數理哲學の一方針

下村寅太郎

數理哲學とは固より數學的精神の反省自覺である。

凡そ特殊科學に對する哲學の存在理由を確保するものとして何人も先づ批判的

方法を想起するであらう。批判的方法が一つの哲學の方法として認められる理由は、「超越的」存在を當初より前提しないこと、從つて豫め一切を內在化し、idealisieren するその特色にある。對象ではなく、對象の認識が出發點となる。蓋し「外のもの」を「內のもの」にし、「內から」出發することは當に哲學の方法であるからである。然し批判主義はかく內在化、觀念化されたるものゝ「先驗的基礎」、意識の形式を求める。批判主義は必然的に先驗的觀念論となる。然し「意識」は直に「精神」ではない。蓋し意識はそれ自身としては謂はゞ聲なき沈默せる精神である。意識は常に何ものかに關する意識であつて、從つてその意味に於て意識ならぬものゝ意識である。この契機を具體化して意識と意識ならぬものとの動的積極的統一に於て自己を自覺するものが精神である。換言すれば、兩者の統一を自己の表現として理解するものである。總じて表現とは內的なるものと外的なるものとの綜合である。表現に於て始めて意識は精神となる。凡ゆる精神は表現をもつ。哲學は人間活動の表現の自覺に外ならぬ。

それ故、數理哲學の問題も亦、數學的表現に於ける精神の理解である。表現は我々がそれに於て生き、働くところの事實である故、我々はかゝる事實として存する表現

形象の外に考察の對象を有しない。今日の數學は我々の數學であつて、それ以外に我々の數學はない。今日の形態に於ける數學は今日を俟つて始めて存する故にこの現實の形態に於て、又、それに對して、新らしき反省の方法が考察されねばならない。かゝる事實は又自ら歴史性をもたざるを得ないであらう。

何らかの「數學的」思惟の存在は、原始的たると文化的たるとを問はず、凡ゆる民族、凡ゆる時代に於て見られる所の共通普遍の事象であるけれども、然し「數學」そのものは必しもそうでない。數學は「哲學」の生れたギリシャに於てのみ生れ得た。一般に「學」の成立及びその組織はギリシャ人の獨創であつた樣に、「數學」も彼等の創造である。「かぞへる」こと「はかる」ことは、日常的な出來事であるにせよ、然し、それが純粹に思想的に、純粹に理論的方法に基いて、演繹的論證的體系に構成されたのは、ギリシャに於てゞあり、その系統を承けた西洋に於てゞある。勿論この系統の外に大なる諸業績の存することは周知の事實である、しかしそれらの諸組織は上述の如き「學」的理想を荷へる特性的なるものではない。それ故今日我々が數學と呼び、且つそれに於て生き、又これに何らかの哲學的反省を加へようとするものも亦、このギリシャ的數學であ

る。從つてもし、嘗てカントが嘆美した如く、(Kritik der reinen Vernunft, Vorrede zur 2. Aufl.) 諸體系の對立起伏常なき形而上學に比して、數學、自然科學が一路發展を續けたとしたならば、たとへ地理的位置を變へたにせよ、その方向に同一理念の下に展開した數學は、正當に、一樣に、ギリシャ數學と稱していゝわけである。從來の數學史の取扱ひ方は一般に事實上そうであつた。然し假令、「學」的理念に於ては略、同一であつても、それにも係らず、それの特殊な「數學的」理念に於て個性的差異が發見され得るのである。而してそれは發展の段階の差異でなく、發展の方向の差異である。換言すれば、この系統下の數學史は學的理念に關しては連續的であつても、數學的理念に關しては連續的ではない。我々がかくの如きことを問題とするのは單に歷史的な關心に基くものではなく、數學の哲學的反省の方法に對して重要なる意義を有するからである。

「數學」(Mathematik, Mathematics, Mathématique)なる言葉は、周知の如く本來教授又は研究の題目を意味する μάθημα に起原し、更に進んで特にそれの模範として算術、幾何學等の諸學問が μαθηματική と認められる樣になり、かくして終に μαθηματική が「數學」を意味するものとなつた。プラトン、アリストテレスの時代に於てゞある。[1] 算術、幾何學は

本來その目的、發生、性質、を殊にし、異れる學科として存立してゐた。今「數學」なる名稱の下に統一されるためには共通の徵表がなければならない。寧ろこの徵表の故に一個の「數學」が成り立ち得た。この數學の徵表の中にギリシャの數學の本質が存し、それによつて今日の數學のそれと區別せしめられるのである。近代數學の全的展開たる十九世紀數學の發展は殆ど見渡し難い程廣汎多岐な展開を遂げた。今日その凡ゆる分科に通曉することは殆ど不可能に庶幾く、且つ、これらの數學的全分科をその中の何らかの一分科に統一する企ての困難なることも Shaw の示した如くである。[2] 然し古代數學と近代數學との差違は共通の原理の上に立つところの單なる量的差別ではない。現代の數學はもはや「數學」ではない。しかし、それは單に數及び云々の領域の學といふ意味ではない。卽ち單にその領域の廣狹、擴大でなく、數學的原理或は方法の革新であり、從つて又、その本質の變化である。まことに、シュペングラアの奇書が道破した如く「各の文化は各固有の數學をもつ」。[3] シュペングラアの特殊な歷史哲學的前提をまつまでもなく、世界史は連續的な一系列の文化の歷史ではない。古代、中世、近世に於ける學問に類型的區別の存することは、今日の「學問的常識」に庶幾いであらう。輓近の嚴密な文獻學的研究はこれを明にする。歷史的所產た

る數學も亦、それの本來の對象の超歴史的たるに係らず、あくまで古代と近代とに於て連續的ではない。このことは勿論、古代數學と近代數學とが全然無緣であると言ふのではなく、固より近世數學と雖も古代のそれに由來する。それにも係らず近代數學は古代數學の延長的發展ではない。それ故我々が單に古今の數學に通じる一般的定義を求めることに滿足しない限り、そして具體的に現實に卽した數學の哲學的反省を試みようとする限り、先づ我々は數學を現代の相に於て、現代的特色に於て、把へねばならない。何が問題であるかは豫め與へられてはゐない。我々には先づ問題の導出が第一の問題である。然る後いかなる方法が要求されるかゞ問題となるであらう。

近代の哲學は數學に對していかなる問題を問題として來たか。科學批判としての哲學の業は固より科學的業績の進展と終始する。――カントに於て「批判」が哲學の根本課題となつた。否、哲學そのものに庶幾かつた。科學は哲學と分離獨立した。從つてカント以後數學者にして哲學者なる一デカルト、一ライプニッツは出現しない。惟ふにデカルトやライプニッツは偶然に數學者にして哲學者であつたのではない。かくして今や數學は――單に數學のみでなく、――專門化した。「科學」化した。(4)

他方に於て、哲學の中心的關心はカントの「批判」を一段落として彼以後精神科學に移つた。寧ろ哲學は精神の科學であつた。

しからばカントは數學に對していかなる問題を問題としたか。近世哲學は數學的自然科學を中心として展開して來た。「純粹理性批判」が全然自然科學の基礎付けに盡きるものではなくとも、これをその最も重要な課題としたことは否認され得ない。この中心問題となつたのはあくまで自然科學であつて數學ではない。(5) 數學は寧ろ傳統的に學問の模範であつて、批判或は反省の據り處となるものであつた。ヒュームの懷疑論も「數學」ではなく、唯だ數學の「應用性」に及んだ丈である。カントに於ても問題の中心は異る處ない。「唯だ自然科學に係はる限り」に於て數學の基礎が問題であつた。我々はかゝる事態を通してこれらの時代に於ては未だ「純粹數學」の理念が自覺されてゐなかつたことを理解する。勿論カントに於ても純粹數學は一種の理性認識であつて、經驗と獨立に純粹にアプリオリに成立つ。しかしかゝる純粹數學も經驗的認識の構成に與つて始めてその意味を有する。かゝる能作なきものは單なる Hirngespinst である。數學は唯だ「概念」を直接に「直觀」に於て darstellen する所の圖式化の形式である。(6) 從つて、カントに於ては未だかゝる特定

の見地を離れた徹底的自覺的な純粹數學ではない。端的に云ふならば、カントには幾何學の考察しか存しなかつた。謂はゞそれは猶ほ自然的數學であつた。

純粹數學の理念は正しく十九世紀の終り、或は今世紀の初めに於て始めて確立され、一般の學問的意識に齎らされた。公理論としての數學の構成がそれである。單に數學的諸分科の公理的方法による構成――これは必しも新らしくない――ではなく、數學そのものを公理論とする自覺は我々の時代に於て始めて確立した。「數學は自由である」（カントル）「數學は自由なる人間精神の創造である」（デテキント）ことが近代數學の標幟である。かゝる意味での純粹數學は固より凡ゆる自然的若しくは經驗的事態を離れて專ら純粹に可能性を原理として構成される故に、それは單に何らか事實的存在、況んや自然科學への適用性の見地から觀盡くされ、解釋し、理解され得るよりは遙に廣大な領域をもつ。それは凡ゆる可能的理論又は關係に係はるものである故に、何らか內容的なるものを有する理論又は事態は悉くその一特殊者であり、若しくは ein Exemplar である。それ故純粹數學はある何ものかに關する學ではあり得ないのであつて、從つて固より數の學ではあり得ないのである。

「今日の數學」は形式主義的 Axiomatik である。數學は形式主義的 Axiomatik になつた。數學は Axiomatik となることによつて以前の數學と區別される。寧ろ、數學は Axiomatik となることによつて獨立した。すべての今日の數學の基礎に對する考察はこの觀點よりされねばならぬ。それによつて始めて今日の數學の概念や方法の整合的把握が可能となる。

我々の第一の問題はこの Dogma の導出である。

勿論、今日の數學が公理主義であることは殆ど一般の常識に屬するでもあらう。然しかゝる承認にも係らず、その歸結に於ける全體的意義、又、一般に理論的科學に對する關係等々に對する省察、更にそれが數學の本質或は基礎の哲學的反省に對していかなる方法を要求すべきであるかは、必しも徹底的に自覺されてゐない。この自覺は現代の數學の考察にとつて絕對的に必要である。これなくしては、現代數學の成果に達し得ない。それ故この自覺に基く新らしい數理哲學の方法が要求されるのである。

既に早く、數學が數又は量の學として規定され得ないことは承認されてゐる。然しこのことは數學の領域が數に盡きず、「數及び何々の學」として單に擴張されたと考

へるべきでなく、數學の領域は質的に革新されたのである。數學は、今日に於ては、「何らか內容的なるもの」學ではない。逆說的に云へば、數學は何ものゝ學でもない。而も何ものゝ學でもあり得る學である。今日の數學に於ける事態がこうである。それを欲すると否とは個人的「嗜好」にすぎない。（勿論、現存の數學の諸部門の體系が實際に公理的に組成されてゐるか否かは問題でない。それは數學的技術の殘されたる——然し原理的には解決されたる——問題である。）

右の如き近代數學の理念はデカルト、ライプニッツによつて天才的に志向されてゐた。十九世紀以後その全容が凡ゆる組織を整へて現はれるに及んで、「純粹數學」は始めて組織的に反省される機會を得た。こゝにかゝる自覺に基く近代數學の再構成が試みられたのである。その折、それは先づ、「數學の論理化」、「數學の算術化」なる公式化をうけた。それは殊に「數學的論理學」、「代數學的論理學」等々に於て端的にその奇峭な面貌を示した。これらの公式化が正當なる、若くは、十全なる、或は少くとも適切なる公式化であつたかは別として、然し數學に對する哲學的論議は事實上かゝる形態に於ける事態に集注した。これらの論議の的は一般に「數」の概念、「數」の導出に集注してゐた。數學の基礎概念は純粹論理的に導出し得るか否かゞその中心問題で

あつた。二十年代に到つて、問題は更に深化され一般化された。ブラウアー・ヒルバァトの對立の下に代表される今日の數學基礎論に於ては、單に數概念ではなく、數學の方法が、數學の推論が、證明法が、問題の中心となる。更には論理學の原理そのものが問題とされる。曰く「中間不容律の否定」曰く„Beweistheorie"。問題は、論爭は、此處に尖銳化し、端的となる。所謂數學基礎論の危機となる。既に問題は從來の如く單に數の概念の基礎付けではない。近代數學そのものゝ根底的反省が要求される。從つて、我々は本來の問題を近代數學の全發展の流れから遊離せしめることなく、單に兩者の論理若しくは概念の整合性を是非するに止らず、常にその發生の——偶然的機會でなく——母胎の全體から考察せねばならない。(7) 思ふに今日の形態に於ける數學基礎論は近代數學の反省にとつて恐らく到るべくして到つた究極點である。これに對しては「近代數學」の本質的必然的發展の相の下に、全面的に考察されねばならない。個々の概念構成ではなく、特に近代的數學的思惟法の本質、特性の見地から考察されねばならない。何よりも新らしく近代數學の特性化を必要とする。そのためには、先づ我々は古代のそれとの對比に於て近代數學の歷史的特性を明確にして問題の所在を明にせねばならない。卽ち近代數學の方法はいかにして成立した

かゝいかなる意味に於てそれは公理論となるか、逆に公理論はいかなる本質を有するか、かゝる方法に基づく今日の數學の組織はいかなるものとなるか、を問ひ、これらの序論的問題に答へることによつて始めて我々の數理哲學の問題を導出することが出來るであらう。それによつて同時に又始めて數理哲學の新らしき方法が要求されることになるであらう。

然し我々は固より事實的歴史的な敍述を期するものではない。我々の問題はそれの歴史的事實にあるのではなく、その事實に於て顯はな問題をとりあげることである。態度をとる前に事態を明にすることである。豫めその方向を示すならば次の如きものになるであらう。

近代數學の發端は代數學的方法である。從つてその方向は形式的操作的となる。當然その理念は公理主義である。然しこの新公理主義は單に理論を外面的に公理的方法によつて組織するものでなく、絕對的に公理主義的である。從つてそれは純粹に形式主義となる。其の手續き方法は嚴密に云つて形式的な Operation に盡きる。かくの如き今日の數學は形式的操作的公理主義とならざるを得ない。かゝる數學はもはや何らの意味に於ても自然的ではない。我々は同時に、數學がそれ自身に於

ては純粹に形式的可能的な普遍的關係理論に止まる所の純粹に觀念論的な意義をしか有し得ないことを承認せねばならない。この方向を、中途にして何らか直觀的制限を加へず、徹底せしめた後に始めて、今日の數學の分岐と統一性とを理解することが出來る。此處に始めて我々の哲學的反省の對象が einklammern されるのである。

既に問題が分明すると云ふことは同時にそれを解く方法が豫料されることを意味する。所謂數學の危機がいかにして危機であり得るか。それの諸方法は今日の方法としていかなる動機と權限とを有するか。[8] かくの如き問題の分析を通じて我々は數學的存在の眞の意味に觸れるであらう。

さて從來の、乃至、自覺的でない近代數學は自然的數學である。かゝる數學も、勿論數學として、先驗性を有する、然しそれの概念構成に於て、或は根本理念に於て何らかの Realismus を含んでゐる。何らかの意味に於て、現實的存在の、或は、少くともそれの原型の、從つて不可避的に模寫的な、但し、感性的ならざる、知的構成の意向が存する。その意味に於てそれは幾何學である。それ故「純粹數學」若しくは公理主義の成立は、數學上の Idealismus の確立を意味する。然しこの新數學の特性化、又は公式化に當つて、それは惡しき意味に於ける Idealismus に解せられ得た。實在性を有しない形式的

記號遊戯とすら誤り稱せられる事態が生じ得た。(9)「それを拔くことは出來ない、然し避けて通れる要塞」になつた。それ故 Symbolic Logic や Algebraic Logic の重要な勞作も哲學者達から尊敬を享けるに到らなかつた。然し自然的數學より解放されたる純粹數學或は公理主義的數學は直に一義的に惡しき意味に於ける形式主義、Idealismus に盡くされるものではない。寧ろ眞の意味に於ける「自然の數學」ならざる「精神の數學」として新らしき面目を發揮し得るのである。更に或は數學的精神の辯證法が認められ得るでもあらう。此處に始めて眞の意味に於ける哲學的問題が成立するのである。

〔註〕

（1） Heath, History of Greek Mathematics I. p. 10 f.
詳しくは Platon, Politeia VI 505 A に到つて始めてその教育觀より、幾何學、算術、音樂、天文學が優越的な位置に置かれた結果、專らこれらの學問が μαθήματα と稱せられる習慣を造つたと云ふ。

（2） J. B. Shaw, Lectures on the Philosophy of Mathematics 1918.

（3） O. Spengler, Untergang des Abendlandes I. S. 81 ff.

（4） 古代に於てもプラトン以前の事情はこれと相似である。數學が特殊科學化したのはアカデミイに於てである。 J. Burnet, Platonism, Chap. VII 參照。

（5） 「純粹理性批判」に於ける「純粹悟性の根本原理」が「自然」の構成原理であり、而してこの原理論がこの批判書の積極的側面の

最高の目標であることを想起すべきである。

(6) 例へば、Kritik der reinen Vernunft 2. Aufl. S. 147, S. 179 ff. S. 742 ff. これらの問題は、後章に於て立ち入つた考察がなされるであらう。

(7) 今日、數學の基礎論として數學者の立場からするものは、(I)形式主義者（Hilbert, Bernays, von Neumann）(II)直觀主義者（Brouwer, Weyl, Heyting）(III)數學的論理主義者（Russell, Carnap, Ramsey）によつて略々代表されてゐる。然し正直に云つて既にその論爭は技術家的なるものに近い。

(8) 公理的方法そのもの、內在的な問題、例へば公理體系の非矛盾性、完結性等の問題から、公理主義が哲學であり得るかの問題に觸れる。公理主義が單に數學の方法として自己を主張する以外に、自ら數學の哲學とならうとする點に、公理主義の種々なる難問が成立する。然し又其處にそれの特色が存する。これに付いては後章を參照。

(9) 例へばラッセルは戯れに云ふ。
"Mathematics is the science *in* which one never knows what one is talking about nor whether what one says is true."

I　數學的思惟の二類型(古典的と近代的)

今我々が問題とする公理主義は所謂數學の基礎論の一立場としての公理主義(云ふまでもなくダヴィト・ヒルバアトを代表とする)でなく、近代數學の傾向としての公理主義である。

本來の意味に於て公理主義Axiomatikとは、若干の定義と公理とより、一つの理論體系を演繹的に構成する學問的方法である。かゝる方法は、事實上、それぞれの學問領

域に於てそれの業績がある程度まで成熟し、又累積された後に始めて、之を組織し、體系付ける意圖の下に實現、具現される。その意味に於てユウクリッドの『ストイケイア』に於ける公理主義もかくの如き事情の下に成立し得た。ヒルバアトの放膽なプログラムは(1)かゝる公理的方法が理論科學一般の方法たるべきことを宣言する。然し今、我々の當面の問題はかくの如き一般的科學的方法としての公理主義でなく、數學に於ける公理主義、或は數學の方法としてのそれである。然し、我々の公理主義が古代のそれと異ることが我々の出發點である。それ故、我々の問題は先づ、此の事情の成立を明にすることである。それは同時に、何故に今日の數學が公理主義たらざるべからざるかを理解せしめ得るであらう。然しこゝに述べやうとすることは、ロバチエフスキイ、ボリアイ等の所謂非ユウクリッド幾何學の發見等による偶然的歴史的な事實的成立の經路でなく、近代數學的思惟の本質的成立の過程である。

近代數學はデカルトに始まる。宛かも近代の哲學に於けるが如くである。否、寧ろ哲學と數學とは不可離的であつたのである。デカルトが近世哲學の開拓者と稱せられるには理由がある。のみならずそれは數學の方法に對しても亦重要である。

近世哲學の成立に新興の科學が重要な動機を與へてゐることは何人も認めざるを得ない事實である。それの豐富な業績を實證した自然科學の方法に對する反省がカントに到る迄の殆ど總ての哲學者の中心的關心であつた事はデカルトからカントに到る代表的哲學者の主著の標題を想起する丈で充分である。これと關聯して同時に「意識」の問題が中心となる。言ふまでもなく「精神」なる概念が「意識」若くは意識する「自我」として規定される樣になつたのは、アウグスチンに初るとしても、眞に具體的に行はれて來たのは近代に於てゞある。アリストテレスに於ける「精神」の概念規定は全然斯くの如きものでなく、よく知られてゐる如く、精神と物體との對立は單に有機的自然と無機的自然とのそれであつた。プラトンの「イデア」が近代のideaと、「觀念」と、如何に本質的に異るかを想ふべきである。而して今や精神の概念が右の如く新らしく規定されると共に、精神と物體との對立は意識の內と外とのそれになる。この問題が、方法の問題と結合して、思惟し、意識する自我が、いかにして意識の外にある世界を認識し得るか、いかにして外界の意識を有し得るか、の問題とならねばならぬ。この問題を始めて明瞭に定式化した所に先驅者としてデカルトが認められなければならぬ。而してその場合デカルトによつて、又デカルト以後カントに到るま

で一貫して方法の模範とされたものは言ふまでもなく數學、殊に所謂「幾何學的方法」である。それ故先づ問題は其處に意味された數學、殊に幾何學の方法と、同時に又精神の新らしき規定と共に數學的認識の本性の享ける變革である。

さて我々が、かく唱導されて來た彼等の所謂幾何學的方法を吟味する場合、我々はこの方法が特にいいいいいいい幾何學的と呼ばるべき理由を見出し得ないのである。我々は其處に正さしく、近代の幾何學、一般に、近代の數學が古代のそれと根本的に異る原理的傾向を發見する端緒を得るのである。即ち此處に所謂幾何學的方法は單に嚴密な定義と公理とより出發する論理的演繹的方法を意味するものであるが、かゝる構成的組織が事實上、從來唯だ幾何學に於てのみ存在した故に、その方法を幾何學的と稱せられたといふ外に何ら意味を有しないのである。代數的或は解析的方法に對立せしめらるべき意味での幾何學的方法の意味を發見し得ない。寧ろ本質的には、非幾何學的とも言ふべきものである。スピノザの「倫理學」に於ける所謂幾何學的方法がいかなるものであるかは言ふまでもないであらう。かやうに所謂「幾何學的方法」が幾何學的と言ひ能はぬ處に近代數學が成立するのである。

ギリシャに於て、數學の諸分科は渾一的であつた。而してそれは幾何學的であつ

た。勿論、ギリシャに於ても純粋數學は算術學、幾何學、音樂學、天文學の諸分科に分たれ、所謂高等數學も代數學も存在したことは事實である。然し、次に明にする如く、これらの算術學、代數學も凡て幾何學的なる算術であり、代數であつた。[2]換言すればギリシャに於ける數學は、或は數學的思惟は、總じて幾何學的であつた。本質的に幾何學と區別せらるべき算術學も、況や代數學も存在しない。中世紀及びルネサンスを經て初めて代數學が成立した。これは例へばピカールの如く、[3]ギリシャに於て渾一的であつた數學が諸分科に分岐し、獨立したと考ふべきでない。一般に幾何學的に歸し得ない思惟法が成立したことを意味する。

ギリシャ數學は、更に、自覺的でない近代數學も亦「數」及び「空間」の學に外ならない。周知の傳説によれば、埃及の測地術から幾何學が、フエニキヤの計算術から算術學が、術から學がギリシャ人によつて建設された。而してピユタゴラス派によつて算術學と幾何學とは（バビロニヤ傳來の）比例論を媒介にして結合された。こゝに始めてギリシャ數學の組織が初まつた。而して比例論は彼らに於ては本來幾何學に屬してゐた。[4]算術學（寧ろ數論）と幾何學とが統一され、而してかゝる統一態としての「數學」が幾何學的性質を帶る處にそのギリシャ的特色がある。換言すれば、「數」と「形態」と

の完全な對應、同一化の要求に於てギリシャ數學の礎石たるピュタゴラス派的數學が成立した。數は形相であつた。少くとも形相的であつた。特にギリシャ的數學的思惟の特性としてギリシャには本來の數字が存しなかつたことを記憶せねばならぬ。數は一定の形態を有する點の集合によつて表はされた。[5] 更にその數の中には零がなく、負數がなく、分數がない。況や$\sqrt{2}$の如きものは正さしくirrationalであつた。結局正の整數以外に數は存しなかつた。ピュタゴラス派の數學的思辨は決してMystik ではない。——彼らの數學的思惟は全然「表象的」—— 充實されたる表象的 ——具象的であつて、「概念的」ではない。

ピュタゴラス派の思想を繰り返す迄もないが、[6] 彼らに於て數の要素、從つて又、物の要素は限(πέρας)と無限(ἄπειρον)であり、數はこの兩對立者の調和である。これに基いて更に奇數と偶數、一と多の對立がある。「我々が認識し得るものは凡て數をもつ。而して何ものも數なくしては思惟されず、認識されない」。これらの思想はその字句の象徴的單純さの故に、種々の解釋の可能性を含で居り、我々を、近代人である我々を、近代風に解釋せしめやうとする誘惑を含んでゐる。少くとも近代的解釋の可能性はある。この思想の直接の後繼者であり發展者であつたプラトンの後期の思想に

新カント派的解釋が試みられてゐることは周知のことである。例へば、右のピュタゴラス派の限と無限、一と多との對立がプラトンでは「一者」と「大・小の對」又は「不定的二者」(ἀόριστος δυάς) の對立に[7]置換へられてゐるのに對して、早速カントの「多樣」の「統一」が結びつけられる。[8] 然し固より、近代的に「改釋」し得ることゝ近代的であることゝは別である。マールブルク派のプラトンに對する深い解釋も重要な價値を有することは云ふまでもない、然し歴史的なプラトンの解釋としては、最近の文献學者達のこれに對する攻撃には正當な理由があるであらう。[9] ピュタゴラス派に於ては數は確かに figures (εἴδη; σχήματα) であつて、算術的和ではない。[10] 勿論これは primitive である。然しこれらの事柄を一般的に思惟の原始性、素朴性のみに歸せしめ得ない。本質的にはプラトン、アリストテレス、更にギリシャ數學の組織の完成者たるエウクリッドに到つても事態は同一であつたからである。エウクリッドは數を點で表はす代りに直線を以てした丈である。數學史家の言ふ如くギリシャ數學に於ては幾何學と算術學とを區別し得ないのである。又この事柄を單に彼等の記號法に歸せしめることも不可能である。彼等の記號法が彼等をして斯く思惟せしめたのではなく、彼等の思惟法がこれを結果したのである。我々は我々の精神とそれを表現する記號と

の關係を餘りに任意的に考へてはならない。記號も精神の一つの表現である。數を形相に於て思惟する彼等の方法から、當然、零、負數等々を表現——思惟し得ないのである。然し斯樣に數を形相或は形相的に解することは一ピュタゴラス派乃至その影響下にあるプラトンの特殊な思想でなく、全ギリシヤ的な特性である。[11] 然し斯樣に數を形態に於て思惟することは、數を感性的形態そのものと解したのでないことは言ふ迄もない。模像と記號とは區別される。初期のピュタゴラス派に於て「物は數である」と云はれたにせよ、既に後期のピュタゴラス派に於ては「數の如きもの」であり、(Burnet, Greek Philosophy from Thales to Platon, Part I. p. 89) プラトンに於ては「數はイデア」なのである。然しかく數の概念が純化されてゆくことは、必しも近代の論理主義者の意味での擴張、論理化、ではない。このことは重要である。數が純粹形相と見られることは直に之を純粹論理的概念的に見たことを意味しない。彼等の思惟は全然「表象的具象的」であつて、概念的ではない。[12]

右の如き立場にある數學觀が直に遭遇すべき難問は所謂「通約し難き量」の問題の發見である。而してこれはかくの如き數學觀に於てのみ成立する難問である。これがギリシヤの學界に及ぼした深甚な波紋は想像に難くない。正さしく「ギリシヤ

數學の危機」に相違なかつた。ゼエノンの逆說がこの問題に關聯してゐることは既に屢〻哲學史家の注意してゐる處である。プラトンの深き關心も理由があつたのである。この危機はプラトン學徒に屬する數學者Eudoxos(408—355)によつて一應ギリシャ的解釋を得た。[13] 近代的に見れば、數概念の擴張の絕好の機會であるに係らず、彼等はやはり整數の立場に留り、之を整數の比に於て解した。プラトンのイデア＝數論の晦澁な概念"ἀόριστος δυάς"が實は近代のカントルの如き無理數の展開を意味するといふA. E. Taylorの解釋も文献學的には不備であると稱せられる。[14] 結局ギリシャ的思惟の制限に外ならない。ギリシャ人に於ては——プラトン、アリストテレスに於ける數に對する解釋の對立に係らず——すべて常に、數は、近代の例へばデデキントに於て明瞭に自覺されてゐた如く、「人間精神の自由なる創造」(Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? 1887 Vorwart)ではない。デデキントに於ては「自然數」すら自然的ではない。少くともその志向に於てはそうであつた。これは勿論一デデキントの個人觀ではない。それに反してギリシャに於ては思惟は、常に存在の思惟であつて、單に思惟されることによつて有る所のものゝ思惟ではない。かゝる思想は單にパルメニデスのみの思想でなく、我々はプラトン、アリストテレスに於ても隨所に之を

認め得るであらう。思惟は存存者の(非感性的なる)謂はゞ模寫である。ギリシャ哲學に於て存在は常に「觀」られたるもの、表象的なるものであつて、概念的ではない。ギリシャ人の數學的思惟に於ても同一である。彼等は無理數を創造しなかつたばかりではなく、有理數をすら導入しなかつた。[15] 即ち彼等は分數をも導入しなかつた。それ故、アリストテレスに於て、數は Minimum を有するが Maximum は有しない (Physica 204 a b) のである。我々が $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ と書く所を彼等は 6:9=2:3 の比例 (ἀναλογία 或は λόγος) を書いた。それ故、ギリシャ數學に於いては比例論は、先づ、我々の分數の計算に代るものであつた。(ユウクリッド、〝ストイケイア〟VII—IX を參照[16])。

「比例」の概念はギリシャ數學に於て重要な任務と意義とを有する。即ち、彼等に於ては、更に、比例は算術、幾何學、力學等を結合する媒介であつた。我々の場合には、數(整數及びその擴張として分數、小數、無限小數)がそれである。即ち我々は數の概念を擴張することによつて、凡るものを「計量」し、それによつて全自然を量化し支配する。例へば凡ゆる距離や平面や立體等の幾何學的量は「數」に轉化され、任意の操作をうける。それに反してギリシャに於てはその基礎的數學觀に規定されて、斯く數を擴張する代りに、幾何學、力學等々から抽象によつて λόγος の概念を獲、これを以て我々が數や

方程式に於て表現するものを處理する。それ故我々の數概念の基體に當るものは、彼等に於ては一般的な量 (μεγέθη) でなく、二つの μεγέθη の λόγοι である。(Vgl. Toeplitz a. a. O. S. 8 f.) プラトン及びそのアカデミーはこれの遂行を企てたのである。それ故、屢ゞプラトンの數學論に對して稱せられる「數學の算術化」は實は近代に於ける意味のものではないのである。眞の意味に於ける算術化は十九世紀末を以て始めて實現され得、又、され得たのである。

右の如き事態は蓋し一般的にギリシャ人に於ては、自然數のみが思惟の凡ゆる肆意から獨立なる存在を有したことに基く。我々は此處にギリシャ的な數學的思惟の特性を認める。ギリシャ數學は例へその數學的分科として算術、幾何學その他諸種のものが數へられたとしても、あくまでそれは渾一的な幾何學であつた。彼等に於て Arithmetike は Logistike と區別せしめられ、前者は近代に於ける如き算法でなく、而してそれに當る後者は純粹數學から除外された。[17] 我々は今やその意味を了解し得るであらう。

ギリシャ數學の組織的綜合たるエウクリッドの「ストイケイア」[18]に於てもそれは、徹頭徹尾「幾何學的構成」である。その構成原理となるものはあくまで直觀的表象的な

形象の構成である。直線と圓とよりの構成を所謂 Postulat として、その上に展開された組織である。その中に現はれて來る「算術」(Book VII—IX)も實は幾何學的な比例論にすぎない。ギリシャ數學の對象は常に必ず具體的表象的であつた。その意味に於てあくまで直觀主義的であつた。任意の數、內容の全然不定な或物 x を取扱ふ如き方法は到底存在し得なかつた。從て彼らに於ては數學は終に "syncopated Mathematics" であつた。かゝる方法とは異り、全然形式的な symbolic Mathematics は近代に於て成立し、又、近代數學の特色をなすものである。この方向轉換乃至革新を實現する先驅がデカルトの "Geometrie" (一六三七年)に外ならぬ。この書が幾何學と呼ばれる理由は恐らく傳承的習慣に止る。

近代數學は——自覺的な近代數學はデカルトに始まる。彼の「幾何學」はその明白な標幟である。近代の數學が古代のそれと明確に區別される原理的乃至方法的相違が此處に確立されてゐる。數學的思惟はこゝに幾何學的より代數學的になつた。これは數學的方法の革新である。[19]

(註)

1 Hilbert, Axiomatisches Denken (Mathematische Annalen Bd. 78, 1918) ヒルバアトは生れ乍らの公理主義者である。千

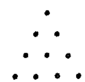
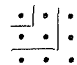
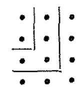
九百年パリに於ける講演『數學的問題』は全數學領域に亙る基本問題を掲げこれを公理主義的に解決せんとする大膽な企圖を宣言した。而してこのプログラムは實際に爾後今日に到る三十年間の數學の發展の中に現に豐富な實現を見た。L. Bieberbach, Über den Einfluss von Hilberts Pariser Vortrag über „Mathematische Probleme“ auf die Entwicklung der Mathematik in den letzten dreissig Jahren („Naturwissenschaft" Jahrgang 18. Heft 47–49. 1930) を參照。

2 Zenthen, Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter S. 37 ff.

3 Picard, Das Wissen der Mathematik und Naturwissenschaft der Gegenwart, deutsch von Lindemann S. 14 f.

4 G. T. Allmann, Greek Geometry from Thales to Euclid. chap. II.

5 例へば、一は點、二は線、三は三角形、四は四面體、更に整數の和は三角形を、奇數の和は正方形、偶數の和は長方形を表はす。

1+2+3+4= 　1+3+5= 　2+4+6= 

6 J. Burnet, Early Greek Philosophy, Chap. VII. を參照。

7 Aristotle, Metaphysica, A. 987b, M. 1081a etc.

8 例へば A. E. Taylor, Plato. 1922. p. 68.

9 例へば J. Stenzel, Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles, 猶は、Leisegang, Platondeutung der Gegenwart を參照。

10 このことは Eurytos, Aristoteles, Speussipos 等によつて保證されてゐると云ふ。Robin, Greek Thoughts. p. 57 ff.

11 Stenzel, Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles S. 23 ff.

12 西田博士「ギリシヤ哲學に於ける有るもの」（岩波講座世界思潮第三册）

13 H. Hasse u. H. Scholz; Die Grundlagenkrisis der Griechischen Mathematik を參照。

14 A. E. Taylor, Forms and Numbers, a Study in Platonic Metaphysics, "Mind" vol. 140—141.

O. Toeplitz, Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Plato. 1929.
猶ほこの問題に對する詳細な考察は別の機會に讓る。

15 彼らが有理數を自覺的に無視した明白な論據としてプラトン Politeia, 525 D. E が引用されてゐる。
Vgl. H. Scholz, Warum haben die Griechen die Irrationalzahlen nicht aufgebaut? 上揭の Hasse. u. Scholz. S. 65 f.

16 「比例」の概念がギリシヤ數學に於て重要な任務と意義とを有することは注意さるべきことである。上揭の Toeplitz の論文及び J. Stenzel, Zur Theorie des Logos bei Aristoteles を參照。(何れも Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abteilung B. Bd. I. Hf. I.)

17 この區別はギリシヤ數學に於て基本的である。 Heath, History of Greek Mathematics I. p. 14 を參照。

18 アリストテレスの analytica posteriora が數學の證明論を志向するものであることは注意されていゝであらう。 (Vgl. H. Scholz, Die Axiomatik der Alten, Blätter für Deutsche Philosophie 4. Bd. 1930) プラトン、アリストテレスとエウクリッドとの間に連續した關聯のあることは看却されてはならない。プラトニスムスとアリストテリスムスとを對立せしめる要求からその兩者の根柢に存するギリシヤ的共通相を見落してはならない。のみならず、單なる數學者ではなく、彼等は哲學者であつたのである。エウクリッドも彼自身の確信によればプラトニケルであつたと云ふ (Proclus)。 猶ほエウクリッドとアリストテレスの論理學との密接な關係については、
Heiberg, Mathematisches zu Aristoteles (Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften Heft 18.) を參照。

19 ギリシヤに於ける自然科學の概念構成も上述の如き數學の場合と平行してゐる。この方面の文獻學的研究として、
B. Snell, Zur naturwissenschaftlichen Begriffsbildung im Griechischen (Philosophischer Anzeiger, 3. Jahrgang. 1928) を參照。

II　近代數學の成立

デカルトが近代數學の開拓者である理由は單に傳承的幾何學以外に解析幾何學なる一新分科を建設したからではない。[1] それが實は解析幾何學ではなく、幾何學の代數化、幾何學よりの獨立——より積極的に云へば、新らしき數學としての代數學であつた點にこそ存する。勿論この代數學は幾何學と並び存する一分科でなく、幾何學に代る代數學——幾何學に代て全數學を代表する代數學である。こゝにこそ正しき意味に於て近代數學の成立が實現したのである。然しこのことはデカルトがこの新數學を完成したといふ意味ではない。勿論それは全近代を通じての數學的勞作に依らねばならないが、唯だデカルトに於てこの新數學の——代數學の方法が開かれたのである。やがてライプニッツに到つて確立さるべき "Arithmetismus" 又は "Algebraismus"——具象的直觀的なるものゝ「幾何學」から獨立して、單に抽象的形式的な內容の無規定的な「或るもの」の操作の上に立つ「代數學」への路が此處に開かれたのである。線や點ではなく、xやyが取扱はれる。未だ知られざる、求められたるものを無造作にxとし、これの函數關係を方程式として形成し、それを機械的形式的な Operation によつて解く。[2] 勿論代數的方法の成立は古代數學の否定を意味するものではない。寧ろこれを——勿論その意義を變じてゞはあるが——特殊の場合とし

て構成するより普遍的な、より包括的な數學となつた。これをなさしめ得たものは然し單なるギリシャ的方法の擴張ではなく、方法的革新である。外見上、數學の一分科の「發見」であり、從つて從來の分科は依然として存立し、全數學の面貌は變化しない如くであるが、然し、數學は此處に「本質的變革」を蒙てゐるのである。新數學組織が此處に誕生したのである。これを果し得、又果し得たものは云ふまでもなく、その「方法」にある。それ故デカルトの解析幾何學の意義は單に通常考へられてゐる如く、單に算術と幾何學との結合、若しくは幾何學への代數の適用等々に止るものではない。それはもはや解析幾何學ではない。幾何學を特殊な一例として自己の中に含む形式化された普遍的數學である。從つて、それは具象性、表象性、直觀性を離れて、形式的機械的に處理され得るのである。その意味に於て代數的、或は、代數學なのである。デカルトの新數學はこの展望を含む。數學は此處に特殊な一科學たる域を離れて Mathesis Universalis を志向する。デカルトが實際にこれを企圖したのは偶然でない(3)。固よりこれを自覺的に遂行したのはライプニッツではある。ライプニッツに於て始めて、數學は Algebra Universalis となつた。彼の數學觀もかくして決して唐突的のものではない。そして現代に到るまで、近代數學の發展は疑ひもなくこの方向に進

んで來た。唯だ數學者の問題或は勞作が益〻特殊的分岐的となつて全體の統一、概括が益〻困難となつたのにすぎない。その全般的業績に於てこの傾向は顯著なる事實である。今、我々はこれらの近代數學の全分科に亙る近代的發展の跡を辿ることは出來ないが、然しその展望は我々の課題に於て重要である。それ故その概觀を顧慮して置かねばならぬ。(4)

代數學は周知の如く、本、アラビアに於て、印度の計算術とギリシャ數學とが結合することによつて成立した。(5) 中世紀より文藝復興期に於てこれをギリシャ的な學的理論に組織することが企てられたが、終にデカルト、ライプニッツによつてギリシャ的な桎梏制限を脫して、之とは獨立な新らしき數學的方法として確立されたのである。既に明である如く、代數學は本來、計算術であつて、迅速、正確、機械的に操作することを特色とするものであつた。從て、凡て便宜的な略號を使用し、すべて計算を一定の規則に歸せしめる。算術の計算はある數を一定の法則に從て結合することに外ならない故に、右の如き代數學の方法は算術の一般化、形式化に外ならぬ。即ち特定の數を演算してこれに一定の値を與へる前に、操作の種々な可能的結合、變換を形式的先驗的に研究することである。それ故、代數學は、特定の個別的な數ではなく、それ

を一般化し抽象化した質的に無規定な記號を「數」として、かゝる式の可能的な結合·變換の全體を考察する。個々の形象や概念の分析でなく、專ら自由な操作の展開を方法とする。結合、變換の要素のすべての個々の意味內容を無視し、專ら形式そのものを全體として、任意にそれの個々の部分を樣々に結合變換するのである故にその操作は機械的である。代數學はもとより單に方程式より未知數を導き出すといふ如き狹き意味に制限されない。代數學は專ら操作の立場である。近代數學は既に此處に、それが「數の學」でない所以は明である。かくして近代數學の誇りとして、特に重要な中心的役目を演じる「解析學」も結局この「代數學」—— 形式的記號的機械的操作の數學の所產に外ならぬ。ブウトルウの硏究によれば (Das Wissenschaftsideal der Mathematiker II. 3.) Analysis なる言葉は十七世紀に於ては硏究方法 —— 敎示又は敍述の方法としての Synthesis に對する —— を意味するに過ぎず、その世紀の終り頃になつて全然一般に使用せられ、殊にニュウトンは「數を計算する算術」に「文字を計算する解析」を對立せしめた。卽ち代數學と解析學とが同義に使用された。ニュウトン·ライプニッツによる微積分學の建設は單に代數學の擴張と認められ「無限者の代數學」を意味した。代數學の領域の擴張といふ以外に事實上、何ら革命的と云ふべき新しき方

法は現はれてゐないのである。更に級數論の發展が函數論の一般的研究を可能ならしめた。然し事態に於ては同一である。――本來、代數學は量を表はす文字記號を既知の操作によつて結合する方法である。而してその操作は原理上、任意に規定し得るのである。それ故、初期の代數學に於ける如く、その操作を單に算術の操作(四則、整數の乘冪及び開法)に制限するを要せず、この制限を越えることによつて一般に任意の函數が得られるであらう。又、所謂非代數的(超越的)函數も、任意の收斂的代數的に現はすことを得るのである。函數は結局、操作の結合の所產である。尤も、形相的彫塑的なるものを偏好したギリシャ思想に於て貶逐された Unendliches が正面より取扱はれる所に近代の特色があり、同時に其處に重大な問題を藏してゐるのである。無限は常に危機を孕む。

近代の幾何學に就いては、既にその新幾何學たる解析幾何學が近世に於て成立し、又成立し得たことを明にした。解析幾何學の成立し得るためには數の概念が整數を越えて分數、無理數まで擴張されねばならなかつたからである。それはギリシャ的數學的思惟に於ては不可能であつた。然し解析幾何學は結局、幾何學の問題を代數に還元することである。その限りに於て我々は解析幾何學の成立に於て新數學

觀乃至新數學的方法の成立を見出したのであつたが、然しそのことは本來の幾何學の消滅を意味するものではない。事實上、又、近代に於ける幾何學の發展は極めて目覺ましいものであつたことは周知の如くである。例へばエウクリッドの幾何學は唯だ凡ゆる相似的變換(ähnliche Abbildung)に於ても常に不變なる空間的形象の性質を考究するものであつて、例へばその幾何學に於ては矩形は空間の何處に於て思惟されやうとも、又、いかなる大さに於て表象されやうとも、それらに係りなき矩形の幾何學的性質を考察するがこれらに對して近代に於てはかゝる所謂 äquiforme Geometrie に止らず、平行性に於ける不變的性質を考察する affine Geometrie、射影性に於ける不變的性質を考察する projektive Geometrie の成立を見た。これらの雜多な諸幾何學的研究はフェリックス・クラインの天才的洞察によつて「群」(Gruppe)の思想によつて完全に統一され得た。卽ち從來の凡ゆる幾何學は或る一定の變換に關して不變なる空間的形象の根本性質の考察であつて、各の幾何學を區別せしめ、特性付けるものは、この特殊な變換群(Transformationsgruppe)であることが理解された。幾何學はこゝに變換群に於ける不變式論として完全に規定されることゝなる。[6] 言ふまでもなく、群論は本來、代數學的領域に屬するものである。本來解析幾何學に對して綜合幾何學と

云はれる純粹幾何學の理念が凡ゆる量的性質を放下した質的性質の考察にあるとしても、結局それは何らかの變換に關して不變的なるものゝ考察である。それを代數學的方法の原理に歸屬せしめることは決して數量化することではない。

「群」の概念は確に「十九世紀代數學の最も特性的な」概念である。群の概念は本、代數方程式の根の問題に關する置換（Substitution）の群の考察から發し、代數學、函數論、幾何學等を群論的に處理することによつて極めて重要な貢獻をなしたが、殊に「群」が數學の基礎概念として主要なのは、この概念が極めて異つた諸領域間の關係を明白にし秩序付けるに役立つことである。(7) もともと置換の概念が算術の中にとり入れられることによつて、算術は單に數の理論たるに止らずKombinatorikとなる。かやうな置換の群の研究から一般的な操作の群の概念、從て又別個の群論なる一分科が成立した。而して群論の成立は從來の諸分科に對して一新分科が加つたと云ふ事に止らないのである。「群」の詳細な規定は後章に於て述べる機會がある。(8) 一般的に云つて「群」とは、一義的な操作の領域であつて、その操作の結合も亦更にこの領域に屬する如きものを言ふ。宛も自然數列の形成の場合、第一の要素を規定し、これから新らしい要素を生産する操作を定立すれば、自然數の全領域が決定され、その凡ゆる要素の

結合が更に新らしき數を規定し、それ自身又この自然數領域に屬する如く、群論はこの思想を更に嚴密に更に一般化せるものに外ならぬ。操作自身が要素となり、要素と操作との二元性が止揚されるのである。[8] 從つて群は、自己自身に於て完結した操作領域である。それ故、一般に、數學の凡ゆる操作的分科は群論の一分科と見なすことが出來る。全數學は單なる數に止らず關係や操作に關する代數學である。それ故「數學の算術化」なる前代の標語は、寧ろ「數學の代數化」に置換せらるべきであつた。固より現代の數學が悉く群論から導出されると云ふことは出來ない。然し我々の力說する處は群論が代表する數學的思惟法の特色、群論的傾向の土台となる普遍的な數學觀――代數的方法が、現代の數學を支配する基調であると云ふことである。

上述の行論は簡に失して勿論極めて多くの問題が顧慮されてゐないであらう。然し我々の問題は唯だ一般的方向を指示するにある故、それらの詳細な論證には別の機會があるであらう。

かくして近代數學は成立した。新數學の志向する所を綜合すれば(一)古典數學が幾何學的であつたのに對して、これは代數學的である。幾何學又は代數學を數學の

一特殊分科と考へるべきでない。それは單に數學的操作の方法の名前である。でなければ兩者を共に數學の下に統一する意味はない。近代數學は代數的方法を方法とすることによつて、形式的操作的となる。同時にそれによつて近代數學の對象は、純粹形式的な、その意味に於て又無內容な可能的世界となる。かゝる領域に於て始めて機械的操作が可能となるからである。(二)從つてその出發點は、エウクリッドに於ける如く、單に點と直線とよりの構成と云ふ如き制限を有せず、一般的な形式的措定を以て始まる純粹關係論となる。單なる數や單なる幾何學的形象を對象とし ない故にそれは純粹に抽象的な「或物」及びその形式的關係のみが對象となり、內容となる。カッシラアの所謂「實體的なるものより函數的なるものへ」の轉化である。[9](三)從つてこれを取扱ふに當つて、通常の意味での直觀や經驗的歸納は全然關與し得ない。それを制約するものは專ら論理的可能性のみである。かくして數學は自由となる。(四)かくして近代數學は、單に空間若しくは數等々の特殊的科學でなく、普遍的學問であることゝなる。

我々は右によつて略、近代數學の志向する特色を盡くし得たと思ふ。而して現に近代數學の今日に到るまでの發展はその理念の下に展開されて來た。我々は個々

の歴史的事實に就いて改めてこれを擧示するを要しないであらう。近代數學の今日に於ける成果が最もよくこれを立證してゐるからである。それ故、我々の次の問題は、この近代數學の方法がいかにして公理學を成立せしめるかである。換言すれば、代數學的方法がいかにして公理學となるかである。

既に上述の特性記述によつて、近代數學が、公理論的であることは豫め明である。けだし公理論或は公理的方法とは、一定の少數の根本原理(公理)より論理的演繹的に一定の學問の組織的理論を導出する方法である。それは一定領域及び方法の明確な確立、限定を意圖する。この方法の實際の遂行として歷史的に古典的なるものは言ふまでもなくエウクリッドの『ストイケイア』である。これはピュタゴラス學徒によつて確立され、エウドクソス、テアイテトス等によつて發展せしめられたギリシャ數學の公理的方法による組織である。然しこれは幾何學の公理的方法による組織に過ぎないのであつて、未だそれ自身公理論ではない。周知の如くエウクリッドの組織に於ては冐頭に基本概念の定義が置かれるが、その定義はそれに續く演繹體系の組織に織込まれてゐない。單に概念の內容の說明に止る。換言すれば、この組織は猶ほ一定の具體的の內容を前提し、含有してゐる。從てそれの內容或は對象は

一定の制限をもち、具象的形象(幾何學、乃至幾何學的算術)の數學であつて、普遍的な純粹形式的な公理論ではない。加之それには「公準」として、直線及び圓の構成のみを許された操作とする制限を持つ。

それ故、ギリシャに於ける數學＝幾何學、及び未だ自覺的でない近代數學もその表象的本質の故に、眞の意味に於ける公理主義ではない。古典數學が近代數學の劈頭に於て、先づ一般化され、形式化され、機械化され、操作化されるに到つて始めて公理主義的となり得、公理主義的に徹底され得た。それ故、數學は形式化されることによつて公理學への通路を得た。而して、數學の一分科としての代數學でなく、代數學の方法がこの形式化に貢獻した。

既に述べた如く、代數學の本來の動機、或は、特色は、唯だ操作の自由、機械性、捷速、にあつた。そのためには數觀念や數推理の擴張を必要とし、特にギリシャ的數概念の制限の撤廢が根本條件であつた。本來、操作の自由、機械性を主眼としたものである故、その擴張は本來操作的であり、從て實質的內容的な有意味的な擴張ではない。例へば虛數概念の導入を想起すべきである。虛數の幾何學的表示は非本來的な問題であり、附加的なるものにすぎない(9)。これに意味を與へるのは後の、或は、別の問題であ

る。かくして、近代數學は具象性、直觀性より、抽象性、形式性、非直觀性へ移易する。近代數學は直觀の明證を要求しない。かゝる近代數學觀の根底をなすものが形式的操作に外ならない。

かゝる過程を經て始めて數學＝公理學が成立し得る礎地が出來し得た。數學が公理學となる礎地が出來た。後は唯だこれの成立の歷史的偶然的機會を待つのみであつた。而してその機會が非ユークリッド幾何學の發見なる一角から產れたことは人の知る所である。

〔註〕

1 幾何學の問題に坐標概念を用ひ、單に代數學を之に適用したといふ事實ならば、デカルトが最初でなく、既に古代に於て Apollonios が存したことは、すべての數學史に所載の如くであり、更に又、單に代數學の建設ならば既に Vieta, Fermat のなし得た所である。
Vgl. H. G. Zeuthen, Geschichte der Mathematik, im XVI. und XVII. Jahrhundert. S. 93 ff. S. 201 ff.

2 代數學成立の動機或は、本來の問題は、云ふまでもなく方程式論である。Algebra なる語がこれを意味する。

3 Vgl. E. Cassirer, Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft I. S. 446 ff.

4 この節に關する見解に就いては P. Boutroux L'Idéal Scientifique des Mathématiciens dans l'Antiquité et dans les Temps Modernes 1920. deutsch von Pollaczek „Das Wissenschaftsideal der Mathematiker" に負ふ所極めて大である。

5 F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen 1872 猶ほ L. Heffter u. C. Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie I. を參照。

因に「空間」論としての幾何學は猶ほ別に存在を主張し得るであらう。然しかゝる幾何學に於て取扱れる理論は既に純粹數學の一理論の一具現でしかないであらう。これについては後に觸れる機會があるであらう。A Einstein, Geometrie und Erfahrung を參照。

猶は又輓近の研究は、非クライン的幾何學、及びこの兩者の綜合が進捗しつゝある。Vgl. J. A. Schouten, Erlanger Programm und Übertragungslehre. Neue Gesichtspunkte zur Grundlegung der Geometrie. Rendiconti del Circolo Mathematico di Parelmo, 50, 1926.

6 Vgl. Zeuthen, Die Mathematik im Altertum und Mittelalter S. 80 ff.

7 十九世紀に於ける群論の成立、發展に就いては、F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert I. besond. Kapitel 8. を參照。猶は H. Weyl, Felix Kleins Stellung in der mathematischen Gegenwart („Naturwissenschaft" 18. Jahrgang, Heft I. 1930) を參照。

8 E. Cassirer, Philosophie der symbolischen Formen III. S. 409 ff.

9 ガウスによつて始めて試みられた幾何學的表示が虛數の實在性を立證した (Fr. Apelt, Metaphysik, Neuausgabe S. 56) とは我々は考へ得ないであらう。それは虛數的關係の一解釋、一例でしかない。

IV　公理主義數學の特性

新公理主義は、古き公理主義の如く一定の具體的對象を豫想する定義を前提しない。それはもはや點或は直線の——一般に一定の内容的なるもの、公理ではない。

それはもはや何ものゝ公理でもない。單に形式的な關係の規定々立に外ならない。右の如き事態を前提して、此處に、數學は、純粋に構成的であることが出來る。具體的內容を離れ、純粋に形式的であることが出來る。

純粋に構成的、純粋に形式的であるために、其處には——少くとも要求に於て——何ら、或は、出來る限り、經驗的所與を前提しない。數學の論理化、論理的嚴正化は必然的である。經驗的所與より獨立にして自由な理論構成として、その出發點を自ら定立せねばならない。即ち數學に於ける定義、公理の規定である。學問的定義は本來、概念內容の明瞭な限定、區別を任務とする。然し數學の定義は上述の本來の要求よりして單にその內容の明瞭な規定に止らないで、內容自身の構成を任務とする。從て數學に於ける定義はその本質上、公理(Postulat)である。數學の定義は「假裝せる公理」である。或は又、定義は語を以てされざるを得ず、而して最も基本的なる概念の定義も何らかより基本的な、概念を以てされざるを得ず、從ていかに之を追及しやうとも結局何らかその定義は定義せざる概念を殘す、而も數學の要求が何ら所與を前提とせず最も基本的な概念及公理からの出發に存する限り、この定義し殘された概念は、自明として、或は所與として認められるのではない、從てこの殘された概念は定義さ

れざる、或は定義せざる概念として、積極的には、内容の不定な、内容の空虛な概念と考へられねばならない。それ故一般に數學に於ける概念はすべてそれ自身としては何ら具體的內容的意味を有せず、唯だ公理による相互的關係の規定以外に何ら內容を有しない筈である。定義せられざる「點」「直線」等々の概念よりなる公理が如何なる意味を有するであらうか。數學の概念がその概念自身としては何ものをも意味せず、單なる概念の分析からは何ものをも導き出し得ないのである。それは實質的概念でなく、單に命名的概念にすぎない。例へば「群」、「體」等の概念を想起せよ。

上述の事態は「公理」自身に於ても同樣である。公理は證明されざる、寧ろ、證明せざる基本命題である。何者、「證明」とはより普遍的なる命題よりの演繹である限り、基礎に置かれる命題が證明されてゐない命題であることは必然である。而して定義が結局は公理である。公理構成の制限は唯だ非矛盾性のみである。

かやうに定義されざる概念を含む根本命題の體系から、純粹論理的に演繹されるものが數學である。而してその場合、專ら、公理の規定するものゝ外は、一切何事をも含意しない處に公理的方法の特色が存する。從てそれの眞理性は問ひ得ない。唯だ可能性のみが問題である。それの妥當性は、經驗的事實との一致若しくは對應に

基くものでもなく、又、直觀的自明性に基くものでもない。フッセアルの用語を用ふればKonsequenzlogikである。(1)

このことに關聯して數學の記號の意義も自ら規定されるであらう。數學に於ても何らかの記號を要する。事實上、數學は常に特別の記號を利用して居り、又事實上その記號によつて特色付けられてゐる。數學に於ける記號は常に同一の意義を有してゐたと云ふことは出來ない。(2)然し上述の公理主義の根本要求よりして數學に於ける記號の性質として要求されることは、先づその記號は單に數學の對象を指示するのみのものであり、而して數學の對象は公理主義の原理に從て單なる或物及び「或物」の關係理論以外のものでないとすれば、數學の記號は——逆說的に云へばZeichen ohne Zeigen となる。數學の記號は豫め何らかの「意味」を含まない、從て全然何ものかのBildとして存するものではない。此處で特に重要なることは數學の記號の獨立性である。何ものかの記號でなく、何ものゝ記號でもない處の記號卽ちZeichen ohne Zeigen であつて、從て而も何ものゝ記號でもあり得ることである。換言すれば何ものかからのAbbildでなく、全然自由な構成によるものである。カッシラアの言葉をかりればPräsentationでなく、Repräsentationである。(3)これはパラドックスではなく、

數學的記號の特色である。數學の記號は豫め何らかの意味を有するものでなく、公理の規定を俟つて始めて意味を規定される。勿論それが記號である限り何らかの意味を有するにせよ、その意味は公理による規定の限界内に限り、それ以外の凡ゆる内容を含ましめない所に特色を有するのである。限界の明確な規定は公理主義の重要なる特色であること前述の如くである。公理の規定するもの以外のものを除去するとしても事實上、その規定以外のものが含まれてゐても、それが理論的内容とならぬ限り、介意する處はない。換言すれば、純粹に思惟の自律、自立の標榜である。記號の有する自然性の完全なる排棄である。その意味に於ての Zeichen ohne Zeigen である。記號が何ものかを意味すると云ふのはその記號を越えて或る他のものを指示することに外ならぬ。それ故、何らの意味なきもの、何らの代表でないと云ふことは、その記號が記號自身を意味する、卽ち記號が記號自身として自主的自足的に在ることに外ならぬ。

かくの如くして、數學の公理的方法は徹底されれば數學卽ち公理學となる。公理的方法は最高命題たる公理よりの論理的演繹體系である故にこの方法そのものは

一般的には、種々の領域に於て理論組織がある程度まで成熟すれば、適用し得るわけである。然しその組織がそれの公理より純粋に論理的に演繹し得、その公理自身が公理性を有し、公理の規定する所以外に何ものをも要求せず、含意せず、公理よりの演繹のみにて十全なるものでなければ、嚴密な意味に於て公理主義的とは云ひ得ない。公理性を有しない「公理」(基礎命題)よりの演繹は直觀的内容的たるを免れないであらう。上述の如き、眞に純粋に公理的方法の要求を滿足せしめる理論組織は、數學の外にない。かゝる要求は自然科學や經驗的事象への適用を顧慮せず、數學の自立、獨立によつて、始めて充される。公理學となることによつて數學は始めて獨立する。固より數學は本來これを志向してゐたではあらう、然し、これを自覺せしめたものは公理主義であると云はねばならぬ。公理的數學が眞の數學である。然し——逆說めくが——このことによつて同時に數學は「數」學ではなくなる。寧ろそれの本來の意味に於ける μαθηματα である。數學はこゝに特別にこれを allgemeine Charakteristik として記號化されるまでもなく、そのまゝで mathesis universalis なのである。數の學、空間の學等々はこの普遍的理論(公理學)の特殊な ein Exemplar に外ならない。加之、凡ゆる理論的學問がおよそ理論的と稱せられる限りに於て、この公理學の特殊者に外なら

ない。

數學が何らか內容的なるものゝ學であり得ないのは、それによつて數學の領域が制限されるからである。これを數や量の學とすることが出來ない所以である。數學は嚴密に形式的な關係の論理的理論であつて、それ以外のものたり得ない。究極的對象としての單なる「或るもの」「或るもの」の形式的可能的なる關係、及びそれよりの論理的演繹。これがAxiomatikの有する內容的意味のすべてゞある。それ故、公理學に於ては所謂「理想的要素」は問題となり得ない筈である。公理學に於ては凡てが理想的要素であつて、殊にこれと區別せられた„eigentliches Element"なるものは存し得ないからである。[4] 公理學は正さしく純粹思惟、或は形式的思惟の獨立、純化に外ならない。正さしく思惟の獨立こそ公理學の最根本的な要求であり、使命である。數學はかくの如きものとして純粹に自己を定立し、他と區別する。この意味に於て數學は始めて獨立したのである。

從て今日の數學はそれ自身としてはNominalismusであり、„Formelspiel"である。このことは然し數學の價値を低めるものでは決してない。かゝるものに對して„Spiele ich nicht mit!"と言ひ得るでもあらう[5]——しかしそれは結局數學しないことに外な

らぬ。實際的具體的には real な内容を表象しつゝすることゝ、數學そのものゝ本質とは別である。遊戯といふ言葉に恐れる必要はない。遊戯は少年と frend な大人にとつて遊戯なのであつて少年にとつては遊戯は「遊戯」ではないのである。

上來の所論の綜合及要約

近代數學的理念の建設者デカルトの出發點は學問の方法的反省にある。反省は先づ分析に始まり、次でかゝる要素よりの綜合、構成に終る。單に偶然的な發見に據り所を有する證明法ではなく、算術の計算に於ける如き機械的必然的な確實的方法への要求、想到が解析幾何學の設立となる。この方法が當時の傳統的數學たる幾何學に適用されることによつて、從來の幾何學的方法の制限が意味なきものとなる。此處に算術、若しくは算術の形式化たる代數が、單に幾何學への適用なる意味を離れ、獨立自立せる數學として幾何學の位置に代つて數學の中心的位置を占めることによつて近代的數學的思惟法が確立されるのである。かゝる反省を遂行し、その理想を積極的に實現せしめ得た所に近代的思惟法の特色が存するのである。かく數學が具象的なるものを離れて、專ら形式的な操作による方法を發展せしめることによ

つて、此處に數學の對象も亦その性質を革めるのである。第一にそれは極めて自由な、廣汎な領域となる。特定の直觀的內容から解放されたる可能的關係の組織となる。而してかゝる數學的理論を方法的體系的に組織しやうとして、その理論の構成に必要にして十分なる原理が反省されるに及んで、近世の數學は益〻その自由性の度を、質を擴大した。例へば平行線の公理の否定、アルキメデスの公理の否定を想へ。而してかくの如き數學觀の成立する地盤は既に豫め用意されてゐたことは上述よりして明であらう。公理主義的研究はかゝる數學的傾向の特質を自覺せしめた。近代數學の本質を完全に顯現せしめた。その意味に於て公理主義は近代數學の本來の姿の自覺であつた。

數學が完全に公理主義化されることによつて數學が蒙る重要な Deformation は、從來數學が持つてゐた「色」や「形」が解消されることである。(自然科學の原理の發展に於て色や音が量的なるものに解消され終る Analogie を想起すべきである。) 從來何らかの粉飾を裝ひ、若しくはそれに於て思惟されてゐた數學的體系が、それらを悉く拭拂されて純粹にそれの形式的本質に於て完全に構成され得ることが明となつた。寧ろ從來かゝる粉飾によつて蔽はれてゐるために見透し難かつた本質的關係がこ

れによつて明白となつた。寧ろそれによつてより普遍的な本質的關係が顯はれた。從來、何らか內容的に、若しくは、何らかの內容に於て思惟された關係は、かゝる內容が除去されることによつて、純粹に徹底的に追究され得た。かくして數學は數の學でなく、一般に凡そ何ものかの學であることを止めた。かくして此處に數學は mathesis universalis となり得た。

それ故、今日の數學に於ける公理主義或は公理的方法は、單に一定の定義及び公理から演繹される理論的體系を意味する丈のものではない。決して單に理論を組織付ける丈の外面的方法に留るものではない。徹底的に公理主義的であることを要し、從てこの學問に於ては方法、對象、何れも嚴密に公理主義的意味を有さねばならない。それ故我々はかゝる公理主義を特に絕對的公理主義と名付け得るであらう。

1 Husserl, Die formale und transzendentale Logik. § 14.

2 適切に云へば歷史的には Rhetorical より Syncopated へ、更に Symbolic へ進行した。(Nesselmann) from Young, Fundamental Concepts of Algebra and Geometry. Appendix)

3 Cassirer, System der symbolischen Formen. Bd. 3. S.

4 Hilbert, (Über das Unendliche, Mathematische Annalen Bd. 95) は、この點に關しては不徹底である。

5 Weyl, Randbemerkungen zur Hauptproblemen der Mathematik, Mathematische Zeitschrift, Bd. 20. 1924. S, 148

我々は上述によつて略、近代數學的思惟の特性付けとその成立の理路を明にし得たと思ふ。我々はかくの如き相に於て現代の數學を把握する。我々の次の課題は、かゝる特質を有する現代數學の本來的な基礎概念及びその組織を明にすることである。

IV　現代數學の操作的組織

蓋し、近代數學の特質は右の如きものに相違ないのであるけれども、實際上、それは理想的類型であつて、事實としては今日の數學はこの理念の下に完全に構成され組織され統一されてはゐない。又現にかゝる理念の下に全數學を統一的に組織した著作も存しない。長き時代に亙る不斷の業績の累積のために近代數學の全發展が餘りに廣汎で餘りに分科的であるによる。その輝かしき記念碑たる Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen (1898—) にしても、Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées (1904—) にしても、近代數學の Resultat を分科的に綜合するに止る。然し上述の如き所論から、現代數學の業績の統一を企てるとすれば路は自ら豫め明である如く思はれる。——

近代數學の完成としての現代數學は、その本質に於て必然的に公理論的であり、從てそれによつてその對象も方法も自ら規定される。即ち、その對象は全然形式的な關係領域であり、その方法は全然操作(Operation)である。從てその對象は何らか內容のある、その意味に於て何らか直觀的、表象的なるものでなく、その方法も概念の分析、綜合等々でなく、專ら無內容の對象「或る物」の演算的機械的構成である。かゝる數學の方法觀の下に於て、該數學の最も根底的な概念として「集合」が考へられ、こゝに「集合論」なる基礎的分科が要求され、實現されるのは自然である。勿論集合論の歷史的成立は他の偶然の機會による。機會に於て、又、動機に於て偶然であつても、その本質に於て集合論的思惟は十九世紀數學にとつて必然的であつたのである。集合論は言ふまでもなく、全然任意な Gedankending、全然無內容なる Etwas を「要素」とし、Mächtigkeit 即ち對應關係と Anordnung との二つを基本原理として構成される純粹に形式的な數學領域である。これらの「要素」の集合に更に種々の操作的規定を加へて成り立つものが「モドゥル」(Modul)「群」(Gruppe)「環」(Ring)「體」(Körper)等々となり[1]、夫々の數學領域を形成する。かゝる方向に體系が組織統一され、從來の數學の諸分科が、この見地の下に再組織され得べきことを期待することは原理的に困難ではないであらう。か

ゝる企圖は必しも無稽なディレッタンティズムではない。現に極く最近に到つて„Moderne Algebra“の名目の下に一派の數學者によつて企てられてゐるものはこれに庶幾いであらう。(2)

この所謂近代的代數學は從來の代數學や一般に凡ゆる計算的數學分科と異つて實數或は複素數の領域を取扱はず、「體」、「モドゥル」、「環」を基礎とする。彼等はかゝる抽象的領域を基礎とする目的を自覺してゐる。即ち彼等の意圖は(3)第一に出來る限り內容上の普遍性を求めることであり、第二に出來る限りその手段(Hilfsmittel)を制限することである。即ち理論の建設に當つてその出發點をなす前提が普遍的である程、その理論の包括し適用される領域は大となる故、この方法を以て實質的には全然異つた事物にも有機的組織的な統一を與へやうとする。而してかゝる抽象的領域を基礎とすることに基く內容上の普遍性は、必然的にその手段の制限を伴ふ。即ち「體」や「モドゥル」や「環」の概念は云ふまでもなく基本演算の即ち四則算の操作からの抽象より生じたものである。從て「體」なる概念から理論を建設するといふことは專ら唯だ四則のみを適用することを意味する。この第二の見地は古き代數學に對して根本的に特性的、效果的であつて、根本的に重要なる區別をなすものである。(例へば

歴史的に代數學の中心問題であつた方程式論に於て新代數學は唯だ四則演算のみで十分であるが、古き代數學はかゝる「自然的方法」の領域を越えて居り、例へば所謂代數學の基礎定理の證明には解析の方法を借り、本質的に性質を異にする極限、概念、が四則算に加らねばならない。かゝる極限概念に依らずに唯專ら四則の自然的手段よりして方程式論を構成し得ることは古き代數學的方法より優越せることは明である。[4] この近代代數學的方法は「現存の全數學領域をそれの最も一般的な從て最も單純な概念的基礎に還元し、而も夫の方法のみによつて構成し、整備しやうとする」ものである故に、單に從來の古典的代數學の領域に留るものでなく、これを越えて全數學全般を貫徹するものである。即ち現存の理論の最も單純な概念的基礎を見出し、それによつて、論理學より始めて、集合論、數論、綜合及解析幾何學、位置解析學、積分方程式論、變分學、(Variationenrechnung)より量子論に至るまで、統一化し、組織化せんとするのである。[5]

右の如き方法に本づく企圖は猶ほ企圖に止り、未だ完成遂行の域に達してゐないことは事實である。然しそれは決して單なる假想的な企圖でなく既に着々重要なる領域に亙てその業績が實證されてゐるのである。(上述の Hasse の報告を見よ。)

而もこの企圖やこの方法は單に右の學派の數學者を俟つて初めて想到される底のものではなく又、單に方法の簡便化等の外面的現象に止るものではなく、正さしく近代數學の本來の方向の必然的過程である。その組織の完成は原理的に既に解かれた問題であつて殘されたる問題ではない。今、その實際の組織の構成はもとより我々の任でない。我々は唯〻上述の如き操作が今日の數學體系を構成する基礎概念であり、それがいかなる方向に組織されるかの展望丈で滿足せねばならぬ。

もし此處に、近代數學の今日に到る迄の發展の方向、並びにその方法の本質的なるものを上述の如く解することによつて、今日の數學の相を捉へ得たことが承認されるとしたならば、さて我々に課せられる問題は次の如きものになるであらう。

今日の數學即公理主義數學は mathesis universalis である。凡ゆる理論の原型である。凡そ數學は何ものゝ學でもあり得ず、而も何ものゝ學でもあり得る。凡ゆる具體的內容的理論はそれの理論性に於ては數學的理論の ein Exemplar である。かくの如き mathesis universalis としての數學はもはや他の如何なる理論よりも導出されるも

のでなく、却つて逆にすべてのものがこれから導出される故に、それはいかなる意味に於ても何ものかからの抽象ではない。かくの如き數學は果して如何にして可能であらうか。同様に數學の言語とも云ふべき數學的記號は右の如き數學の性格よりして自ら一定の意味なき記號と解せらるべきことは前述の如くである。然しかゝる立場からしては數學的記號の存在の必然性は理解されないであらう。それは單に數學的思考上の便宜的なものと言ふ以上の意味を有し得ない。然し乍ら實際に於て數學的記號は數學に於て缺くべからざる任務をもち、ある意味に於て數學的思惟を特性付けるものである。これは如何にして理解されるであらうか。

更に今日の數學の体系構成の基礎原理たる「操作」はいかなる意味、構造を有するか。かくの如き數學的操作と論理的演繹との區別、關係は如何なるものであらうか。果して論理は數理よりも普遍的基本的であるであらうか。

かゝる數理と論理との關係の問題より此處に所謂數學基礎論の考察に入らねばならないであらう。我々の上述の如き數學觀よりしてこの基礎論爭はいかなる意義を有するであらうか。その代表的立場なる數學的論理主義、直觀主義、形式主義の各はいかなる權利と制限を有するであらうか。このことは自ら固、この基礎論の動

機となり、且つ本來の問題たる「無限」(6)の考察に導くであらう。

斯くして最後に、數學の實在性、對象性とは何か、數學が本來何ものゝ學でもなくして、而も何ものゝ學でもあり得ること、更に實際に經驗と結合してゐること——所謂數學の應用性を——單に偶然、若しくはその同義語たる「豫定調和」(7)と見做さない限り、このことは如何にして可能であらうか。數學的「精神」が「精神」の體系に於ける位置、數學的精神の自覺とはいかなるものであるであらうか。

これらの問題が、上述の我々の設問よりして當然提起される問題であるであらう。

〔註〕

1　「群」は數學的には次の如く定義される。

要素の集合(G)があつて

(I) その集合の任意の要素 a, b の結合が常にこの集合の一要素(通常 a, b の「積」と呼ばれ、ab 又は $a \cdot b$ と記される)をなし、

(II) その集合の任意の要素 a, b, c に對して $ab \cdot c = a \cdot bc$ なる關係が妥當し(組合せの法則)

(III) その集合の凡ゆる要素 a に對して $ea = a$ なる性質を有する e なる「單位要素」がその集合中に存在し、

(IV) 集合の凡ゆる要素に對して $a^{-1}a = e$ なる性質を有する a^{-1} なる「逆要素」がその集合中に存する時。

この集合を「群」と名付ける。〔(I)に於ける結合は必しも $ab = ba$ たるを要しない。右の四條件の外に更に $ab = ba$ である時これをアベル群と云ふ。〕 例へば、集合の要素を數とし、結合を通常の乘法とすれば、〇を除くすべての有理數

は群をなし、或は又、數1丈でも群をなす。

この場合、結合の法則は任意の方法であつていゝのであるが、この結合を加法とする時右の四條件を滿すものを Modul と言ふ。

更に結合の法則を加法と乘法との二種とし、

（I）加法乘法に關する組合せの法則

（II）加法乘法に關する交換の法則

（III）配分の法則

（IV）減法の一義的無制限に可能なる場合

この要素の集合を環と言ふ。

更に結合の法則を加法と乘法との二種とし、

（I）加法乘法に關する組合はせの法則

（II）同　　交換の法則

（III）配分の法則

（IV）$a+x=b$ を滿足する x が必ず存在し、$a\times y=b$（$a\neq 0$）を滿足する y が必ず存する時、

この要素の集合を「體」と云ふ。

要するに、結合の法則を加法と乘法とする時、加法の正逆の操作を無制限に行ひ得る集合が Modul であり、乘法の正逆の兩操作が無制限に行ひ得る集合が群であり、加法の正逆及び乘法を無制限に行ひ得る集合が環であり、加法乘法の正逆の全操作を無制限に行ひ得るものが體である。（米山博士、「數學の基礎」下卷四八七頁參照）

2 Van der Waerden, Moderne Algebra I（1930）II（1931）

この方面の重要な業績は Steinitz, Schreier, Noether, Artin, Hasse 高木博士等に負ふ。

3 Hasse, Die moderne algebraische Methode (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 39. Bd. 1930)

4 Steinitz, „Algebraische Theorie der Körper" は實際にこれをなし得た。これに於ては、代數方程式の根は任意の「體」から、宛も、有理數が整數から(ax=b なる方程式の解法)或は、複素數が實數より($x^2=-1$ の解法)と同一の原理に從つて構成される。

5 近時の業績の示す如く、幾何學代數、函數論が群論的に處理される丈でなく、物理學に於ける量子論にまでその適用を見る。(例へば Weyl, Quantenmechanik und Gruppentheorie) 猶ほ、Weyl, Felix Kleins Stellung in der mathematischen Gegenwart, „Naturwissenschat" 18. Jahrgang Heft I. 1930. を參照。

6 Vgl. Weyl, Heutige Erkenntnislage in der Mathematik S. 1. O, Becker, Über den sogenannten „Anthropologismus" in der Philosophie der Mathematik (Philosophischer Anzeiger 3. Jahrgang 1928) 參照。

7 D. Hilbert, Naturerkennen und Logik „Naturwissenschaft" 18. Jahrgang Heft 47/49. 1930.