ギリシヤ數學の古典的理論に於ける直觀と思惟

ユリウス・シュテンツェル
下村寅太郎 譯

學問が猶「科學」化しなかつた時代の哲學思想を、今日の如き科學と哲學との分離獨立した時代から考察する場合、それの問題や概念を孤立化し、抽象化する惧れがある。特に、プラトンの如く、ギリシヤの學問を代表する哲學と數學との交渉が殊に典型的に交渉してゐる場合、このことは固より一般に注意されてゐた處であるが、實證的な文獻學的、科學史的研究と哲學的考察との聯關による協同勞作が實現される樣になつたのは比較的近時のことに屬する。これを基礎として最近の、「イデア數」論を中心とする晩年のプラトンとアリストテレスとの關聯の考究は、プラトン解釋に一新時期を劃しつゝある。シュテンツェルは言ふまでもなくその指導的位置にある人である。こゝに紹介する論文は昨年チウリヒに擧行された萬國數學大會に於ける氏の講演である。(Verhandlungen des Internationalen Mathematiker Kongress. Zürich 1932 I. Band Bericht und Allgemeine Vorträge S. 334—335) なほ文中の希臘語に付いては長澤信壽氏の教示を仰いだ。茲で感謝の意を表する次第である。〔 〕は譯者の挿入である。

ヘルマン・ワイルは、自己の時間や愛は、やはり先づ第一に數學的研究に屬すると明白に告白して彼の『數理哲學』(Handbuch der Philosophie, II A 161)を結んでゐる。古典ギリシヤ時代の大數學者達が考へたこともこれと殆ど異る處はない、そして彼等は數學の哲學的理論を確かに自己本來の課題とは思つてゐない。加之テオドロス、テアイテトス、エウドクソスの如き、古典的と名付けられねばならない研究者の實際の業績も我々には全く不完全にしか知られてゐない。エウクリッドが三

百程集め、整理したものは、これらの先驅者達に遡つてゐる。いかなる形式に於て、又いかなる理論的態度に於て、彼等自身が自己の成果を言ひ表はしたかは、エウクリッドに現存する體系から愼重な遡及推論によつてのみ規定される。この場合に古典的哲學者の考察が重要な役割を演じる。それは屢々後の證人の辛棒强い個別的研究による明白な遡及的日附けや推料よりも、より確實に、例へば比例論の如き、全問題領域が實際にエウドクソスの如き人の業績と見做し得さしめるのである。

我々を最も古き數學の理論に近付き得るやうにした古典的哲學者、プラトンとアリストテレスとは、數學的な事柄に關する證人たるに十分な善意と能力について種々に評價されてゐる。人々は前者が精密な數學的方法論の形成――かくの如きものに對しては數學者の本能は背くのが常であるが――に當つて能動的創造的役割を演じたことを認めてゐるが、それとは反對に、人々はアリストテレスに對しては數學的なるものの本質に對する理解――このことは近代の數學者には寧ろ明白であるが――すら否認してゐる。この點に關する研究は目下過程中にある。從つて人々は今日極端な立論（テーゼ）を避ける。唯だ一つのこと丈が益々明白になつた、即ち兩哲學者にとつて數學は從來人々が想定してゐたよりも遙かに重要であること、兩者の教説には、すべての哲學的課目、形而上學・認識論・論理學と、數學的理論とには、近世に於て常に人々が信じてゐたよりは遙かに內面的な融合が存することである。數學は、更に彼等にとつては、普遍的學問 (mathesis universalis) であり、或は少くとも、一つの普遍的學問がそれから展開される所の方法及び原理を與へるのである。かゝる兩哲學者の哲學的及び數學的理論の廣汎な交錯に付いて、以下語られることは、近代の數學者にとつては何

ら數學に關することなきものである。が然し數學の應用可能性は實に數學自身の根本問題である。そして出來る限りの論理的純粹性の追求は、歴史的には、數學と現實科學一般との根源的に猶ほ開明されてゐない綜合態から始めて成長するのである。我々の題目『直觀と思惟』はこの綜合の歴史を、數學の論理的基礎付けの要求が理論構成的となつた箇所に於て示さねばならぬ。

I

數學が指導的役目を演じてゐるプラトンの最初の對話篇は『メノン』である。數學者は誰でも、この中に正方形の平面の倍加が「助産術的」問ひ方の一例として、同時に又、「すべての知識は想起である」といふ形而上學的命題に對する證明として、持ち出されてゐるのを知つてゐるであらう。然しこの對話篇の第一と最後の部分の餘り知られてゐない二つの箇所が中間の箇所に始めてそれの本來の意義を與へるのである。

第一の箇所、『メノン』74 d 11で、プラトン對話篇に於て屢〻行はれる樣に、數學的實例で、普遍的概念の嚴密な定義が敎へこまれる。德、卽ち一般的堪能や能力、を實際に全然普遍的に定義し、概念の餘計な制限をすべて避けることを學ぶために、〔例へば〕σχῆμα（表面）、は、次の如くに定義されねばならない、例へば στρογγυλότης（屈曲）、εὐθύ（平面の限界）74 d 7、の對立、その他のすべての表面（スケマタ）が共に包括される樣に定義されねばならない。

第一の定義に曰く、『σχῆμα とは、すべての存在するものの中で唯だ常に色に伴つてゐるもの（色と共に與へられてゐるもの）を謂ふ。』專ら表面の擴がりに關するこの第一定義は種々なる根據より數學的に不十分である。それは、後のアリストテレス論理學の言葉で表はせば、單に、表面の一つの

ἴδιον 即ち一つの本性を擧げてゐるが、σχῆμα を數學的概念に組入れる所の本性を擧げてゐない。それ故、この定義は、色が先づ定義されねばならないといふ論據で却けられる。[1] それ故次の定義は、定義されてない規定は全く用ゐられない樣に配慮されねばならぬ。「ソクラテス」は先づ πέρας（限界（ベグレンツング））の概念を確かめる、即ち目指す普遍性と同時に必要な規定とをそれに與へるために、彼は πέρας と並んでギリシャ語 τελευτή（終り）と ἔσχατον（端）とを立て、これに屬する動詞、「限界付けられてゐる（ベグレンツト・ザイン）」「ある事を止（や）める」を援用して明瞭にする。かくして πέρας の概念が規定されてゐる。此處にこれらの三つの言葉によつて同一の意味統一が把握され、定義の用意がされたとして、他方、反對から新らしい規定要素が得られる。「ソクラテス」は問ふ、『君は確かに或るものを平面的と呼び、或る他のものを立體的（στερεόν）と呼んでゐるではないか、これらの概念が諸幾何學（即ち平面及び立體幾何學）に於て用ゐられてゐる如くに。』〔76 a 〕ソクラテスはこのことが認められた時、定義して言ふ『表面とは、それに於て立體的なるものが終る所のものである、（σχῆμα πέρας στερεοῦ）。』ここでは、各の言葉は明らかに定義の必要條件の熟慮から選ばれてゐる。それ故エウクリッドの術語 πέρας は少くともプラトン中期に遡るものである。[2]

猶ほエウクリッド及び『メノン』に於て同一なる定義の型式に就いて一言する。我々はアリストテレスの初期の未だアカデミイに近かつた著作『トピカ』（Ζ 4 141 b 27）に於てこれらの定義の全系列を認めるのである、即ち、點は線の限界（グレンツェ）であり、線は平面のそれ、平面は立體のそれである、（στιγμὴ πέρας γραμμῆς, γραμμὴ πέρας ἐπιπέδου, ἐπίπεδον πέρας στερεοῦ）。この場合、ἐπίπεδον は珍らしい。アリストテレスに從へば、此處では普通の人間によく

熟知されてゐるもの、普通の立體、が前提されてゐるが、然し言ふまでもなく派生的なものの定義には、全然熟知されたものや論理的に先なものが用ゐらるべきであらう『確かに疑ひもなく、點は線よりも論理的に簡單なものである云々、同樣に實際一(アインハイト)も亦數よりは先きである。』(Top. 141 b 7 ff)。處で實際エウクリッドは第一卷(『ストイケイア』の)に於て、アリストテレスがトピカに於て同樣に既に知つて居た所の、(Z 6 143 b 11 ff) 而して同程度に上述の批難をうけない所の他の型式の定義から始めてゐる『(1)、點は、部分を有せざるものである。(2)、線は幅のない長さである。(3)、面は長さと幅とのみを有するものである。』これは明に「部分を有せざるもの」に對する肯定的な言ひ現はしである、何となれば、第十一卷に立體は長さと幅と深さとを有するものとして定義されるからである。次いで逆に既に定義された術語間の關係を新らしきペラスの術語によつて述べる所の「ペラス定義法」がこの間に定立される。卽ち(1)と(2)の後に第三として「線の限界は點である」といふ定義が存する。從て今や限界(ペラス)は定義さるべきものとなる。恐らくエウクリッドは此處でもアカデミイ內部の種々の討論の結果を綜合したのであらう。彼には諸術語の內含的聯關の方が、歸結を導き出し得る實際の第一原理、(πρῶτα)よりもより重要である。然し更に我々が見るであらう如くに、正さしくこれを第一にプラトンは意圖したのである。數の原理として一(モナス)を、アリストテレスは、上揭の箇所で、眞の πρῶτον の原型として述べてゐる。エウクリッドの原子論的な點の定義は猶ほプラトン的理論の影響を示してゐる。

我々がこの實例に比較的長く留つたのは、それが餘り知られず、それの問題史的背景が明になつてゐないからに外ならぬ。プラトンの數學的箇所

の背後には屢々一見した所よりも遙かに多くのものが存することを、第二の有名な箇所が直に教へるであらう。我々はアリストテレスによつて提起された數學的定義と感性的直觀との關係の問題を把持してこれに移らう。

我々はこの有名な箇所の背景を此處では除外してい〻。此處では邊の長さ二呎の正方形の平面の倍加が問題である。例の素人〔對話篇中の侍童を謂ふ〕がソクラテスの助産術的指導の下に二度試みて失敗した後、二倍の面積を有するのは四呎の邊上の正方形でもなく、三呎の邊上のそれでもなく、對角線上に立てられた正方形であることを發見する。プラトンがこの想起の作用を明白にする形而上學的敎育學的光耀に眩惑されて、此處に立てられてゐる課題が夫の素人には知られなかつた一層困難な問題。卽ち正方形の邊と對角線との非通約性、が見失はれてはならない。確かに、與へられた二呎の邊と三呎の大き過ぎると認められた邊との間に存する邊はいかなる大きさであるかゞ、正さしく問はれてゐたのであつた。〔二つの〕數が與へられ、一つの數が問はれてゐるのだ！　さてこの素人ですら幾何學的に構成して容易に見出したことが、その邊と對角線との關係(ロゴス)を算術的に規定しやうとすると、數學者にも打ち勝ち難き難問を提供するのである。プラトンが絶えずこの問題を眼中に置いてゐたことは、オツト・トェプリッツが發見した術語上の巧緻が證してゐる。卽ちこの邊の大きさが問題となる處では常に ποσότης でなく、πηλικότης が問はれる。從つて既に當時、通約的と非通約的な大きさの關係をより包括的な言葉 πηλικότης で表はし、ποσότης を整數で表現し得る關係に保留するといふ數學的用語法が成立してゐたのである。それ故エウクリッドは（V 3）二つの大きさの關係(ロゴス)を λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητι ποιὰ σχέσις〔二つの同じ性質の大きさの關係は πηλικότητι に從つての關係である。〕と記述する。[3] それ故この箇所は二つの見地の下に考察される。一方では、幾何學的圖形がプラトン的形相（エイドス）一般に對する最も美しき實例であり、直觀的なるものが自己を越えてそれの內に記號化された概念的事態を指示する。他方に於て、それは歷史的に極はめて重要な、幾何學的と算術的方法とが相入結合し乍ら再び又離反することを示す。此處に、ノイゲバウア[4]がギリシャ以前の及びギリシャ數學の最善の知識に基いて言ひ表はしてゐる樣に、特にギリシャ的な發展の決定的轉向が存するのである。ギリシャ以前の數學は著しく算術的-代數的であり、殊にエジプト數學は著しく加算的であつた。幾何學は先づ始めは『單に、一づの獨立に發展した計算術の多くの應用方面中の一つに過ぎなかつた。[5]』それに對して『幾何學的構成の中にも算術的關係が現はれてゐることを發見したのは……最も感銘的な發見の一つである。これによつて幾何學は數學の任意の實際的な應用方面たる性格を失ひ、普遍的數學的法則性を表現し得る原理的意義を獲得する。[6] 卽ち幾何學的構成はこれより『範式（フォルメル）』の役を演じる。圖形はもはや經驗的外界の對象でなく、『數學の理想的要素』[7]である故、今や『普遍的命題の證明の可能性が與へられたのである。幾何學の形態に於て始めて定理と推論との順位に對する洞察が發展するのである。[8]』このことが『メノン』に於ける「想起」の意味である、それは實際の「根據への洞察」λογισμὸς αἰτίας (Menon 98 a) を意味する。[9] 經驗的に吟味された規則「應用され得る處方」が、證明し得る確實な——プラトンの所謂固く結ばれた——確立された命題へ發展する。プラトンが數學的認識の形而上學的基礎付けによつて、直觀的圖形に於いて認識された命題の超經

驗的、從て論理的妥當を極はめて強く力說するならそれ丈、一層彼には數學の狹き方法的領域に於てそれに付いて猶ほ言ふべきものが殘つてゐる。而して彼はこれを『ポリテイア』第六卷に於て追補してゐる。この『メノン』に於ては、第三の數學的實例はどれ程この時代の數學的方法が素人の若輩の理解力を超えた發展をしてゐたかを暗示してゐる、對話の主題―― aretē（敎養（ビルドウンク））の敎へ得べきこと――と密接に關聯してプラトンは數學に於ける假設的分析に付いて記し、それを最大限問題に於て例示する、これの正確な言葉の解釋は長く全く謎であつたのであるが、ヒイスがその『ギリシヤ數學綱要』(Heath, Manual of Greek Mathematics, Oxford 1931)に於て、明に一步を進めた、勿論恐らく損はれてゐる原文の正確な語の飜譯を與へてはゐないのであるが。この實例の方法的意味は明瞭である。卽ち與へられた平面の面積を三角形にして、與へられた圓に內接せしめることは可能であるか否か、の問題は次の如き假設によつて着手される、卽ちもし一定の仕方でこの三角形の面積を直徑を對角線とする矩形として設定することが出來るならば、この課題は解き得る。それは與へられた圓を等邊雙曲線で切斷することに歸する。プラトンが『メノン』を書いた時代に、彼がどれ程、假設的手續が$\sqrt{2}$のアポリアの克服に於ても一の役割を演じるかを知つてゐたかは措いて置かう。

註① この定義は核心に於てはピユタゴラス的である。Aristoles, περὶ αἰσθήσεως καὶ αἰσθητῶν,（『感性及び感官に付いて』）439a 30. τὸ γὰρ χρῶμα ἢ ἐν τῷ πέρατί ἐστιν ἢ πέρας. διὸ καὶ οἱ Πυθαγόρειοι τὴν ἐπιφάνειαν χροιὰν ἐκάλουν（色とはペラスの中にあるか、さもなくば、ペラスである。だから又ピユタゴラス學徒もエピパネイアを色と呼んだ。）(Metaphysica Z 4, ἐπιφάνεια λευκή〔白き上に現はれてゐるもの〕參照）以下の對話中に於て(Menon, 76 d)確立されたσχῆμαの概念で、色の概念が物理學上の發射說で定義され、そしてそれによつて感覺に對する普遍的定義の類型が定立され(76 d 8)、此處では技巧の正しい定義が明白な主

題であることの更に進んだ證明となる。

② 個々の點に於てはエウクリッドと一致しない。σχῆμα (I. def. 14) は次の如く定義される——τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον〔あるものによつて、或は又ある限界に依つて取り圍まれてゐるもの〕（以前は ὅρος〔限界〕は πέρας τινός〔あるものの限界〕として）。στερεοῦ πέρας〔立體のペラス〕は彼に於ては ἐπιφάνεια——プラトンが使用してゐない語——である。プラトンが『メノン』に於て故意に用語法にも反して術語を相互によつて規定したといふことも可能である、例へば στρογγύλον〔圓〕と εὐθύ〔直線〕とを ἐναντία〔對立〕として同種のものとして規定する、尤も前者は先づ二次元的形象に對し、εὐθύ は一次元的形象に對して用ゐられるが。

③ これについては Scholion, 殊に V. 286, 8 Heidelberg

④ O. Neugebauer, Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung, 1926, 17. Quellen und Studien I. 302. Problemkreise d. Math. i. hist. Entw. (Verh. d. Phys.-med. Ges. Würzburg, 1927, 60 ff.

⑤ Neugebauer, Quellen und Studien. 202.

⑥ Neugebauer, Problemkreise 61.

⑦ ibid.　⑧ ibid.

⑨ Neugebauer, l. c.

II

假設（ヒュポテシス）の術語は、明かに直接に數學から採られたものであるが、今やプラトン—アリストテレス的論理學の基礎概念となり終る。この概念と、自由に前提し、それによつて內含せしめられた聯關を論理的に分析する古代的思惟とは最も密接に接近してゐるのである。いかにプラトンが假設（ヒュポテシス）を先づ數學的なるものの領域に於て把握したかを『ポリテイア』第六卷に於ける最も詳細な最も重要な「假設」の說明が示してゐる。この全卷の頂點に於て、卽ち熱烈な言葉で一切の存在及び一切の認識の中心として展開される善のイデアを描く際に、プラトンは一切の存在領域の順位を、嚴密に遂行された數學的なアナロギー、一つの比例によつて描いてゐる。——線をとり、それを不等な部分に分かて、而してこの二つの部分の各を更に同一の比に分かて。これらの部分相互の關係は、明瞭さ、從

て學問的認識力に關しては、上述の比例系に映寫される認識對象の諸領域相互の關係に等しい。卽ち二つの主要部分の一つには可視的直觀的なるもの(τὰ φαινόμενα)若しくは臆見(ドクサ)が對應し、他のもう一つには、叡知的なるもの(τὰ νοούμενα)若しくは理性(νοῦς)が對應する。更に第一の領域は最低の「映像」、影、鏡像の領域と、この最低階級に映されてゐる對象の一段高い領域とに分たれる。これに對應する認識過程は「映像力」εἰκασίαと「信」πίστις(卽ち所與の純なる受取)と呼ばれる。然る後に、叡知的部分のこれに對應した二つの領域が徐々に塡充される。先づ全叡知的部分と直觀的部分との嚴密な對應が力說されるが、次の一歩は既に我々を「數學的」對象に導く、それは直觀的圖形や模型が利用される限り、ὑποθέσειςとして、イデアとして、第三階段の領域として呼ばれる。然しこれらの數學的對象が原理(ἀρχή)に向つて居り、そして直觀的圖形や模型の助力が斷念され、從て唯だイデア(εἴδη)のみによつて、證明の進行(メトドス)までが行はる限りに於て、最高の段階が作用してゐるのである。(510 b, ff.)

この猶ほ不定な陳述を聞く者は誰でも不知不識に、個々の段階相互の關係、諸領域の比例を、個々の各段階の開明に利用しやうとするであらう、卽ち、正しくプラトンの意味に於て、この關聯によつて內含せしめられた個々の項の意義を把握することに努めるであらう。我々は後のために、この關係による規定の手段が比例、而も比(ロゴイ)を結合して比例となすこと、「アナロギア」であること、を記憶しやう。プラトンは更に最も詳細に第三の段階、卽ち數學の段階を說明する。彼はこれから他の領域、特に最高の領域の開明を期待する。この場合に出て來ねばならないものは直觀的明證性と思想的のそれとの分岐である。

プラトンは彼のソクラテスをして次の如く展開せしめる――諸幾何學(『メノン』に於けると同じく複數)や計算論やかくの如きものに從事する人は或る前提、「ヒュポテシス」、例へば、偶數と奇數、種々の圖形 χήματα (此處では『メノン』に於けるよりは恐らくより一般的に用ゐられてゐる)、三種の角やその他かくの如きものを各〻個々の方法に從て作る。これに付いて論證することを彼等は必要と見做(ἀξιοῦσιν—"Axiom" はこの語から導出される)さず、こゝから出發して整合的に(ὁμολογουμένως――本來「自己と一致して」、從て矛盾を含まないで)それぞれの個々の研究の結果に到るのである。その際彼等はそれと並んで、可視的形態を補助として用ゐ(προσχρῶνται)、これに付いて語る、然し決して個々の圖形でなくして「對角線そのもの」、「四角形そのもの」、等々を思念する。卽ち彼等はそれらの範型(モデル)を考察する、更にこれには鏡影、影繪、射影がそれの映像(最低段階！)として、より高次のイデア的現實(本來の數學的認識 διάνοια はこれを目標とする)の模寫、模倣としてさへ、存在する。この敍述から、この『ポリテイア』に於てヒュポテシスによつて思念されてゐるものが明瞭に現はれて來る。それは、例へば、「九〇度に對し<=>の三種の角が存在する」、「凡ゆる數は偶數か奇數かである」の如きを陳述する個々の命題 ὅροι である。その際それはこれらの陳述の直接の「直觀的」洞見性に賴つてゐる、兩者は三角形や四角形の「圖形」とそれらの中に含まれた陳述との如く、相並立してゐる。『メノン』の正方形の配列[18]、(卽ち十六の正方形が、均齊に配列され、四平方呎の正方形の一つに於て對角線が適當に引かれるならば)、それは、丁度、頂點を過ぎり對邊に平行な平行線が引かれた三角形が角の和の命題を表はし、又象限(グノモン)圖形が直ちに $(a+b)^2=a^2+2ab$

＋b²及び少く變形して、$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$を表はす如く、そのまゝ一つの命題、一つの公式（フォルメル）である數や角に關する第一の規定の如き命題 ὅροι と、圖形に記號化された公式や命題とを統一せしめやうとする困難はこの箇所の解釋者を多忙ならしめてゐる。然しこの困難はプラトンが當面し、彼或はアカデミイの數學者達が超越しやうと努めた正さしくその狀境を明かにするものである。數學的 ὅροι と陳述との並立は正さしく、上位のもの、普遍的なものが先行し、特殊的なものがそれから導出される所の順位（ヒイラルヒイ）に移さるべきである。疑ひもなくプラトンが第四段階に付いて言つてゐることは、すべて、種々の類型の分離が必然的に齎らした個々のヒュポテシスの統一化、統括化に歸する。プラトンはこれらの個々のヒュポテシスを實際にヒュポ・テシスに、土臺に置かうとした。發端に、手續きの基底に、全體の統一へ（ἀρχὴ τοῦ παντός）、即ち ἀνυπόθετον〔無假定へ〕進行する階程（ἐπίβασις 及び ὁρμή）にしやうと望んだ。この統一から逆に、直觀的なものを藉らずに、ロゴス自身がすべての前の段階を洞見し得るもの、理解し得るものとなすことが出來る。それ故、陳述が直觀的なるものに關係するか否かは全く問題でなく、唯だ陳述とそれの原理に對する依存との論理的聯關のみが問題となる。それは明かに公理化のプログラムである。それはアリストテレスの第二分析論に於て明かに數學との關係に於て[10]、より廣く展開され、エウクリッドによつて實際に遂行されてゐる處である。プラトンは此處ではこれ以上明瞭となり得なかつた。彼は數學原理論を同時に普遍的學問（マテシス）として、包括的なイデア論として現はさうとするからである。數學的對象に對して段階付けられた存在及び認識の仕方をアナログ（比例的）にすべて現實的なるものに對して遂行し、ソクラテスの辨證法と關係

せしめようとするからである。それ故、『ポリティア』の次の卷の數學的敎育に關する説明が補足とならねばならない。正しくヒュポテシスの公理化思想に關聯して純粹整數論の優位（VII 524c, 525d e）が知識論の構成に於て特別な意義を穫るのである。絶えずプラトンによつて考へ通され、考へ直された原理論の目標にして常に終局であり、同時に直觀と思惟一般との最も大膽な對質は、當時の數學上の數概念を新らしき數の概念によつて、數とイデアとの同一視、卽ちイデア數論によつて凌駕することである、而してこのイデア數論は同時に我々の究明が達しやうとしてゐる終結を意味するのである。

註⑩ Fr. Smolsen, Die Entw. d. Arist. Logik u. Rhetorik. Berlin 1929. H. Scholz, Die Axiomatik der Alten. Blätter für deutsche Philos. Berlin 1930. を參照。

III

イデア數論は、從來數學史家の關心よりも、創造的數學者、例へばゲオルク・カントルの如き人の關心を見出してゐる。⑪ モリッツ・カントル〔有名なる數學史家〕はこれに付いて何ら言ふ所がない。又それは尤もなのである、なぜなら當時資料的研究は猶ほ單なる端緒にあつたからである。この領域に對してオットー・トェプリッツのテーゼが惹起した衝動が最も本質的であつた、『イデア數論はロゴス、數學的比と或る關係をもつ。』⑫

エウドクソスの數學に對して甚だ影響する所多き一般的比論は全アカデミイ哲學に影響した。原型（フオアビルト）（παράδειγμα）の相似、模倣（μίμησις）、種々なる存在領域交互の映寫性や配列が『ポリテイア』の夫の箇所に於ける四分法の圖式の意味であつた。この圖式は最高のイデアから出づるべき全綜合を、分かたれた距離によつて、夫の「關係」としてと「比」としてとの二重の意味でのロゴスの法則の下に置

くのであつて、プラトンは今後絶えずこれを運用し、終には犀利な唯だ數學者にのみ了解され得る言葉の洒落まで入り込んでゐる。[13] 比例、卽ち等しき及び等しからざる比（ロゴス）の結合は、單に、いかにして整數的に比較し難きもの、通約し難きものが、それにも係らず相ひ測られ得るか、の精密な數學的問題に對してのみでなく、それを越えて可能的な相違及び相似の概念的規定に對して全然無制限的意義を有するのである。既にアカデミイに於て比例論の一定の論題が普遍的に、比較される對象の種類を顧慮することなく、求められ又發見されてゐたに違ひないのである。[14] 關係がそれの基底にされてゐる要素と獨立であることは同時にそれの——アカデミイに於て信じられてゐた如く——無制限的適用性を意味する。（卽ち）直觀と思惟との分裂はこのロゴスによつて終局的に調停された樣に見えた。人は常に、古代的思惟には「關係」の概念が缺除してゐた、而してこれが近代の論理學及び認識論に對して特色的であると、信じてゐる。このテーゼはもはや依持され得ない。比（ロゴス）に於て又比（ロゴイ）の結合に於て關係概念は古代の論理學に對しても立證された、然りそれは正しく、古代の論理學の主要問題、卽ち定義の問題に對して一つの新らしき解答を發見する助けとなるのである。

既に述べた如く、比（ロゴス）の結合は、いかにして多くの、少くとも三つの項が、その種類の如何に係らず各自の規定性を專ら夫の關係による關聯によつて保持するかの最も簡單な最も重要な例である。それ故、ロゴス論は自由な内含的定義に對する最も重要な發端であり、手引きとなる。プラトンは彼の言語、從て記號及び表現問題に當てられた對話篇（『クラテュロス』）の終りに於て、現實のその時々の言葉と獨立に存立する相互的關係の認識を基礎付けることを敢へてしてゐる。（オットー・トエ

プリッツによつて、始めてこの關聯の下に置かれた。)プラトンの後繼者スペウシッポスは概念的關係を「相似」(ὅμοια)として組織的全體に綜括しやうと努めた、そしてライプニッツ思想の大膽な先行として、すべての現實一般の通貫的相互的被制約性を主張し、從て凡ゆる概念は唯だ内含的にそれのすべての他のものに對する關係によつて嚴密に定義され得るであらうと主張した。この組織概念は統一的存在を頂點とするイデアのピラミッドの形式を採る、この統一的存在は益々分割されて行つて、終には分割され難きイデアの單位に到達する(diairesis)[15]。この關係概念の昂騰はそれに對應して狹義の數學的領域に於ける概念規定にとつて必然的な原理の還元といふ思想を益々力強く發展せしめるのである。この思想によつてある一定の、そしてそれによつて定義された體系の項の通貫的規定性は始めて學的效果多きものとなる。

正さしくこの思想がイデアと數との同一視の基礎に存する。プラトンはこの規定要素の還元をそれの數的限定として考へた。もし、圖形、聲音、音程、物體等々の諸對象の凡ゆる高次の部類が有限數の下位部類に分割され、これが更に又イデア原子〔不可分割的イデア〕に到る迄分割されるならば、このイデア原子に對應せしめられた個體、即ち具體的な音聲、音程等々は、イデア單位、(即ち)聲音aや四分ノ一音程が最少數の必要な規定によつて一義的に特性付けられるや否や、十分に定義されてゐるのである。具體的な個々の個體の偶然的性質も、すべてのものに屬する特性も、もしそれらが他の種類の個體から一義的に區別せしめるに必要でなければ、本質概念に採用されない。個別的形相や具體的個體に對するすべてこれらの可能的陳述は、「それは何であるか」τί ἐστιν の問ひに對して餘分のものとして、ペラス、即ち「限定され

たるもの」の中に採り入れられず、そして、無限に多くの陳述によつてのみ把握されるものであるから、アペイロン即ち「限定されざるもの」の中に解放される（Philebos 16 c)。直觀的內實のこの方法的構成的分析はアリストテレスによつて第二『分析論』の中に數學的實例に於て敎へこまれる――等邊三角形、二等邊三角形に關する命題が終には三角形そのものに關して。又、數や量や時間の間の比例に關する命題が終には一般的比例命題に。最後に、全然普遍的な論理的根本命題(κοινά)に。然しアリストテレスは此處にプラトンの指示に從て穫られた本質概念を、例へば自然科學的部類の領域に移し、かくして全く嚴密に、對象に關する學的陳述の內容を具體的直觀に於て與へられたものから分離することが出來るのである。

　これまではアリストテレスはプラトンと全然一致してゐるが、然し、彼はイデアのピラミッドの頂點にあつてすべての規定されたイデアの先に有り、それの順位を規定する所の最高原理の敎說に到るまでプラトンに隨ふことは出來ないのである。「一」と大・小の「不定的二」とが正さしくこのイデアである、これがより高次の數の概念とイデアの概念との同一視に導いたのである。これらの原理は、凡ゆる直觀、最も純粹な直觀からも自由なる、純粹な思惟の定立であるべきである。「一」は大・小の「二」と同樣に既に數學的數であるべきでない、これらの原理は又點や延長として空間的なるものと名付くべきでない、この「一」は、一般に、既に部類として概念的に總括されたペラスとして、猶ほ分岐すべきアペイロン（それの「始め」は不定的二として適切に名付け得やう）の不定的多樣と並立すべきでない。然しこれら三つの可能性はこれらの原理の中に潛勢的（ドュナメイ）に存すべきである、思惟し得る規定の最小限度であるべきであり、從

て、眞の始め（アルカイ）、定義された不規定性（アオリスティア）の原理、凡ゆる他の規定性を無視しても廢棄されないが、もしそのもの自身を無視するならば、すべて他のものを廢棄する所の一切の思惟に對する必然的制約、形式と內容との最も單純な關係の範型である。

さてこれらの二つの原理の結合からプラトンは先づ數を成立せしめる。自然整數を越えたより普遍的な數概念に付いての見解は次の諸段階に於て形成されたのである。『プラトン及びアリストテレスに於ける數と形態』の著書に於て私はレオン・ロバンの先蹤に從て、ギリシャ的數概念一般と後期のプラトンの見解とを新らしく關係させることに努め、特にギリシャ人に於いて、——エジプトの分數計算とは反對に——故意に分數を忌避したことを十分重んずることに努めた。例へば『ポリテイア』VII 525d の箇所の意味に於て——「身體」を持つ數（定數）、例へば一つのパン、一杯のビール、勿論一片の田畑等々も、人々はこれを分割することが出來る、それに反して一は、純粹な一は分割出來ない。もし素人がそれをなすならば、數學者は笑ひ直ちに、その分割を相殺する乘法を以て答へる。その時結果は一つの比（ロゴス）である。

トエプリッツはこの新らしい數を先づ比として、例へば $^2/_4$、$^3/_6$、$^4/_8$ の如き、すべての可能的衣裝をとり得る所の $^1/_2$ として、更に又距離、時間、或は對角線上の正方形と底邊上の正方形との如き平面をもとり得る如き比と考へた。

テイラア (A. E. Taylor) は拙著の批評 (Gnomon 1926) に於て大膽な一歩を進めた。彼は、トエプリッツの如く、幾何學の迂路をとつて理解し得る對角線と邊との比でなく、次の如き算出を、新らしき數概念の意味及び目標と見做した——大・小の不定的二は、二つの通約し難き量の無理數的（イラテイオナル）な關係に於て雙方から益々接近するが、常に依然と

して大き過ぎるか、或は小さ過ぎる如き數の關係を意味すると。

アリストテレスの一章、Metaphysica Δ 15 に基いて私は (Quellen und Studien I. 50) トェプリッツとテイラアとを結合してテイラアのテーゼを歷史的に一層正確に表はすことが出來た。アリストテレスは實際にその場所で ἀσύμμετρος ἀριθμός に付いて語つてゐる。『メタフェジカ』の功績の多い注釋家ロスは千九百二十三年に猶ほこの箇所を變更した。この章に基いて私は次の如く信じてゐる——大と小の不定的二は先づ單に「超過せるもの」と「不足せるもの」とである、未だ數的に規定されてゐない二つの量の不定的なロゴス、アリストテレスに於ける ἀόριστος λόγος である。このロゴスの中に全原理論の萌芽が存するのである、このロゴスで實際エウドクソスは通約し難きものや連續體の數學的問題を克服した。不定的ロゴスが他の原理、卽ち一(アインス)によつて規定されるならば、從て一定のロゴスになるならば、今や一(アインス)自身が數の單位(ツアレンアインハイト)となり、二のロゴスを測ることによつて、自然數がこれより成る、卽ち一(アインス)は眞の二に分裂する。この方法はヘルマン・ワイル⑯をして二進的數體系を回顧せしめてゐる。

これらの原理よりの次の演繹は諸幾何學に關する。アカデミイでは2は直線そのもの、若しくは直線のイデアとして解釋され、3は平面として、4は立體として解釋された。アリストテレスは云ふ、『數學者は言ふまでもなくその對象の感性的直觀的質料(金屬、木等々)を抽象する樣に、彼はこの理論に從て連續體をも抽象せねばならない、直線の數學的規定には二で十分である』等々。それ故この二はイデア、而も直線のイデアであらう、從て、或るものにはイデアは存在しないであらう、何故なら、例へば數は直接にイデアであらう

から。この甚だ進んだ概念の形式化は、古典的理論に於ける限りでは、單に端緒に止つたか、或は數學に於ける完成は我々には失はれてしまつてゐるかの何れかである。

思惟に對して純粋な空間直觀をも從屬せしめやうとする此の尊敬すべき試みを以て、我々の考察は完結したとしやう。古典的理論は偉大な大膽さを以て現實に、現象に、思惟の完備せる組織を對立せしめた、そして而も、私の見る限りでは、それは決して公理の氣儘な規定を假定してはゐない。星晨の運動はロゴスが自己自身の力から解かねばならない課題を提起した。τὰ φαινόμενα σῴζειν、現象を一つの聯關に於て理解し、かくしてそれを生成の流れの中に保持して置くことが、凡ゆる理論の意味であつた。ギリシャ人は、人間精神はそれがロゴスの自由な法則性に傾聽するその時にこそ最も現實に近付くと云ふ良き信念をもつてゐた、

そして彼等は世界・現實は宛かも大なる圖形の如く數學的ロゴスを直觀せしめるといふこの信念を次の如き單純な公式に表現した。ὁ θεὸς ἀεὶ γεωμετρεῖ.〔神は常に幾何學する。〕

註⑪ Zeitschrift f. Philos. u. philos. Krit. N. F. 88 (1886) 227.

⑫ Quellen und Studien I. 1.

⑬『ポリテイア』VII 534 a, πολλαπλάσιος λόγος. 534 d, ἄλογοι γραμμαί

⑭ An. post. I, 5, 74, 18ff. 此處に掲げられた ἐναλλάξ 問題の重要性に付いては Stenzel, Zahl und Gestalt, 2. Aufl. Index を參照。

⑮ Stenzel, Studien S. 60. Zahl und Gestalt S. 18.

⑯ Handbuch der Philosophie, II A. 50.
O. Becker, Mathem. Existenz, 1927, 205, Anm. 1; Quellen und Studien, I 466. をも參照。

⑰ Aristot. Met. Z. 11, 1036 b, 10. 猶ほ II 3, 1043 a 34 をも參照。

⑱