難きことを(即ちその先驗的性質を)認めるか否かは問題であらうか。

從て物理學は結極、人間の直觀空間の先驗性の問題に全然關心してゐなかつたのではなからうか。——

然し上述の論證は正さしくこの可能性を既に豫想して居つた——そして秘してゐたのである。もし空間が人間の「近傍」に於て先驗的に、エウクリツド的であるならば、それは到る處に於て、「人間から隔たれる」處に於ても、原子に於ても星の體系に

於ても亦さうであると上述の論證は言ふのである——然しそれは抗すべからざるものであらうか。

空間は専ら人間の近傍に於て先驗的にエウクリツド的であるのではないであらうか。これは歴史的カントの意見の意味でさへあるのではないか。カントは、空間が人間の、而して確かに人間のみの(その點に於て人間と一致する他の存在者が存在し得るではあらうか——)純粹直觀の——「感性」の一形式であることを教へる。而して(それは)勿論又、(感性的)經驗に於て達し得る「現象」の總體である限りの「自然」の形式である。

カントは一七七〇年の就職論文 *§ 15E* に於て云つてゐる——“*Leges sensualitatis erunt leges naturae quatenus in sensus cadere potest*” 此處に付加された條件文が決定的である——「感性の法則は、自然が感官に屬し得る限り、自然の法則であるだらう。」この定式化は極めて先見的である。確

にカントはこの中に存してゐる可能的な場合を後に利用し盡してゐない。(彼は當時の物理学の状態のために何らそれをなす機會を有しなかつたのである。)彼が、彼によれば唯だ感性的(同時に範疇的に把握された)對象を取り扱ふ物理学の空間を、空間の純粹直觀形式の法則としてのエウクリッド的法則に従はしめた箇所は、カントに於ては甚だ多く存するのである。然し此の "quatenus in sensu calidore potest" なる意味深き制限は、「感官に屬し」ない、「自然」の可能を保留するために用ひられ得たであらうといふことも同様に確かである。カントの批判論に従へば、「現象」と「物自體」との間に(前者は人間に對する、後者は神に對する「對象」である)第三者は存在しない。然しカントは唯だニエウトンの物理学を知つてゐた丈である。カントがアインシュタインを知つてゐたことを假定するのは確かに笑ふべき假構である。かゝる時代錯誤

が許されない理由は少しとしないが、然しカントの夫の注目すべき制限 (quatenus in sensu calidore potest) の實質的效力を現代の問題状態の燦光中に引き入れても差支へないと思はれる。重力的、電氣的場や旋回——或は寧ろ旋回せずして、記述し難き仕方では核の周りの「軌道」を「充す」——原子中の電子は、決して「感官に屬する」「現象」ではない。然し又それは「物自體」でもない。(intuitus originarius若しくは intellectus archetypus なる神がいかにして場や、電子を「見る」かを我々は知らないのである。)それは現象と物自體との獨自的な中間存在者であつて、ある意味に於ては「感性のアナゴロン」の一定の形式に隸屬するが、もはや人間の感性の純粹形式には隸屬してはゐない。(バウムガルテンの analogon rationis に對應して analogon sensuativitatis なる言葉造つていゝとすれば。)

本論文は殆ど先驗論的哲學的或は歴史的意圖を有するもの

ではないが、新物理学に對するカントの可能的位置に付いて猶ほ若干のことを指示して置かう。――

カントは「すべて、外的に對象として我々に現はれ得るものに關して空間の實在性、即ち客観的妥當性」を、然し同時に事物が理性それ自身によつて思慮される場合、即ち我々の感性の性質を顧慮しない場合の事物に關して空間の觀念性」を説く。かくして「空間は、外的對象の制約として、必然的に現象及び現象の直観に屬する。」「空間によつてのみ事物が我々に對して外的對象であることが可能となる。』(K. d. r. V. A 28-29.)

さて「實在性」が「すべての可能的經驗に關しての」(「經驗的實在性」といふ程の意味であるならば)「外的對象」なる言葉も人間の生が驗即ち人間の環境的世界の直観的事物として解釋し得る。然りとすれば物理学の實驗室や天文臺の裝置や器具はこれに屬しはするが、然し光線から形成された宇宙的次元の三角形或は原子中の電子の軌道はこれに屬しない。これらば決して可能的な人間の生經驗の對象ではない。従てそれらば「理性それ自身によつて思慮された場合の事物」であるか。これを恐らく差し當り假定し得るかもしれない、然し、「物自體」自身は専ら我々人間にとつては「消極的意味に於ける理體」として把握されること、「單に私が感性的直観の凡ゆる形式を抽象した或物一般の思惟な意味する」處の概念であることを、更に進んだカントの批判は教へる。かゝる「理體」

は明に決して理論的物理学の可能的對象ではない。然しそれでは――先驗論的に見て――アインシュタイン空間に於ける「歪曲せる」光線やシュレインガー電子やその三次元空間に於ける軌道の如き理論物理学的對象は何であらうか。いかにして我々はそれらを少くとも純粹數學的に規定し、従て猶ほ何らか積極的に認識し得るに到るか。カントは然しあくまで次の如く云つてゐる。(Disseration von 1770, §15E)

『もし空間表象が、根源的に精神の本性によつて與へられてゐないとするならば(従て空間が規定するのとは何らか異なつた關係を案出しやうと努力する者は、徒勞である、なぜならばこの同一の表象を彼の假構の基礎に利用せざるを得ないからである。自然科學に於ける幾何學の使用は殆ど不確實となるであらう。即ち彼に従へば凡ゆる非ユウクリッド幾何學の(空間以外の何らかの關係を案出しやうとする)試みには既に(三次元的ユウクリッド的)空間の概念が根底に存する。近代の數學者はそれに對して(單に類推によつて「空間形式」と稱する)非ユウクリッド的集合體の算術的構成を指示するであらう。この算術的構成はカントの解釋によれば時間直観によつて、幾何學への直接の類推に於てははなはだ、量の範疇の時間的圖式によつて生じる。(略)然しこの純粹算術的基礎付けは非ユウクリッド的「集合體」の數學的認識を與へはするが、然し猶ほ「空間形式」としてのその可能性を保證しない。(略)

それ故一七七〇年の論文からの夫のカントの言葉を發展せしめると實際、空間は唯だ人間の感性的近傍に於てのみアプリアリにエウクリツド的であり得、他の場合には、唯だそれによつて最初の構造が亂されさへしなければ、任意に非エウクリツド的であり得る、といふ命題に導く。然し斯くエウクリツド的「感性的」自然空間性と非エウクリツド的「非感性的」(ansensinlich)自然空間性とのかゝる關係の「哲學的」可能性が保證された如く思はれるが、この關係は更に深く、數學的見地に於てはいかに思惟されるか。

この問ひは既に答へられてゐる、即ち非エウクリツド的空間形式を利用する該物理學的理論そのものによつて。何者、この物理學的理論が純粹な思辨でなく、觀察や實驗の解釋である限り、それは正さしく、人間が自己の裝置、自己の直接の交渉の事物(測量器具)と共に留まつてゐる所の人間

的環境的、世界的エウクリツド的空間との關係を媒介してゐるからである。

こゝで考へられてゐる數學的關係は勿論アプリアリに一般的公式に造り上げられない。何者、それによつて、何時か將來の物理學的理論に這入るかもしれない空間的構造がアプリアリに確定されることになるであらうからである。それは不可能に見える。

だが從來、理論物理學に於て取扱はれた極く重要な場合に於ける「感性的」及び「非感性的」空間性間の數學的關係に付いて簡略な概観を與へて置かう。

(一)一般相對性理論(Einstein, Hilbert 1918)

「平直的」空間要素を有するリイマンの多次元的曲率空間、即ち人間の大きさの程度に於ける空間は甚だ近似的にエウクリツド的である。大部に於ては空間は非エウクリツド的である。人間の無限と考へられた純粹直觀空間は人間の立脚地(物理學的空間に於ける)を接點とする歪曲した「非感性的」(ansensinlich)物理學的空間との切空間である。

(二)ハイク(Fyck)の原子論(Annalen der Physik (4), 42

S. 1417 ff.)

リイマンやクリツフォオドの先蹤に還つて、原子若しくは電子は、正又は負の曲率を有する小域として説明される。空間は（原子間の中間空間と同様に）大部に於ては、極小的次元に對しては依然としてエウクリッド的である。該非エウクリッド幾何學に於てエウクリッド的計量を有する面、「極限球」等）は、限界面として用ひられる。それで二次元の譬で言へば、空間は例へば、全體に於ては平面的であるが小部分に於ては凸凹を示す一枚の紙によつて現はされる。恰も地球面と同様である。

全體の「宇宙的」次元に於けるアインシュタイン空間と、重力の場によつて制約された不規則さとの關係も同様である。此處では全く、重力の歪曲から獨立なる全體曲率が存在する。（地球面に於ける如く——）

(三) ワイルの「物質の動源説」(Weiss, *Abhandl. 1924*)

空間は小部に於ては位置解的單一性を、而も接線に於て有する。空間は小さな（諸）孔、内部的（諸）空間を有し、物質は空間の「外部から」空間中へ作用を及ぼす。此處に於ても比較的大なる次元に於てはエウクリッド幾何學が支配する。譬喩で云へば、糸と糸との間に小さな隙間を有する一片の織物。

(四) シュレディンガーの量子方學。原子内の「電子」の「運動」は、電子が該原子中に現存するは場合(ハ)の三倍の次元の空間に於ける一種の振動として生起す。それ故、物理

學的空間は小部に於ては多くの場所では三次元であり、大部に於ては（「人間的」程度に於ては）常に三次元的である。次元數には「小なる」位置解的單一性が存する。譬喩で云へば砂紙。即ち全體に於ては二次元であり、個々の砂は三次元である。又地球面。大部に於ては（國、州、海洋の大きさに於ては）二次元であり、小部に於ては（例へば 10^{-12} km までの）三次元である。

(これらの枚舉で決して悉きたわけではない。例へば、猶ほ the Sitter, Eddington, Kakuza, Heisenberg, K. Menger を記憶すべきである。これらの事例はすべて原理的には上述のものと同様に取扱はれ得る。)

(一) から(四)までの例ではエウクリッド空間よりの相違は小部分の單一性に存した、これを平均することによつて(二)の場合には、曲率を零に還元(三)の場合には孔空間の填充、(四)の場合には多次元の部分を三次元に「平坦にする」とによつて「感性的」自然の等質的空間に還元される。無限に延長すればこの「直觀空間」は(一)の例に於ける物理學的空間の切空間と一致する。

それ故、我々は根本的に考察すれば、直觀空間と「非感性的」自然空間との一種の「分岐」を有するのである。分岐點或は一層適切には、兩者が擬漸近線的に接觸する所の、換言すれば、大に近似的に——算術的形式上——合致する所の領域は人間の環境的世界若しくは彼の物理學的相關者の範疇で

ある。この合致は、自然的知覺能力には完全な同一（數學的見地の下に）として現はれるには、充分に正確である。

それ故かくして「感性的」エウクリッド的、及び「非感性的」非エウクリッド的空間形式の並存の數學的可能性、及び更にその「接觸」が一一示されたのである。この可能性は決して——ライヘンバッハの注意に反對して再度力説して置くが——唯だ單に偶然的に従來導入された物理學の非エウクリッド的空間形式に對して存するのではなく、本質必然的である。即ち、物理學的理論とそれの觀察の基礎との關係の可能性の制約として。何者、我々は純粹に人間的な物理學を——何らか空想的な魔精の物理學をではない——從て人間的な經驗的基礎を有する物理學を追究せねばならないのであるからである。然るに人間的經驗（生經驗として）は何と言つても——偶然的であるにせよ、必然的であるにせよ——エウクリッド的空間——環境的世

界に於て起るのであるからである。

而して又此處に證明されたこの並存の可能性によつて、直觀的空間構造の先驗性問題に對して物理學が、關心を持たないことも示されたのである。理論物理學が數學的補助手段を使用する上に於ての自由には、我々の環境のエウクリッド的空間構造がアブリオリ若くはアポステリオリに存立するか否かは全然無意味である。即ち科學の實際には、空間に付いての經驗論者と先驗論者間の論争の結果は全然どうでもいゝのである。逆に近代物理學の「事實」ファクトウムからしては經驗論者に對しても先驗論者に對してもいさゝかの根據も導き出され得ないのである。全空間論争は實證的科學が何ら正當な關心を有しない所の全く「アカデミツシユな」問題である。

其にも拘らず哲學にとつては其は大なる意義を保有する事は言ふを要しない。それ故我々はこれか

ら先入見なしにこの問題に向ひ得るであらう。

II

直觀的空間（感性的自然空間）の

本質、必然的幾何學的構造

空間直觀、若しくは、直觀空間の構造を純粹に
取り出すためには、これと混同され易い二つの現
象群を除去することが必要である。その一つは、
プラトンの言葉で言へば、*mondylnica* の世界、即
ち、遠近法、錯視や運動錯覺の如きものゝ世界で
ある。今一つのもは交渉的空間、より正確に云
へば、種々の可能的なる交渉的空間形式の世界で
ある。こゝに述べた二つの空間的現象群に對して
は、先驗的構造の問題は究明さるべきでない、そ
れは困難であり、又、單に甚だ不規定な餘地を残
して解かれ得るにすぎない。即ちこゝには本質的
に「經驗的」な因子が入りこんでゐる。それに反し
て一定の意味に於てこれらの兩現象領域の中間に

立つ純粹直觀空間に對しては、それが本質必然的
に三次元的エウクリッド的であるといふテーゼが
衛られねばならない。

それでは、積極的に、いかにして、エウクリッド
的、三次元の空間直觀の必然性は理解せられるで
あらうか。たとへかゝる空間直觀が（非エウクリ
ッド的四次元の空間の）近代物理學（の存立する）
に拘らず、可能であり、又、既に前述の如く棄釋
され得ず、従て、事實上存するとしても、それを
以て猶ほ未だ、それが必然的であるとは言ひ得な
い。カントは勿論それに對して（フツセアルの用語
によれば）絶對的な「偶然的アプリアオリ」を要求し
た。即ち、エウクリッド空間は人間には認識され
得ない根據よりして人間に（その他に恐らく更に
他の有限の存在者にも。然し我々はそれを知り得
ない。）直觀形式として與へられてゐるとした。

然し此處で我々はカントから離れ、エウクリッド的三次元的構造の了解を要求する。我々は空間の本質的構造が基く所のアブリオリの根據を求めることによつて、經驗論的主張をも最もよく反駁し得るであらう。かゝる了解は空間中の個々の圖形の考察によつて、その直觀的性質よりして、得ることは出来ない、唯だ、全體に於てそれに見有する空間構造の原理の究明によつてのみ得られる。それ故、數學的見地に於ては、初等幾何學的定式化よりも、詳論的な空間構造の定式化が採られねばならないであらう。

以下、我々は順次、零となる曲率（エウクリッド性）と三次元性との（全く獨立な）性質を取扱ふ。

I エウクリッド的構造（曲率=0）

直觀空間のエウクリッド的構造にとつては、その等質性（Homogenität）と等方性（Isotropie）と

が決定的である。これはその内容と全然獨立な又、その内容に對して無差別な形式としての直觀空間に承認されねばならない。このことは屢充分に言はれてゐることであつて、何ら詳細な基礎付けを要しない。より困難なのは、このことが意味するものを數學的に言ひ現はすことである。ヘルムホルツ及びリイ以後、等質性の（數學的）要請によつて定立されるのは、最小部分に於ける平直性（Ebenheit）と、この第一條件によつて與へられたリーマン空間の曲率の恒常性とであることが知られてゐる。特に注目に價することは、小部分に於ける平直性の導出（エウクリッド的回轉群）が自由運動性の要請のみよりされることである。然し恒常的曲率を有する形式中でエウクリッド空間の有する特異性が難問である。即ち、何故にこの曲率は零であるべきかは容易に理解され得ないのである。相似性を指摘（最初 Wallis, 1663 によつて）し

ても不充分である。何者、大さの相對性は直觀的には存在しないからである。

それ故我々は次の如き方法に據らうと思ふ。即ち、

(1) 全空間が空間要素の等質的擴張によつて成立すること、従て、等質性は空間とその要素との等質性を意味すること。従て要素が一次的(Linear)であれば、空間自身も亦さうであること。

(2) 等方性の要請より(要素的考察による)、空間要素がエウクリッド的(一次的)であること。を示さうと思ふ。

これらの「證明」は直觀的な空間形成と緊密に聯絡して與へられねばならぬ。

「(1)に就いて」我々はそれ故、空間は唯だ「直觀的統合」によつてのみ把握され得ることから出發する。直觀的空間の「中點」に在つて、我々は二つの現象上全然獨立な運動可能性を區別する。——

(1) 眞直ぐに空間の奥への運動「移轉」(Translation)

(2) 空間の「中點」、即ちその時その時の觀察者の立脚點を固定して、その場所に於ける廻轉。

(1)の運動は何ら(2)の運動を起さない。従てそれは方向體系を變化することなく、移轉する。

(1)の運動とそれの間に挿入された(2)の廻轉とを並列せしめることによつて、一の完結した多角形運動——その循環後、方向體系は、各の角で行はれた廻轉を顧慮すれば、變化なく、歸着せねばならない所の——が形成される。もし然らざる場合には、現象上廻轉と全然獨立な純粹な「移轉」中に作用してゐた筈の伏在的な轉向的影響——一の直觀的に全然表象し難き且つ理解し難き事柄、一つの現象的不合理——を假定せねばならないであらう。もし(ワイルと共に)方向移轉は専ら微分的な剛性傾向に基く、従て一般に出發の方向に復

歸しないと云ふならば、それに對しては次の如く答へられる。即ち、このことは、それは小部に於ては測り難き程小で、謂はゞ潜行症ではあるが、然し大部に於ては「積分」に於ては「效力を生じる微分的剛性力の不完全を示すものである」と、小部に於ける方向移轉の場合に於ける完全な剛性は、大部に於ける方向の完全な恒常性をも制約する。眞の無限小は物的にも直觀的にも存在しないことを忘れてはならない、直觀的には唯だ甚だ（然し勿論有限な）小部が存するにすぎない。もしこれに對して剛性が嚴密に妥當するならば——而して我々はこれを假定せねばならない、移轉と廻轉との現象上の獨立性は絶對的嚴密に妥當するからである——それは亦（有限の）大部に於ても嚴密に妥當する。

同様の方法によつて、又、（微分に於ける空間の平直性を前提して）「甚だ小部」に於て甚だ大な

る正確さを以て、一のエウクリッド的な立方體網が空間中に構成され得ることからも、出發するこゝとが出来る。この網を空間直觀は全く正確に「見る」。（心理學的にはこれはウエルトハイマアの „Prinzip der guten Gestalt“ と關聯してゐる、即ち「略エウクリッド的な」立方體網は、「略圓形の」楕圓——確かにそれは常に實際の圓として現はれる——と同一の意味に於て、一の悪しき形態」である。）この一個の網は無際限に——同一の「網目」を以て——擴張され、構成圖式は一樣に繼續される。空間の「等質性」は構成が混亂に陥ることなく、無際限に繼續し得ることを要求する。（一つの共通の角を有する七の立方體は第八の立方體を圖形として一義的に決定する故に、この第八の「立方體」も亦實際に一の立方體であるといふことは自明的ではない。）繼續が無際限に可能であれば、その空間はエウクリッド的である。何者、

8 宛、 8^2 宛、 8^3 宛 …… 8^n 宛 …… の立方體を純粹に思想的に綜合することによつて任意に大なる立方體が「生産」され得、かくして任意の大きさの相似の圖形が與へられるからである。かゝる立方體網の構成も亦、「大部に於て」始めて現はれる「潜行的」誤謬（「空間曲率」に制約されて）を含有するかもしれない。然しこれは直觀には不可解である。即ち、直觀に與へられてゐるのは小部、而も有限なるものであつて、これを直觀は——現象的には——自己の「映像的」機能を以て正確に看取するのではないが、然しあくまで自己の自然的な「規範的」機能によつて（隨意な配列ではなく「良き形態」に基いて）嚴密にエウクリッド的に要求するのである。而してかくしてエウクリッド的構造の要求は大部に於ても亦與へられてゐるのである。

〔2)に就いて〕

これまでの考察は、エウクリッド的な空間要素

（若しくは、廻轉群のエウクリッド的構造）を前提してゐる。今や更にこの小部に於ける空間の「平直性」も直觀の要求、殊に、空間の等方性の要求から、要素的に導出されねばならない。

（さし當り隨意に選び得る）一の中點を附與された空間の等方性とは、その中點の周圍に放射的對稱が支配することを意味する。廻轉を單位ヴェクトルの物體、或は又等しき長さを持つた線要素、の自己内への擬真的變換 (affine Transformation) によつて表はすならば、この物體の凡べての擬真幾何學的性質は放射對稱的に配列されてゐねばならないことは明である。これは數學的に言へば、凡べての擬真的有限的及び微分的不變量は廻轉に際して恒常値を保有せねばならないことを意味する。それ故所要の擬真的變換 (廻轉) は第一に容量不變にして、第二に、例へばヴェクトルの單位物體の凡ゆる點に於て擬真曲率を一定ならしめる。

この單位物體は自己内へ移行するのであるから、從てそれは常に恒常の擬真的曲率を有し、從て——これに極く普通の位置解析的な考慮を加へるならば——擬眞幾何學の一定理に從つて楕圓體である。換言すれば、廻轉は一定の二次的形式を不變のまゝで置く。即ちこれ所要の證明である。

かやうにして直觀空間のユークリッド性は立證されたのである。

II 三次元性

我々の直觀の空間の三次元性の必然性を洞察することは、極めて困難な課題たるが如く見える。

これを解かうとする試みは今日に到るまで恐らく凡て失敗してゐる。此處に、現に存在する「偶然的アプリオリ」なる構造の最も明白な實例が存する如く思はれる。何者、四次元及び多次元の或は單に二次元の（包まれてゐない）空間は、その數

學的構造は全然既知であるに拘らず、絶對的に表象し難いからである。もし經驗論者が此處で單に「最も表象の困難なるもの」をいふならば、これは尙ほ全く不當な曲辯である。組合はされた、空間的——色彩的等の三次元以上の集合態を舉示しても勿論四次元の（その次元に於ては同質的な）空間を直觀的に表象し得ることをいさゝかも證明しない。かく空間性を三次元的に表象することが絶對的強制的であるにも拘らず、この無制限的な必然性を理解しやうとすることは全く不可能の如く見える。我々はそれにも拘らず、その理解を獲得、或は少くとも、その端緒を聞かうと試み様と思ふ。

空間の次元數は差し當り、不定で n を以て表はす、而して n が 3 であることが示されねばならないのである。先づ全方向の束の次元數は、觀察者の立場からでは、 $n-1$ となることは明である。この $n-1$ 次元の束は「空間の與への可能的方向」の全體

を表はす。これらの諸方向は嚴密に並存的である。その全體は、「純粹並存」そのもの、謂はゞ空間の原始現象を表はす。従て我々は此處に、恐らく次元問題が決定せねばならない現象をもつ。生の現象としてはこの方向の全體は概括し得ない。だがこの全體は自己自身の中に一の全く自然的な組織を含んでゐる。「空間に於ける」生物(第一に人間)はその存在の凡ゆる「瞬間」に於て、凡ゆる具體的な存在境位ジドウチヤンに於て、一定の傾向の下に、即ちあるものに對する、一定の定向性の下に、生きてゐる。これは空間的に表現すれば、何時でも常に一定の方向が「執られる」といふことになる。何者、外見上「靜止した」境位と雖も常に既になにもものかに向つてゐるからである。(古き概念 *nisus* と *conatus* とを想ふべきである)。この一定の方向は前方へ(眞直ぐに前へ)である。それ故、可能的方向の全體は、全「方向の場面」の中心を現する所の「眞直

ぐに前へ」或は「前方へ」の唯一方向によつて自己を組織する。これの周圍に爾余の可能的方向が極く或は少しく近接して謂はゞ同心的「圓」(若しくは「球」、或は「高次元の球」)をなして聚合する。その各は三元次元をもつ。(圓の群)それ自體は、一徑數的である)。生物は生存することによつて、空間的な方向傾向は固定し、かくして可能的方向の集合態は顯現的に現はれないか、若しくは、方向傾向は變化する、より適切に云へば、方向變化、轉向(Deviation)への傾向が成立するかの何れかである。(「路」(via)の變化)。この瞬間に於てかゝる轉向の可能性、より正確に云へば、すべて存立する轉向可能性の集合態が重要となり、「現象」するのである。それ故、すべての方向の全體は可能的な方向變化の集合態として現象的根源的に明白となる。それ故空間の次元問題の依存する決定的な全體現象は結極、かく特徴付けられた「轉向の集

合態」(„Deviations-Mannigfaltigkeit“)である。今や決定的な問題は——轉向の集合態の根源的現象的全體性の要求から、いかにしてその次元數(ニツ)が規定され得るかである。

根源的全體(アルハイト)としての與へられてゐる集合態は必然的に何次元數を有するであらうか。

全體性は全體包括的(umfangfassend)である。即ちある意味に於て——何らか他の外的なるものによつてはならないにせよ——局限(Begrenzung)されてゐる。それは „dreipou, ašestinnou“ の意味での無限に對して、全く歴過し得(šestinnou) 而も外的に局限されてゐない。従て、有限にして循環的である。即ち、圓狀の、而も「通常の」一次元的圓線狀のものである。歴過は唯一——必然的に二次元的な——時間に於てのみ可能であり、一全く歴過する「こと」(ein šestšediv)は唯だ有限な時間に於てのみ可能である。それと共に、自己自身に於て總體

的な完全な「全體性」が問題であるとすれば、その全體性は外的に制限されてゐてはならず、従てその全體内に於て有限の路を歩き了つた後にその出發點に歸らねばならない。(外的な極限なき集合態の)一義的な、確かな歴過は唯だ分岐せざる、完結した、重複點なき一次元的な路に於てのみ可能であることは明である。

これは單に概念的な思辨でなく、直覺的現象である。闇中で平面を摸索する不確實な仕方と(例へば闇中で床上の何かを探す場合)(分岐してない)曲線に沿ふて行く一義的確實さとを比較せよ。(闇きラビリントから外へ導く有名なアリアドネの糸を想へ)或は、造形美術に於て極めて本質的な役目を演じる所の視覺領域に於ける線と面との直觀的區別を想ひ浮べよ。(線的と繪畫的とを)規定し難き「面的なるもの」に對して形象を明白に際立たしめるものは、何處に於ても、時間に連

續的に寫し得る一次元的形象の一義性である。線と面と空間とは單に一つの系列の量的差別の諸因子ではなく、線はそれの「歴過性」によつて面や空間の何れに對しても質的、な、特異性をもつ。

それ故次の如き結論が生じる——轉向の集合態は(それが根源的現象的な全體性である限り)循環的——一次元的(III. II. I)である。従て方向の場面(第二段階の前空間的場面)の「純粹並存」は二次元(III. I. II. III)であり、空間そのものは従て三次元(III. II. III)である。かくして證明はなされたのである。

空間の三次元性のこの「證明」はフツセアルの所謂「運動感覺的集合態」(kinasthetische Mannigfaltigkeit)の考察によつて確かに一層進んだ開明を得るであらう。あらゆる可能的な生理學的運動學的錯綜にも係らず、運動感覺的直接的な活動場面は運動感覺そのものと同様に單に有限で一次元的に表象され得る。何者、内的な「自己運動」の現象は

「内的時間に於て」、運動刺戟(志向)及びそれを常に「充實せしめる」運動感覺との連續的な、必然的に一次元な有限の系列として、經過するからである。外的な制限がなければ、有限の範圍の連續的な一次元の循環が生じる。

今、考察した「轉向の集合態」は、運動感覺的に考察すれば、「方向轉換の集合態」(Steuermannigfaltigkeit)の務めをする。即ち、それは、凡ゆる瞬間に於て「空間中に」在る存在者、「空間的に實存する」存在によつて可能として「執られるべき」方向の「運動、感覺的場面」を顯示する。この存在者のその時その時の立脚地より出る方向の全體は、そのまゝでは、概觀し難く、従て「運動感覺的場面」に適しない。何者、この(多次元的な)場面の各要素からして近接要素に對する無限に多様な進行の可能性が存在し、従て一義的な運動方向、或は有限の多義的な運動方向すらも規定されてゐない。

だが然し「空間的」生物は常に既に一定の定向性を有する故に、「實存的には」これはその「負課性」若しくは「既存性」に制約されてゐるから、生物の方向の集合態には「零の方向」（「前方へ」と「方向轉換の集合態」とへの自然な、即ち常に既に、與へられた組織が存立する。この組織は、勿論「方向轉換の集合態」が直接の運動感覺的活動場面であること、即ち概観し得、且つ有限で、歴過し得ることを前提して、方向の全體を運動感覺的に支配せしめ得るのである。而してこの集合態が完結し且つ一次的である場合にのみ、これは可能である。此處に全證明の要點が存する。何者、もし最後に到達した「方向轉換の集合態」も亦一の「中心」と一の「第二次の方向轉換の集合態」に、而して恐らくこれは更に一の自己の中心と第三次の方向轉換の集合態等々に、自然的に分解し得るならば、この證明は明に自己内部に於て瓦解するであら

う。かくして遞昇的次元の累加的に高められた方向轉換の集合態の系列を得、その最後のもの（最高の例へば第三次の）が始めて一次的となるでもあらう。「方向轉換」（「轉向」）集合態」のこの遞昇的體系を以て確かに運動感覺的に任意に高き（30）空間次元を支配し得るでもあらう。——然しかゝる遞昇累積は正さしく不可能である！何者、空間的な生物は常に一定の方向に既に向けられて居り、従て彼にとつては常に一定の零方向が存在する。が然しながら、既に常に一定の轉向をも負課されてゐるのではなく、彼の轉向の「選摘」にては「自由」である。（この點に於ては「可能的」であつて、單に事實的ではない、「自由企畫的」（*freiwillig*）であつて、單に「負課的」（*gezwungen*）ではない。）それ故、何ら他よりも特異な「零」の轉向の方向は存在しない。轉向の集合態は等質的で中點がない。従てそれは自己の中に何ら自然的な組織

を含まず、それ故——それが運動感覺的運動場面に役立つためには——その直接の概観性が、即ち、その一次元性を生ぜしめる歴過性が要求されねばならない。それ故、空間を運動感覺的に支配し得ることの要請から空間の三次元性が歸結するのである。