集合論の所謂「矛盾」に就て

——循環論法の吟味——

近藤洋逸

一、集合論の「矛盾」

集合論がカントルに依り創められて以來かれこれ數十年になる。其間それは數學のあらゆる部門に浸透した。函數論に幾何學に代數學に集合論は侵入し、數學の集合論化は數學の基本傾向の一つとさへ云はれてゐる。

然し集合論が輝しい發展を續けてゐる時、自身の中に自己の基礎そのものを脅かすクリシス、所謂集合論の「矛盾」が發生した。「矛盾」は世紀變りの數學界の靜寂な大氣を震はす暴風雨の如き效果を與へ、デデキントやフレーゲさへも自己の爲すべきところを知らなかつた。集合論は今や「矛盾」のために數學的存在の保證を失つたかのやうであつた。だが果してさうであらうか。先づ主要な「矛盾」の考察を始める。①

(1)エピメニデスの「矛盾」。クレタ島人エピメニデスは總てのクレタ島人は虚言者なりと云ひ、クレタ島人の語るそれ以外の語はすべて虚言なりと。然らば此エピメニデス自身の言葉も虚言であらうか。「私は虚言する」と語る者は若し彼の此語が虚言であるとすれば彼は眞理を語つてゐるのであり、若し眞を語つてゐるとすれば逆に虚言となるのである。

(2)ラッセルの「矛盾」。集合は自己自身を要素として含むか、又は含まぬ。此判斷は實際に斯様な二種の集合が實在するか否かに拘らず成立する。第二種の集合をノルマル集合と呼ぶ。今、集合Mを總てのノルマル集合の集

合とする。Mはノルマル集合であると假定するとMはM自身を要素として含み、Mはノルマル集合でない集合(M自身)を要素として含むこととなり假定に反する。次にMがノルマル集合でないと假定すればMは總てのノルマル集合の集合であるから必然的に自己自身を含むこととなり、Mがノルマル集合となる。卽ち孰れの假定からも前提と矛盾する結果に到達する。

(3) RとSを二の關係としRがSに對し關係Rを持たぬ時に常にRとSとの間に成立する關係をTとする。するとRとSが何であらうと「RがSに對して關係を持つ」は「RはSに對して關係Rを持たぬ」と對等(エキバレント)である。今RとSにTを代入すれば「TはTに對して關係Tを持つ」は「TはTに對して關係Tを持たぬ」と對等となり、此處に矛盾が生れる。

(4) ブラリ・フォルティの「矛盾」。集合論に依ると順序數(完整集合(ウエルオーダード・セット)の順序型)は大さに從ひ、順序附けられる。今凡ての順序數の集合Wを考へると、これは亦一つの完整集合であり、其順序數をΩとする。然るに順序數の逐次形成法則②——μを任意の順序數とし、μより小なる凡ての順序數を其の大さに從ひ排列する時は此集合W(μ)は完整集合であり、順序數μを持つ」——に依るとW中の各順序數はΩより小である故にΩはWに含まれぬ。これはWが凡ての順序數の集合なりとの假定に矛盾する。卽ち凡ての順序數の完整集合は矛盾せる概念である。

(5) 英語に依る有限整數の名稱のシラブルの數は整數が大となるに從ひ無際限に漸次增大する。何者、有限箇のシラブルにては有限箇の名稱しか作れぬから。故に或整數は少くも十九箇のシラブルを持ち、且此等の中には最小の整數がなければならぬ。"the least integer not nameable in fewer than nineteen syllables" は一定の整數111777である。然るに右記の規定は十八箇のシラブルを持つにすぎぬ。

(6) 或超限順序數は定義され他は定義されぬ。何者、可能な定義の全數はアレフ零であるが、超限順序數の箇數はアレフ零を超過するから。故に定義されざる順序數があり、此等の中にも最小の數がある。然るに此數たる

や「定義されざる最小數」の語に依り定義されてゐる。

(7) リシャルの「矛盾」。有限箇の語に依り定義される總ての小數の集合Eはアレフ箇の要素を持つから此等の要素は整列される。今小數Nを次の如く定義する。——n番目の小數のn番目の數字がpなる時はNに於けるn番目の數字をp+1(=9pならば零)とおく。するとNはEの凡ての要素と異る。にも拘らずNは有限箇の語で規定されてゐるからEに屬す。これ矛盾にほかならぬ。

(1) Fraenkel, Mengenlehre, S. 210 ff.
Whitehead & Russell, Principia Mathematica. Vol. I. p. 63—

(2) Fraenkel, ebenda, S. 187.

二、「矛盾」の分析。循環律

「矛盾」の源泉は何處に發してゐるのだらうか。ラッセルは次の如く考へる。①「矛盾」に共通な特色は自己關係(セルフレフアレンス)又は反射性(レフレクシヴネス)である。エピメニデスの言葉はそれ自身を自己の中に含んでゐる。(2)に於ては一層明かに反射性が現れてゐる。名稱及び定義の場合には名稱不可能性と定義不可能性自身が名稱及び定義の要素として含まれてゐる。

「矛盾」に於ては「凡て」の規定が用ゐられてゐるが、或種の凡ての場合に就き述べられた事自身から一つの新しい場合が生じ、これが前の凡ての場合に含まれるところに「矛盾」が成立する。此手續きを循環律(vicious-circle principle or fallacy)と名附ける。ラッセルは循環律を種々の形で定式化してゐる。②——(イ)「惡循環(ヴイシアス・サークル)の起るのは要素の集合が全體としての集合に依つてのみ定義される要素を含んでもよいとの想定に依る。」故に循環を避けるには——(ロ)「集合が自己の全體を一要素として含むものは集合たり得ず。」又は(ハ)「集合は其集合自らに依り定義される要素を含むを得ず。」又は(ニ)「或集合に全體があると假定した時に其全體に依らねば定義出來ぬ要素が其集合に含まれるならば其の集合に全體はない。」が絕對必要であると。ラッセルは無雜作に循環律を種々定式化してゐるが、我々は(ロ)と(ハ)(ニ)との間の本質的相違を看過することは出來ぬ。(ロ)を圖示化すると、

$$M=\{a, b, c, \ldots\ldots, M\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

となる。但しMは集合、a b c……は其の要素とする。

其時MがMの要素として現れるのが悪循環として禁止されるのである。之に反して(ハ)(ニ)は

$$M=\{a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots\} \quad \cdots\cdots\cdots(B)$$

に依り圖示される。Mは同じく集合であり、ａｂｃ…は其自身に於て確定せる要素を現し、之に反してｘｙｚ…は集合M自身をまつて始めて規定される要素である。(A)を主觀的循環律、(B)を客觀的循環律と呼ぶこととする。

既述の所謂集合論の「矛盾」が凡て主觀的循環律であることは自ら明かである。

ラッセルが何故循環律の中に此根本的差別あるを見出さなかつたか、此處にラッセル自身の立場の吟味が必要となつて來る。今は唯次のことを指摘するに止める。——客觀的循環律の否定は原子主義が然らしめるものであると、事實ラッセルは理論の出發點として個體(インディヴィドゥム)なるものを想定してゐる。[3]「個體」とは命題や函數たり得ぬものであると、又次の樣にも言ふ。[4]——命題に於て主辭としてのみ起り得る項を「固有名稱」と云ひ、之に依りて呼ばれ得べき諸對象を「個體」乃至「特殊體」と呼ぶと。即ち個體は述語たり得ぬ主語、云はば究極の主語なのである。

以上のラッセルの立場からは循環律はいづれも許し難きものであらう。主觀的循環律のみならず、客觀的循環律も成立を許されぬ。何者、Mをまつて始めて規定される要素ｘｙｚ…は原子主義から見れば無意味である。原子主義にあつては先づ要素が確定され此基礎の上に集合は定まる。重心は偏へに要素のみに置かれ集合は附加的のものにおし下げられてゐる。事實彼は組(クラス)をば假設(フィクション)であり、除去可能と考へてゐる。[5]

ラッセルは集合論の矛盾を除去するために循環律を定式化したが、この事が數學全體に對して如何なる影響を及ぼしたかを考察する必要がある。循環律禁止の宣言は數學に危機を與へたと言はれるが、一般の數學に現れる「循環」が孰れの型に屬するか、これの檢出は「危機」の考察にとつて必至である。型の相違に依つて對策も異るであらうから。

(1) Whitehead & Russell, loc. cit. p. 64.
(2) Whitehead & Russell, loc. cit. p. 39-40.
(3) Whitehead & Russell, loc. cit. p. 53, p. 57.
(4) Russell, Introduction to mathematical Philosophy. XIII.
(5) Whitehead & Russell, loc. cit. p. 35, p. 75. Russell, ibid. chap. XIII.

三、「循環律」の檢出

先づ數學解析に屬する部分から檢出を開始する。

極大極小の問題。——例へば函數$f(x)$を一變數xの連續實函數、Mを$f(x)$の値の全體の集合、mを此値中の最大又は最小とすれば、mは自己を含むMの上に規定される。客觀的循環律が貫徹してゐる。

極限の定義は種々あるが、先づ簡單な系列の極限を考察する。——今$A=\{a_n\}$を系列、lを一定の實數とし、任意に小なる正の實數が與へられた場合に之に應じて次の命題——「mより大なる各整數nに對して常に

$$|l-a_n|<\varepsilon \quad \text{……(C)}$$

なる不等式が成立する。」——を滿足する整數mが常に存在するならばlを系列Aの極限と云ふ。ところで右の定義に於てm及びnに應じて式(C)を充足するa_nが存在するか否かはA全體に依存する。且(C)式が成立するにはAとlとが或系列の「領野(フィールド)」に屬することが必要である。さもなければ(C)の關係は成立し得ないから。故にlが極限として規定されるにはA及びl自身を含んだ系列關係が背後に豫想され、客觀的循環律が用ゐられてゐる

其他極限の定義として種々ある。無限をも極限として許すハーンの定義、排列の概念を用ゐるハンチントンの定義、合理的方法を用ゐるスタインハウスの定義①が算へられるが、いづれも同樣の結果——客觀的循環律の貫徹——に達する。檢出は煩雜のため省略する。

扨、極限概念は集合論的に集積點の概念に依り擴張される。集積點とは——「集合のM點が無數に多く一點の任意の近傍に含まれる時、此PをMの集積點と呼ぶ。」ところでPの任意の近傍に無數のMの點が含まれるとの規定は集合M全體に關係する。更にPの近傍がMの點を含み得るためにはPとMを包括する集合が背後に豫想されね

ばならぬ。Pが客觀的循環律に依り規定されてゐることは明瞭である。

次に連續集合(實數集合)に於ける極限(上限、下限)の存在定理の檢討に移る。②——「Mを下方有界な連續集合とすれば全ての下界中の最大(即ち下限)が存在する。」「Mを上方有界な連續集合とすれば全ての上界中の最小(上限)が存在する。」上限下限の定義そのものの中に既に明瞭に循環規定、しかも客觀的なそれが用ゐられてゐる。「全ての」なる規定を見よ。全體中での最大最小は全體をまつて始めて規定されるのであるから。先づ下限の場合に就ての證明を考察する。「全ての」下界の集合を$\mathfrak{A}_1$、殘りの「全ての」數の集合を$\mathfrak{A}_2$とすれば此組分けは一つの實數の切斷($\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$)をなす。「實數の連續性」に依り一數αが存在する。此αは$\mathfrak{A}_1$の最大か又は$\mathfrak{A}_2$の最小かである。然るに後の場合は起り得ぬ。何者、若しαが$\mathfrak{A}_2$に屬すと下界でないから$\alpha > x$を滿足する集合Mの一數xがある。「實數の稠密性」から$\alpha > \alpha^1 > x$の關係を持つ一數α^1があり、α^1は下界でないから$\mathfrak{A}_2$に屬し、しかもαより小である。これはαが$\mathfrak{A}_2$の最小であるとの規定に矛盾する。故にαは$\mathfrak{A}_1$の最大、即ち下限であることが立證される。

以上の證明過程中の「括弧」の部分を注目するならば其處には明かに實數全體の規定性の使用に氣付くであらう。下限存在は自己を含む全體の上に歸結される。切斷の操作の裡にひそむ循環に就ては後に述べる。

極限に就ては既に述べたが、それは一箇の極限のみが存在する場合であつたが、更に廣般に極限値の問題を分析しよう③。

先づ最大極限値の定義。任意の數列$\{a_n\}$あり。

(A)$\{a_n\}$が上界を持たぬ時は$\{a_n\}$の最大極限値は∞と言ふ。此時$\{a_n\}$と∞を成立させる關係の領野(フィールド)が前提されざる限り右の規定は無意味となる。

(B)$\{a_n\}$が上界を持つ時は$\{a_{n+p}\}$(nは固定、pは0, 1, 2,…)も上界を持つ。故に前記の定理に依り上限γ_nが存在する。(此處に既に客觀的循環律が使用される。)

次に數列$\{\gamma_n\}$は單調減少である。

(B')$\{\gamma_n\}$が下界を持たぬ時は$\{a_n\}$の最大極限値を$-\infty$

と言ふ(前記(A)の規定を參照)。(B″)〔r_n〕が下界を持つ時は前記定理に依り下限rが存在する(前記(B)を見よ)。rと{a_n}の最大極限値と呼ぶ。即ちrは二重の循環(第一回は(A)(B)にて、第二回は(B′)(B″)に於て)を通じて規定される。

最小極限値の場合にも全く照應的な規定が見出される。極限値とは最大、最小極限値が一致する時に成立する。極限値は斯くの如き複雜な循環過程を通じて規定される。

次ぎに收斂數列の定義。④——「所與の一數列{a_n}が有限極限値を持つ時{a_n}を收斂數列又は{a_n}を收斂すると云ふ。」收斂なる過程は數學の重要且普遍的概念であるが、これが客觀的循環なしには規定不能である事情は循環律禁止が數學に深刻な動搖を與へずにはおかぬことを直ちに推知させる。

デデキントの實數定義、「切斷」。——デデキントの無理數論の中樞は所謂切斷(シユニツト)概念である。今有理數全體が次の條件を滿足する如く何等かの仕方で二組A_1A_2に分たれたとする。——(イ)A_1A_2は孰れも空集合ならず。(ロ)A_1の各數はA_2の各數より小である。此條件を滿足する組分けを切斷、A_1を切斷の下組、A_2を上組と言ふ。切斷には次の種類がある。——(Ⅰ)下組に最大數があり上組に最小數がない。(Ⅱ)下組に最大數がなく上組に最小數がある。(Ⅲ)下組に最大數が無く上組に最小數が無い。(Ⅳ)下組に最大數があり、上組に最小數がある。但し有理數の稠密性に依り(Ⅳ)は不可能。(Ⅰ)(Ⅱ)にては有理數としての實數が規定される。此時切斷に於て循環が用ゐられる。何者切斷は自己を含む有理數全體の上に規定されてゐるから(Ⅲ)の切斷は無理數を定めると云ふ。此時も循環は不可避である。全有理數は系列關係に依り規定されて居り、而て切斷が此系列關係の「領野」に屬することは最初から想定されてゐる。即ち該切斷は自己を含む全體(系列關係の領野)の上に規定されてゐる。

カントルの實數定義。⑥——此定義の中心概念は基本列(フンダメンタル・ライエ)の概念である。任意の正有理數が與へられた時$n=1, 2, \ldots$に對して所與の有理數數列$a_1, a_2, a_3, \ldots$が$|a_n - a_{n+m}| < \varepsilon$

を成立させる様に整數nが定められるならば之を基本列と呼ぶ。此基本列$\{a_n\}$を以て新しい一數を定義し之を實數と呼ぶのである。かくて零への收斂數列を以て實數が定義されてゐるから收斂數列の持つ循環性がそのまゝ含まれてゐる。（εは任意に小なる正數とする）

扨、カントルの實數定義の弱點は同一値に收斂する基本列が無數に可能なところにある。從つて此等收斂數列の相等大小が定義されねばならぬ。今任意の正有理數が與へられる時$m=1,2,\ldots$に對して、$|a_{n+m}-b_{n+m}|<\varepsilon$が成立する様に$n$が定められる時に$\alpha=\{a_n\}$及び$\beta=\{b_n\}$は相等しいと呼ぶ。結局收斂數列の相等性は零への收斂に歸着されるが、零に收斂する有理數列も無數にある。其等有理數列の差の數列は凡て零に收斂するから凡て相等しい數と云はれる。此處で注目すべきは相等規定の二度の使用である。即ち一般數列の場合と零へ收斂する數列の場合であるが、二度の定義が有意味であるためには各々の定義が用ゐられた各事態が本質的に相互に相通ずるものでなければならぬ。然るに、零への有理收斂數列では數列の收斂すべき數が明瞭に定立されてゐるが、一般の有理收斂數列にては收斂すべき目標の數が措定されてゐない。これはカントルが實數を有理數領域内のみで定義しようとした事に起因する。有理數自身の領域に停まる限り收斂すべき實數を假定することは無規定のものを無規定のまゝ定立する事であり無意味である。故に相等の二度の定義に意味を與へるには有理數自身の領域を踏越えねばならぬ。カントルは基本列自身を實數と規定することに依り無規定の實數の定立を避けようとしたが、此企圖は不成功と論斷する外はない。實數の定義は實數領域と既知の有理收斂數列の相互規定のうちに成立する。即ち凡ての實數は自己を含む實數領域の中に有理收斂數列を媒介として規定される。斯くて循環は零の周圍のみならず凡ての實數規定にもかゝはる。

ワイエルストラスの收斂加集合（konvergente additive Aggregate）に依る實數定義[7]、ラッセルのセグメントに依る實數定義[8]も同樣に論斷することが出來る。

更に實數の公理的定義なるものがある。ヒルベルト[9]と

ハンチントンの[10]定義はさうである。公理的定義法とは無定義の對象と一群の合理系を與へて無定義の對象に内容を與へて行く方法であるが、此公理的方法は決して客觀的循環律を無用化する力を持つてゐない。寧ろ循環律の一型とも見られ得る。何者、先づ未定義の對象が假定され此對象の性質が一群の公理に依り展開されて行く方法は原子論的に「個體」を絶對的基礎とする方法とは全く對蹠的でさへある。公理的方法に於ては全體（公理系に依り表示される個物間の基本聯關の總體）と要素（無術語的に表現された對象）との相互規定の展開が中心を貫いてゐる。

（1）米山國藏、「實變數函數論」參照。
（2）能代淸、「實數及び複素數の性質」（岩波數學講座）二九頁以下。
（3）能代、前掲書、三〇頁以下。
（4）能代、前掲書、四〇頁以下。
（5）能代、前掲書、四頁以下、米山、數學の基礎、中卷、一九二頁。
（6）G・カントル、全集、一八六頁以下。
能代、前掲書、七〇頁以下、米山、數學の基礎、中卷、一七八頁。
（7）V. Dantscher, Vorlesungen über die Weierstrasssche Theorie der irrationalen Zahlen. (1908).
G. Stammler, Der Zahlbegriff seit Gauss. S. 91 ff.
米山、前掲書、中卷、一五三頁以下。
（8）Whitehead & Russell, Vol. II. p. 651.
Russell, loc. cit. chap. VII.
（9）Hilbert, Über den Zahlbegriff. (Grundl. d. Geom. Anhang VI.)
（10）米山、前掲書、中卷、四四頁。

次に連續の問題に移る。デデキント、ハンティントンは單一排列集合の連續の合理的規定[1]を與へてゐるが、此場合にも循環律の檢出は容易である。即ち集合を含む排列關係の「領野」が基礎となつて集合の連續不連續が規定されるのである。

高名なカントルの連續の集合論的定義[2]の檢討に移る。先づ聯結集合の規定——集合$\mathfrak{M}$の任意の二點ABを採る時任意の正數に對して$AP_1<\varepsilon$, $P_1P_2<\varepsilon$, …, $PB<\varepsilon$を滿足する有限箇の數$P_1P_2\cdots\cdots P_n$が常に$\mathfrak{M}$に含まれる時$\mathfrak{M}$を聯結集合と呼ぶ。次に集積點（カントルは Grenzelement, Hauptelement と呼んでゐる）を使用して閉集合の概念を定める。（集積點にからまる客觀的循環が此處に持ちこまれてゐるのを看過してはならぬ。）閉集合とは——集合𝔐が集積點を全く有せざるか又は𝔐の集積點が悉く𝔐に屬する如き集合である。𝔐全體に依り始めて規定される集積點が𝔐自身に屬すると規定されてゐるから、客觀的循環律の存在は明かである。先づ𝔐全體に依り集積點が規定され（全體→要素）、次ぎに此集積點自身に依り𝔐の性質（閉集合）が規定されて行く（要素→全體）。連續集合は聯結且閉集合と定義される。次ぎに

冪集合の定義。任意の集合Nの凡ての部分集合の集合をNの冪集合と云ふ。今此冪集合の各要素、即ちNの部分集合から代表要素を選出する。③ 此代表要素から作られた集合は同じくNの部分集合であり、從つて冪集合の一要素である。だが此要素の規定には冪集合全體が使用されねばならぬ。客觀的循環の貫徹。

カントルの有名な對角線法に依る連續の超可附番性の證明は冪集合の規定を用ゐる。卽ち此處にも客觀的循環律が活用される。此論法を用ゐて證明される所謂「カントルの定理」も循環性から自由ではあり得ない。

冪集合の概念は集合論の不可缺の重要概念であり、ツェルメロ及びフレンケルの集合論公理系に於ても公理として定式づけられてゐる。更に「冪集合公理」は第五公理「分出の公理（アウスゾンデルング）」に關聯を持つことに依り後者にも循環性を與へる。ツェルメロの「分出公理」は被確定（デフイニット）の概念を用ゐるが、フレンケルは之を曖昧なりとして函數概念を導入する—定義（4a）—「變集合xの函數として各固定（コンスタント）集合、集合x自身、和集合$\mathfrak{S}x$、冪集合$\mathfrak{U}x$があり、更に$\varphi(x)$と$\psi(x)$をxの函數とすれば組$\{\varphi(x), \psi(x)\}$及び函數の函數$\varphi(\psi(x))$が存在する。」明かに函數概念中に冪集合の規定がいりこんでゐる。ところで「分出公理」とは—「mを集合、$\varphi(x)$と$\psi(x)$は變項xの函數。然る時は$\varphi(x) \varepsilon \psi(x)$なる關係を充足するmの凡ての要素の集合$\mathfrak{m}$が在る。εの代りに$\overline{\varepsilon}$をおきかへるも同樣である。」循環性は函數概念を通じて侵入してゐる。

更に次の事も銘記すべきであらう。——「分出の公理」

に於ては全體から部分(要素は部分の特殊態)へと規定運動が進んでゐる。故に客觀的循環律にも二箇の型が區別されねばならぬ。既述のデデキントの切斷定義では部分↓全體↓部分の規定進行があるが、「分出公理」では全體↓部分↓全體の規定が進められてゐる。勿論、全體から部分が規定されることは全體から部分が形式論理的に演繹されることではない。全體から部分の特殊規定が直接に流出するのではない。客觀的循環律に於ては特殊と普遍、全體と部分とが相互に他の中に自己の根據を持つことに依つて原理的に統一されてゐるのである。此注意は肝要である。此統一を看過するならば平板な普遍主義形式主義に陷るか、或は狹隘な原子主義に陷らざるを得ない。客觀的循環律の二型とは全體か或は部分が規定の發足點として選ばれることから生ずるにすぎぬ。

扨、集合論「矛盾」排除に關聯して次の事を注意せねばならない。ツェルメロ其他の集合論公理系にては出發點を公理に依り嚴密に制限し、之に依り「矛盾」を排除してゐる。此制限は第一公理の「確定の公理」と上述の「分出公理」に依つてなされる。ツェルメロは被確定性の概念に依り、フレンケルは之を更に精密化した函數の概念に依つて、「有限的に定義される」小數とか、「自己を要素として含む集合の凡ての集合」とか、「凡ての順序數の集合」とかの曖昧な概念(これが「矛盾」の源泉である)は其成立の餘地を完全に奪はれてしまふのである。これに依り主觀的循環は事實上排除される。しかもまさに客觀的循環律を利用してである。

順序の集合論は「置換公理」[6]を必要とするが此公理は函數概念を用ひることに依り客觀的循環律を免れることは出來ぬ。

J.フォン・ノイマンの集合論公理系は[7]異色あり考察に價する。彼は集合概念を函數概念で置き換へ概念の曖昧化を防いでゐること、及び「過大」"zu gross"「過大でない」"nicht zu gross"等の概念を導入し、以てツェルメロの「分出公理」、フレンケルの「置換公理」、更に整列可能性を含むことに依り「選擇公理」をも不用に歸する一箇の强力な公理を發見したことにある。即ち公理IV.2であ

る。

ノイマンの出發點は變項の領域と函數の領域であり、此等の内容は公理系に依り規定される。彼は變項をⅠ物(ディング)、函數をⅡ物と呼ぶ、兩領域は一部相蓋ふが完全に同一ではない。函數にして變項たるものをⅠ・Ⅱ物と呼んでゐる。變項yの函數xは〔x, y〕で表示され、〔x, y〕は亦Ⅰ物である。ところでⅠ・Ⅱ物たり得る條件は如何。今任意に變項Aを選び函數aが過度ではない“nicht zu oft”場合、即ち過多“zu viel”な變項xに對してAとは異る値〔ax〕を持つのでない場合にのみaはⅠ物たり得る。又斯うも言ひ得る。函數aは次の場合にのみⅠ物たり得ない。——〔ax〕≠Aを滿足する變項xの全體が凡ての變項一般に寫(アップ)映(ビルデン)される時である。(寫映とは$y=$〔by〕の形を持つ。)

公理Ⅳ.2.は右の事實を次の如く定式化する。——「Ⅱ物aは各Ⅰ物xに對して〔ay〕≠A,〔by〕=x を滿足するⅡ物bが存在する時にのみⅠ.Ⅱ物たり得ぬ。」

集合(メンゲ)の定義。先づ常に〔ax〕=A 又は =B である如きⅡ物aを領域(ベライヒ)と定義し、Ⅰ・Ⅱ物を集合と規定する。即ち集合とは過大ならざる集合(慣用句を用ゐると)なのである。

扨、公理Ⅳ.2.に於てⅡ物aが如何にしてⅠ物たり得るかの規定を檢討する。aがⅠ領域の任意の一物Aに對して〔ay〕≠A であるか、或は〔ay〕=A であるかの決定はⅠ物全體の領域に關係して始めて可能である。且〔by〕=x を滿足するbがⅡ物の領域に存在するか否かも實にⅡ領域全體に關聯して始めて規定可能である。即ちⅡ物aがⅠ・Ⅱ物たり得るにはⅡ物全體Ⅰ物全體に依り規定されねばならぬ。しかもaは元來Ⅱ物であり或條件下にては且亦Ⅰ物たり得る。aは自己を含む全體の上に規定されざるを得ない。即ち客觀的循環律なしにはⅣ.2.の成立は不可能である。

次は最大(小)極限集合。ツェルメロやデデキントの集合理論では屢〻次の如き推論が重要な役目を演じる。今Mを性質Eを持つ凡ての集合の集合とする。Mの凡ての要素の合併集合(フェライニグングスメンゲ)Sと積集合(ドゥルヒシュニット)Dは再び性質Eを持つ。前者を最大極限集合、後者を最小極限集合と云ひ、此S及び

Dは孰れもMに依り規定されるMの要素なのである。此處にも客觀的循環が嚴存してゐる。

「對等の定理」(ベルンシュタインの定理)[8]は其の證明中に最小極限集合を用ゐるから同じく客觀的循環から自由ではあり得ない。

選擇公理——[9]「Mを一集合とし其の要素は凡て少くとも一箇宛の要素を持ち且相互に素な集合とすればMの各要素たる集合と唯一箇の要素を共有する一集合Sが存在する。」此公理は「分出公理」と同型の循環を持ち、アトムからの構成を唯一の方法と心得る構成主義原子主義からは容認出來ぬ公理である。[10]ラッセルが本公理の成立に疑惑を感じてゐるのは彼の原子主義に由來する。此公理はツェルメロに依り發見されたものであり、無限集合論に於て其の本領を發揮するが此公理は集合論に止まらず算術學にさへ適用されるのである。例へば集合數(カーディナルツァール)の和や積の規定、ツェルメロの整列可能定理も本公理なしには成立の根據を失ふ。

ツェルメロの整列可能定理。[11]此定理の證明の中樞をなすものはMの凡ての空ならざる部分集合からの代表要素の選出である。卽ち選擇公理は不可缺である。加之、第一證明に於ける最大ガンマ列Vの規定は最大極限集合の規定を不可缺とする。更に第二證明に於ては集合の凡ての部分集合の集合が θ 連鎖であるとの規定には羃集合の循環が、及び極小連鎖△の規定のうちには最小極限集合の循環がもちこまれてゐる。しかも此△たるや實に證明の中心なのである。かくの如く整列可能定理の中には循環が縱橫に驅使されてゐる。

此定理及び前出のベルンシュタインの定理の上に支へられる『比較可能の定理』[12]——「任意の二集合は相互對等か、又は其等の一箇は他より小なる集合數を持つ。故に相等しからざる二箇の集合數のうち常に一は他より小である」——も客觀的循環律で以て貫通されてゐる。

次に『超歸納法』。——「定理Eが整列集合𝔐の最初の要素に關し成立つとす。今𝔐の要素aより前にある要素に就きEが成立すればaに就ても亦成立する事が證明されるならばEは𝔐の全ての要素に就ても成立する。」此論法

は自然數に就て行はれる所謂數學的歸納法を整列集合にまで擴張したものであるが、此擴張の迫推力は偏にツェルメロの上記定理に發する。

それ故に超歸納法に依る函數値の決定[13]も客觀的循環を超出するものではない。

既に我々は實數の數論的定義と云はれるデデキント、カントル、ワイエルストラスの定義の裡に於ける客觀的循環の存在を論じたが、實數論の最新のものと稱される抽象代數的論法に依る實數論、所謂「代數的實閉體」に依る實數論[14]はツェルメロの整列可能定理を縱横に驅使してゐる。客觀的循環から自由であり得ぬことは自明的である。

抽象空間論の基礎としての導來集合。[15]——一般集合Rを考へ其の凡ての部分集合Mにいま一箇の部分集合M^1を對應させる。M^1をMの導來集合と呼ぶ。此「對應」の規定を特殊化する事に依り抽象空間論が展開されて行くのであるが、此の導來集合定義そのものの中には「凡ての」なる規定を通じて集合Rの部分集合の全體が關聯を持つて來る。しかも導來集合はRの一部分集合なのである。羃集合規定と全く同じ循環が貫徹してゐる。

又位相幾何學の基本概念である一對一の連續寫像の規定の中にも、連續寫像が導來集合の概念に依り規定される以上は、客觀的循環の洗禮は不可避である。

最後にカントルの整列集合の定義[16]の中にも客觀的循環があることを注意しておく。

(1) 米山 實變數函數論、二二八頁以下。
(2) カントル、全集、三〇八頁以下、米山、前揭書、二三六頁。
(3) Nが無限集合なる時は選擇公理なくては此操作不可能である。選出分理自身に就ては後を見よ。
(4) フレンケル、集合論、四六頁以下、能代、集合論、一二頁以下。
(5) Fraenkel, Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre. S. 104 ff.
(6) Fraenkel, ebenda. S. 115.
(7) J. v. Neumann, Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, Crelle Journal. Bd. 154. Heft 1/2. S. 219 ff.
(8) 能代、集合論、一四頁。

（9）フレンケル、集合論、二八三頁以下。
（10）ラッセル、前掲書、第十二章。
（11）能代、集合論、五四―五七頁。
Van der Waerden, Moderne Algebra, Bd. I. S. 194 ff.
（12）Fraenkel, Mengenlehre, S. 205.
（13）Van der Waerden, ebenda. §. 59. 正田、抽象代數學二三二頁以下。
（14）Van der Waerden, ebenda. Kap. X. 正田、同前、二四二頁以下。
（15）功力、抽象空間論、（岩波數學講座）六頁。
（16）Fraenkel, ebenda. S. 167.

四、循環律の吟味

（I）「循環律」成立の根據。

我々は前節の分析の歸結として數學に使用される循環が悉く客觀的であり、所謂集合論の「矛盾」に見られる循環と全く類を異にすることを斷定出來る。客觀的循環にて集合の規定と相俟つて要素が規定されるとは決して主觀的循環に於ける如く集合がそのまゝ自己の或要素であると言ふ集合と要素との抽象的同一ではない。集合が其要素から區別されねばならぬとは實に集合論の出發點である。ブラリ・フォルティ及びラッセルが集合は其要素の

或物と同一であり得るとの主張の中にこそ「矛盾」成立の根據がある。ストゥディの語る如く①――「集合論の所謂二律背反の總ては自己自身を要素として含む全體（數多性）の概念を矛盾なきものと考へ、加之、集合と名付ける事に依り生ずる。それは（カントルの）集合論の何等關知することではない。」實に「凡ての集合の集合」「凡ての物の集合」とかは正當に集合の概念に値しない概念である。「凡ての超限序數の集合」と言ふブラリ・フォルティの「矛盾」も實は無意味なものにすぎぬ。全超限序數を包括するものは既に通常の意味の集合ではない。それは超限序數一般の概念にすぎぬ。斯うした序數一般を個々の序數と同一の平面に並列させるところに惡しき循環（主觀的循環）が成立する。卽ちブラリ・フォルティの「矛盾」は普遍と特殊を統一的具體的にではなく抽象的同一的に把握することから生れる。故に全體と部分、普遍と特殊の統一（對立の統一）の見地こそブラリ・フォルティの「矛盾」に最後的運命を與へる。其他の「背理」も同様の運命にある。だが之に對して客觀的循環律は全體部分の抽象的同一で

はなく、部分が全體に依り、要素が集合に依り規定される事を主張する。即ち全體と部分との區別に於ける統一を主張する。

矛盾はいま一つの源泉を持つてゐる。リシャルの「矛盾」には「言葉に依る定義」の句がある如く意味の作用が命題の中に導入されてゐる。[2] 此處に危險がある。命題の意味は數學的力學的に文字から一意的に合成されることは出來ない。言表の意味は意識の對象に對する關係であり、對象間の關係と同一視することは許されぬ。數と文字との對應關係はもはや數學的なものではない。「有限的に定義可能」なる概念は數學の領域を如何に擴張するも數學的概念とはなり得ない。斯樣な概念の漠然を避けるには集合論公理系の如く概念の出發點を嚴密に規定しなければならない。

尙、集合と要素の抽象的同一（主觀的循環律の源泉）排除のためにも集合論公理系は有效である。ツェルメロ、フレンケルの公理系では第一公理（確定性公理）と第五公理（分出公理）に依り集合構成の無制限な自由が規整されてゐる。ノイマンの公理 IV.2. は完全に集合と要素の抽象的同一を排除する力を持つてゐる、勿論排除されるものは主觀的循環である。

前節「檢出」の今一箇の結果として客觀的循環の中に二側面の在るを知る。循環律の兩極は集合と要素、全體と部分であるが、此兩極の孰れが規定の發足點となるかに從ひ客觀的循環のうちに更に二型を析出し得る。デデキント切斷定義は部分→全體→部分の循環に依り、反之、「分出公理」では全體→部分→全體の循環に依り內容が規定されて行く。此兩型は數學の所謂二大方法—公理的方法と發生的方法—に關聯を持つ事に依り數學の方法論に何等かの手がかりを與へ得るものではないかと想像される。之に就ては別の機會に述べる。

(Ⅱ) 客觀的循環律に對する修正主義。

客觀的循環律に對しては種々の態度がとられてゐる。一方ではラッセル、ホワイトヘッド及びブロウワー、ワイルの如く循環律一般を否定し去り此間隙を自己獨自の理論、或は「還元可能の公理」を以て、或は「直觀」を以て

充塡する。

又客觀的循環律に對し修正的態度をとるものがある。ヒルベルトを先頭とする形式主義は客觀的循環律を誘導する凡ての無限なものを實質的內容なき理念(イデー)と考へ其等の無矛盾性の要求に滿足する。彼等の立場が明かに精緻な有限主義であり、全體と部分、集合と要素、有限と無限との統一の見地の否定者であることに於ては論理學派、直觀主義と相異るところはない。だが無矛盾性に依り循環律の無害を實證せんとする態度は後者と區別すべき點であり、修正派と呼ぶ理由である。(後を見よ。)

今一つの修正派がある。彼等は客觀的循環律の禁止が數學體系を崩壞させる危險を感じて客觀的循環律の中に更に區別をかまへ、一部のみを禁止しようとする。(3)直觀主義開拓者の一人ポアンカレがさうである。彼は前述のツェルメロ定理の循環律を否定すべしとする。だが之に對しツェルメロは函數の極大極小値の中にも循環律があることを指摘し斯る古典的なものをも禁止するのは正氣の沙汰ではないと應答した。勿論ポアンカレも後者を否定する勇氣はなかつた。彼は兩者を區別する途を求めた。卽ち極大極小値問題では循環を無用化することが可能であると。函數$f(x)$の凡ての可能な値の中で最小を規定する代りに有理數xに對して生ずる$f(x)$の凡ての値の下限を考へればよいとする。此下限は$f(x)$の値であるを要しないから、此處には循環は無いと。何者、下限は有理數xの$f(x)$の全ての値の集合の要素である場合にも定義に依つてではなく定義と存在確認(Existenzversicherung)に續く證明に依つて循環が行はれるにすぎぬと。だがツェルメロは次の樣に應酬する。ツェルメロ定理の證明は極大極小値證明と本質に於て毫も變りはない。卽ちガンマ列Σは先づ全ガンマ列の和として性質的に定義され存在するものとして確認され、之に續いてΣが偶然に(定義に依るのでなく其自身がガンマ列として(從つて最大極限として)存在することが證明されるのであると。

ツェルメロの云ふ如く兩者の場合孰れに於ても全體に依る部分の規定が直接に定義の形ではなく、證明なる幾多の媒介の環を經て遂行されてゐる。ポアンカレの攻擊

は的外れである。だが問題は、定義と證明とが果して循環律を本質的に區別させ、前者に依る循環が危險であり後者に依る循環が安全と斷言し得るかにある。定義も證明も同じく規定である。兩者の相違は前者が直接に、後者が媒介を經て進むにすぎぬ。我々に重要なのは全體に依る部分の規定である。又、ツェルメロが「偶然に」の語を用ゐるのは奇怪である。Σが凡てのガンマ列の集合として規定される事に依りΣ自身がガンマ列であるとの規定が證明を經て必然的に歸結されるのではないか。「Σは凡てのガンマ列の和集合」なる大前提を除くならばΣがガンマ列なりとの規定に達することは出來ぬ。又一度此前提を措定すれば否應なしに一定の歸結に達する。これをも「偶然」と稱するのは數學の推理に盲目であるとしか云へない。全體に依る部分の規定は「證明」の媒介を經ても決して力を失はぬ。全體に依る部分の規定に依るも證明に依るも何等自己の本質を變へるものではない。要之ポアンカレの企圖は失敗である。

フレンケルの循環律論(4)もポアンカレ、ツェルメロの同一線上に立つてゐる。修正派の一人にすぎぬ。

最後にヘルダーの循環論(5)を吟味する。――彼は上限構成を考察しワイルが其中に循環律があるとの批評に反對する。

今無限多の絶對實數の集合Aが與へられる。

(G) $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$

絶對實数は絶對有理數の「切斷」で規定するから此處に既に循環の實存を知る。更に(G)の有界が必要である。集合Mの如何なる數xをとるも $x \leqq b$ なる一數bがある時Mは上方有界なりと言ふ。此定義はbの存在、從つて集合Mの有界性はMとbを含む關係の領野(フィールド)に於て定義される。循環は明白である。(G)が有界ならば上限γを次の如く構成する。――所與の數xは(G)なる切斷の任意の一つに於ける下位の數である時此等の數xを以て集合Mを作る。γはMとMに屬しない有理數集合Mに依る「切斷」として定義される。此處にも循環がある。

然るにヘルダーは右の操作を循環でないと主張する。「數γは循環論なしに構成された後に始めて其存在が附

加的に主張される」のみと。然らば彼の謂ふ循環論法とは何か。數γの構成の際「數はγにγ比して小なる有理數xの全體に依つて定義される」と云はれる時、之が若し定義とされるならば此定義は確かに一つの謬れる循環を最も悪しき形で現すものであらうと彼は云ふ。卽ち此場合には數γの構成に於て、換言すれば數xの全體の構成に於て此全體自身が使用されてゐると。ヘルダーの所謂循環とはかくの如きものである。だが斯る悪循環は我々が上限存在定理分析に依り得た循環律とは何の共通點もない。前者は數一般の順序關係の最も拙劣な表現にすぎぬ。だが上限は更に特殊な規定であり單純な順序關係に依つては規定されない。上限定理の證明は實數の連續性を介して證明される。然るにヘルダーの所謂「循環」では元來疑問たるべきγを使用して「γに比して小なる」を用ゐる之に依り有理集合Mが規定され然る後に逆にMに依りγを規定する。だが之は客觀的循環ではない。何者γは自己を含んだ全體の上に規定されてゐるのではなくγを非γたるMに依り直接に無媒介に規定してゐるのみ。此場合γこそ規定さるべき當の對象であるからM自身も無意味となる。又γとMとを含む全體を考へても其處には單に實數の順序關係が不手際に表示されてゐるばかりである。ヘルダーの所謂循環は無意味な同語反覆、文字通り悪しき循環である。だが我々は非γたるMを上方有界集合と規定し此處から實數の連續性を媒介として有效な循環を成しとげる。上限存在定理は次の如く進行する。——所與の集合（Cと呼ぶ）から實數領域（Rと呼ぶ）の順序關係を媒介として有界性の定義（Dと呼ぶ）へ、これから「凡ての上界」（Eと呼ぶ）へ。之は次の推論——第一、第二類の形成（Aと呼ぶ）が（R）の連續性を媒介として切斷定義（Bと呼ぶ）を得る——を介して目的の最小の上限、卽ち「上限」（Xと呼ぶ）に達する。若し上限存在を「定義」と考へるならば存在するのは（E）と（X）の直接無媒介の關係のみ。此處にヘルダー流の悪循環が發生する。（E）と（X）とが無媒介の關係におかれるならば無媒介なる空虛を充塡するために（E）の性質が（X）に依り、此（E）に依り（X）が規定される假想の環が想定されるばかりである。

だが勿論客觀循環律に依る定義一般を排除しようと云ふのではない。例へば切斷定義((A)→(R)→(B))、有界性定義((C)→(R)→(D))は定義に依る循環である。何が定理であり何が定義であるかを識別するのは數學自身の課題である。

(Ⅲ) 客觀的循環律と無限の問題

元來集合論の「矛盾」は「總ての」なる規定に看取される如く無限、特に無限と聯關して生じた。循環は悉く無限(特に連續)に於て問題となつて來た。ところで循環律のうち主觀的循環律は排除され得るから、今や問題は無限と客觀的循環律とに關係して來る。

客觀的循環律が無限(連續)の數學的處理に不可避であることは循環律の「檢出」から容易に洞見される。羃集合は自然數集合から連續への道路をひらく。カントル、ワイエルストラス、デデキントの實數定義は悉く客觀循環律を使用する。連續の本質たる極限の定義、上(下)限存在定理も客觀循環律なしにはすまされぬ。抽象代數に依る實數論も整列可能定理に支へられてゐる。客觀的循環律も無限が對象となる時始めて效力を發揮し、從つて問題ともなる。「羃集合」も有限集合では「對の公理」と「合一の公理」で代用可能である。無限と云つても連續の持つ高度の無限が對象となる時循環は更に一層の力を發揮する。極限や實數に關する諸公理諸基本定理を見よ。

客觀的循環律に依り自然數、有理數から實數へ、不連續から連續へと進み得る。だが此進行に依り實數、連續が有理數へ不連續へ完全に解消され、原子主義への路を切り開くのではない。カントルの連續の抽象的定義を想起しよう。——

集合の「稠密性」に依り集合の任意の二要素の間には少くも更に一要素が在る。如何に近接せる要素も第三の要素で切斷されるから不連續の契機が際立つてゐる。

集合の「完全性」は集積點に依り規定されるが、集積點の規定は一點の周圍に如何程小なる近傍を作るも其點とは異る第二の點が見出される事にある。分離性の契機が正面に押し出されてゐる。

かくて連續は不連續を媒介として規定される。然しこ

れは直觀主義者の非難する如く[6]連續を粉碎し不連續に還元し去ることではない。これは客觀的循環の構造を一見すれば明かである。循環は全體と部分集合と要素の交互規定のうちに、統一のうちに成り立つ。

M={a,b,c,……,x,y,z,……}…………(B)

x y x…はMとa b c…に依り規定される。x y z…或はMが表面に措定されるに從ひ客觀的循環律が更に二分されるが孰れにせよMは要素へ、要素はMへ還元されてはゐない。一者が他者との聯關に於て規定されるとは一者が他者へ還元されることではないからである。故に集積點の定義の用ゐる循環は決して連續をアトム化する操作ではない。集積點が自己を含んだ全體の上に規定される過程は集積點を含んだ領域の連續性の上に規定される過程に他ならぬ。要素のみに依り全體が連續集合が規定し盡されぬところに客觀的循環が必要とされる。一體、循環なるものは他者の嚴存なしには考へられない。

集積點の規定は自己から區別される點が如何に近接した近傍にも見出される事(不連續性)を理論の發足點としてゐる。然し此事の背後には既に集積點を含んだ全體(連續性)が豫想されてゐる。此全體に依り集積點が定義される。客觀的循環律は全體と部分、集合と要素との統一であると共に連續性(從つて無限)と不連續性(從つて有限)との統一、相對立する規定の統一の過程である。

(1) E. Study, Die angebliche Antinomien der Mengenlehre (Sitzungsberichte d. preussischen AK. d. W. 1929, S. 259.)
(2) O. Hölder, Mathematische Methode. S. 549.
(3) Fraenkel, Mengenlehre. S. 250 ff.
(4) Fraenkel, ebenda. S. 251. ff.
(5) 「解析論に於ける排中律排棄の論議に關するヘルダーの一つの批評」下村氏、哲學研究、百五十號、八十頁以下。
(6) O. Becker, Beiträge zur phän. Begründung d. Geom. u. ihrer physikalischen Anwendungen, Jahrbach VI.) S. 417.

×　　×　　×

數學基礎論をめぐる諸流派と循環律の關係を以下に叙述する。

五、論理學派(ホワイトヘッド・ラッセル)

既述の如く、集合論の「矛盾」排除のためラッセルはポ

アンカレと共に高名な循環律禁止を宣告した。然るに循環律に全く相異る二型のある事、此區別を看過するところに彼等獨自の立場が在り、亦之に依り數學自身に眞のクリシスを招來した。

例へば命題「凡ての命題は眞であるか又は僞である」を循環の故に禁止する。この循環は明かに主觀的循環であり此禁止は正當である。右の命題は命題全體の本質を表示した命題であり、之を箇々の命題と一律に並列させることは許されない。ラッセルでなくてもこれを禁止するのは當然である。普遍と特殊の無差別的同一を信ずるのみが「凡ての命題は眞であるか僞である」を單なる一箇の命題として個別的命題と同一列に並列させて滿足するだらう。

然し客觀的循環で全體に依り規定される要素とは決して右の如き場合ではない。全體に依り規定されるものは飽くまで、全體に依り規定される個別であり、それは決して普遍自身、全體自身でも其の本質自身でもなく、それは飽くまで普遍自身、普遍の本質自身に依り規定される個別である。

以上の前置きの後ラッセルが循環律禁止に依り如何なる道を歩んだかを考察する。[1] ——

彼は「集合」及び「關係」を其等に屬する要素を獨立變項とする命題函數に還元する。從つて「集合」や「關係」に關する「背理」は總て命題又は命題函數に歸着される。然し數學に重大な關係を持つのは命題函數の場合である。

先づ命題函數の考察から始める。命題函數とは變項xを含みxに値を與へると一箇の命題となる如きものである。例へば「xは人なり」、Sin x=1。命題函數の獨立變項として函數自身を「前提する」項を許すと惡循環に陷るとラッセルは云ふ。然し「前提する」の意味が吟味されねばならぬ。函數自身をそのまゝ獨立變項として許せば主觀的循環が起る。然るに函數自身に依り規定される個別者を獨立變項として許せば客觀的循環である。兩型への分析なきところがラッセルの特色である。

函數の本質の一つは其の一般性である。命題函數φxは無差別にφa φb φc…を表す。此φxが規定的意味を持ち得る

のは對象 φa φb φc …が良く規定されてゐる時に限ると。函數は其の値が既に函數の獨立變項となる以前によく規定されてゐない限り規定的な函數とは云はれない。從つて函數自身を前提するものを函數は其の値の中に含んではならぬと。だが我々はかう考へる。——成程、數學の函數に於て其の獨立變項が函數に依り規定されはしない。規定の方向は一方的に獨立變項から函數値へ向ふ。ラッセルが此數學の函數とアナロギッシュに命題を命題函數と考へるところに誤謬の第一步がある。命題の函數化に依つては特殊と普遍の對立の統一は表言不可能である。命題函數、例へば「xは人なり」ではxに代入されるものは個物である。「ソクラテスは人なり」に於いてソクラテスは個物である。だが我々は此命題に於て個物が一般との統一のうちにあることを看過してはならない。個物ソクラテスは「人なり」の一般に依り規定されねばならぬ。xに代入さるべきものは「人」なる一般との聯關に立つて始めて意味を持つ。φa φb φc …は函數 φx 以前に既に良く規定さるべしとラッセルは要求するが、φa の文字にも見られる如く φa は φ を通じて背後に一般的なものを豫想してゐる。φa は單に個物としては意味を持ち得ぬ。φa は φx との關聯を豫想してのみ意味を持つ。だから我々は「xは人なり」の如き簡單な命題函數自身の中にさへ客觀的循環の萌芽を見出すのである。勿論函數の不定値 φx 自身が φx の獨立變項の一つとなる事は主觀的循環律の禁止に依り否定されねばならぬ。

ラッセルは、若し函數が其値のうちに函數自身を前提する何ものかを含ませるならば函數自身が規定される以前には函數に依り表示(デノート)される對象を確定的なものと見做す事は出來ぬと。又逆に函數は其値が規定的でない限り規定的たり得ぬと。この故にこそ循環律禁止が必要だとラッセルは言ふ。だがラッセルの此主張には彼の原子主義形式論理主義が最も露骨に現れてゐる。彼は普遍（函數）と個物（獨立變項）とが原本的に統一の中にある事を理解し得ないのである。先づ個物が良く規定されてから後に附加的に普遍（函數）が外部から個物に結び付けられると彼は考へる。斯る原子主義に立つ限り循環律の本質

は永久に理解され得ない。

　ラッセルに依れば函數の諸値は函數の前提となるが、逆に函數は前提されてはならない。ラッセルは函數の値の中に函數（普遍）が既に含まれてゐることを理解しない。此處に彼の立場の制限が明瞭に現れてゐる。「ソクラテスは人なり」は彼に依れば「xは人なり」の一つの値と考へなくても理解されるとさへ言ふ。

　然し原子主義者ラッセルと雖も函數値が無限の時其値を個別的に擧示することは出來ぬ。諸値の總體が性質的に與へられ任意の對象が當該總體に屬するか否かが規定されねばならぬと。だが此値の總體は函數の普遍との聯關なくして與へられ得るか。ラッセルははからずも此處で自己の立場を裏切つてゐる。

　扨、ラッセルは函數$\phi\hat{x}$と函數の不定値ϕxを區別せよと云ふ。勿論此區別は必要であるが、$\phi\hat{x}$とϕxを形而上的に分裂させ、普遍と個體との聯關を見失つてはならぬ。ラッセルは$\phi\hat{x}$とϕxを區別して循環律（インヴォルヴ）を次の樣にも述べてゐる。——命題ϕxにてxが$\phi\hat{x}$を含むところの値をとつてはならぬと。だが此處にも「含む」の二義性をラッセルが看過してゐる事に注意しなければならぬ。「含む」が文字通り$\phi\hat{x}$を含むの意ならば主觀的循環律が成立する。だが「含む」がϕxとの聯關に於て規定されるとの意ならば客觀的循環律が生ずる。$\phi(\phi\hat{x})$は主觀的循環律の圖式である。

　ϕの凡ての値を主張（アッサート）する命題を$(x)\phi x$とラッセルは表示してゐる。$(x)\phi x$はxの凡ての値に就てのϕxのことではない。$(x)\phi x$は$\phi\hat{x}$の値たる凡ての命題であり、$\phi\hat{x}$を無意味ならしめるxは除外される。故に$(x)\phi x$は$\phi\hat{x}$を含み、從つて$(x)\phi x$はϕの獨立變項であつてはならぬと。これは主觀的循環の禁止であり勿論正當である。

　次にラッセルは眞と僞(truth, falsehood)の中に段階的區別を設けねばならぬとする。今函數を$\phi\hat{x}$、其の一値をϕaとすればϕaに與へられる種類の眞理を第一階眞理（ファースト・トゥルース）と云ひ、$(x)\phi x$に與へられる種類の眞理を第二階眞理（セカンド・トゥルース）と呼ぶ。

　扨命題"ϕn sometimes"を$(\exists x)\phi x$で現はしϕxが第

一階眞理を表はすとすればそれは第二階の眞理を表す。

ラッセルは亦、函數と獨立變項を同一平面に置く事を禁止する理由として函數の本質が其の一般性（アンビギュイティ）に在り、之を個物たる獨立變項と同水準に置く事は函數自身の本質を損傷すると。彼の此理由は主觀的循環の禁止理由としては勿論正しい。普遍と特殊の差別なき直接的同一を禁止するものとして。だが此同一性の禁止が普遍と特殊の形而上的峻別の意味に絶對化されるならば、卽ち客觀的循環の禁止を意味するならば、是はラッセルの原子主義の致すところにすぎない。

此直接觀察の結果と循環の誤謬（ラッセルは循環一般禁止のために、だが我々は客觀的循環のみの禁止のために）排除を目的として所與對象を獨立變項とする諸函數は互ひに他の函數の獨立變項たり得ぬことが要求される。卽ち階層組織が絶對必至となつて來る。

今所與の獨立變項aに對し有意味な函數を「a函數」と呼ぶ。a函數を任意に「選擇」して「aは當該選擇に屬する凡ての函數を滿足する」なる命題を考へる。此aを變項で置換すると一箇のa函數を得る。然し此a函數は「選擇」の全體に關與する函數であるから選擇の一員たり得ぬ。之を循環律が要求する。故にa函數を各型（タイプ）に分類し或型の函數中には其型の全體に關係を持つ函數が含まれぬ如くする必要がある。ラッセルの「型の理論」が此處に必要となつて來る。だが此處でも「關係を持つ」の語の二重性に注意せよ。ラッセルは此語の二義性を利用して循環律一般を拒否しようとする。

變項の凡ての可能な値、或は或不定の可能なる値に關し何事かが述べられる時、此變項を假變項（apparent variable）と呼ぶ。命題中に「凡て」とか「或る」とかの語があるならば其處には必らず假變項が介在する。ところでラッセルに依れば、假變項を含まぬ命題函數はそれを含む命題函數の源泉である。ϕxは$(x)\phi x$の源泉である。ϕxは$(x)\phi x$に現れる假變項xを含まぬからと。故に假變項を漸次除去すれば全然假變項を含まぬ函數に到達し得る。これをもとの函數の「マトリックス」或は「母函數（マトリックス・ファンクション）」と呼ぶ。故に凡ての可能な函數或は命題は母函數の獨立變項

を假變項に轉換させる事に依り可能である。だから「型の理論」の考察も母函數から出發すれば宜しいと。

命題及び函數たり得ぬ「もの」を個體(Individual)と呼び、之は命題及び函數の原素材である。

第一階マトリックスとは其の獨立變項が凡て個體である母函數である。個體のみを獨立變項として含む函數を第一階函數と云ひ、$\varphi!x$ で表示する。

第一階函數と個體のみを獨立變項とし、且つ假變項を含まぬ函數を第二階マトリックスと云ひ、これの獨立變項を假變項に轉化させると第二階函數が生ずる。此過程は無際限に繰返され得る。函數の含む獨立變項又は假變項の最高階數がnなる時$n+1$階函數と呼ぶ。

函數の階數が變項の階數より一階のみ大きい時は該函數を述語函數と云ふ。ところで非述語函數は凡て述語函數と假變項に依りて得られる。例へばn階の非述語函數はn階の述語函數に於て$n-1$階の凡ての獨立變項を假變項に變化させれば得られる。故に述語函數の考察で充分である。

次に函數及び假變項を含まぬ命題を初等命題と呼び、函數を含まず、假變項としては個體のみを含む命題を第一階命題と云ふ。故に初等及び第一階命題は第一階函數の値である。かくて命題の階層組織は函數のそれから導出される。

循環律一般の禁止は必然に右の如き函數及び命題の階層組織を成立させる。

扨、右の事情を明かならしめるため一例を擧ける。有理數を個體とし、有理數のみを變項とする母函數を第一階母函數と云ひ、第一階母函數と有理數のみを變項とする函數を第二階母函數とする。一般に第n階以下の母函數と有理數のみを含む母函數を第$n+1$階母函數と名づける。第n階母函數の變項を假變項に轉化させると第n階命題亦は函數が成立する。第n階の函數に依り定義される實數を第n階の實數と呼ぶと實數は階の差異を持つ事となる。例へば有理數全體のみを用ゐて定義される實數は第一階實數であり、第n階實數及び有理數の全體を用ゐて定義される實數は第$n+1$階實數と規定される。

例へば代數的數及び有界單調第一階實數列に依り定義される實數は第一階實數である。又第n階の實數の集合の上(下)限は第$n+1$階以上の實數となるのである。

函數の階層組織は右の如き異階の實數を生ぜしめ、實數を一般に使用する事が禁止される。異れる階(オーダー)の實數間には計算操作が不可能となる。上(下)限に依り規定される實數は、例へば、代數的數との結合關係に入る事は許されぬ。實數集合は異階の實數に截然と切斷され數學解析は支離滅裂に陷る。客觀循環律の禁止は此結果を必然的に招來する。

ラッセルは窮餘の一策として有名な「還元可能の公理」Axion of reducibility を導入する。これを實數の實例に特殊化すると――「第一階より高き階の實數は凡て第一階の實數中に存在する。」此甚だ内容不明且技巧的な公理が要請されるところにラッセルの立場の缺陷が致命的に暴露されてゐる。

一般的に議論を進めよう。――aが與へられた時「凡てのa函數」は函數の階層組織のため許されない。故に「aの凡ての述語的性質」、「aの第一階の凡ての性質」等と階(オーダー)の峻別が生ずる。だがnの値が何であらうともaの凡てのn階性質に關して述べ得る場合もある。此時は「凡てのaの性質」と述べるも何等實際上の障碍は起らぬ。還元可能公理は「aの凡ての性質」、「凡てのa函數」と述べても何等誤れる結果に導かぬ時に此等の陳述や推理を正當化するために導入されると。今二箇の函數φx、ψxに於て凡ての可能なる變項xに就てφxとψxが等價(エキバレント)(φx ψxはいづれも同時に眞となり僞となる)なる時に形式的等價(フォーマル・エキバレンス)を持つと言ふ。

扨、「還元可能公理」とは――「任意の函數φxが與へられたる時は之に對して形式的等價な述語函數がある。」

ラッセルは此公理の效果を同一律に就て例說する、xとyが同一であればφxが眞なればφyも眞である。此時φxの種類の如何は全然問はれない。だが函數の階層組織のためφのすべての値に就てφxがφyを内含(インプライ)するならばxとyは同一であるとは云ひ得ない。φを一定の階に固定しなければならぬ。故に同一律そのものが階層化される。

(今、與へられた對象に關して眞なる述語函數を當該對象のプレディケートと呼ぶ。)たとへば「xの凡てのプレディケートはyに屬する」とか、「xの第二階の凡ての性質はyに屬する」等々と語らねばならない。勿論此等の命題のうち階の高い命題は低いものを含んではゐるが、逆に「xの凡てのプレディケートがyに屬するならばxの凡ての第二階性質はyに屬しなければならぬ」とは「還元可能の公理」を援用しない限り全く不可能である。今、「xとyとが同一である」を、「xの凡てのプレディケートがyに屬する」に依り定義するとき「還元可能公理」を導入しない限り、xとyとがプレディケートに關し同一であつても更に高い階にては同一でない事があり得る。卽ちxとyの同一は還元可能公理なしには保證されない。

還元可能公理が自明の命題でない事はラッセル自身も認めてゐる。これの導入の理由は多數の有用な(例へば同一律)命題を其れから導出し得るからである。

だが我々はラッセルに斯う反問する。――階の階序(オーダー)を無視しても實際上の不都合が生じない命題があるのは何故であるか。或時には何故に階の異別嚴守が要求され他の時には不用であるのか。彼は之に關しては全く沈默を守つてゐる。何故異る階の實數を同一平面に並べても不都合が生じないのか。此理由を彼の口から聞くことは出來なかつた。然しこれは彼の理論の怠慢と云ふ主觀的制限からではなく、客觀的循環律を否定させる彼の立場そのものの客觀的制限から出來する。

彼は命題函數の階序組織に依り循環律をすべて排除して置く。然る後に還元可能公理に依つて客觀的循環律のみを密輸入する。主觀的循環律は恢復されない。還元可能公理は異階の函數の形式的等價、卽ち外延の等しきを主張するのみで同一を主張するのでないから、同一な主張する主觀的循環律は排除されるのである。勿論客觀的循環律と還元可能公理が同一であるのではない。ラッセルはたゞ後者に依り前者と同じ効果を擧げようとする。だが彼の原子主義は客觀的循環律の承認を許さず、却つて內容不明の公理を導入し來るのである。還元可能公理は彼の立場の無力を暴力的に陰蔽せんとする應急手段に

すぎぬ。彼が還元可能公理を必要とした事自身が彼の立場の致命的缺陷を物語つてゐる。

(1) Whitehead & Russell, Pr. Math. Vol. I. Introduction. Chap. II.

六、直觀主義(ブロゥワー・ワイル)

直觀主義者も循環律一般を否定する。此結果を導く彼等の立場の檢討を開始する。

直觀主義の基本テーゼは數學的存在即構成可能である。單なる「在る」は數學的に正當な意味を持ち得ない。有限の言語を以て表現可能のもの、有限の推理を以て證明可能のもの、即ち思想的に構成し得るもののみに數學的存在の資格が與へられる。ところで現代の數學のあらゆる部門に於て、特に算術學の内部に於てさへ存在を逐次的構成に依り單純な對象から導出しないで、非構成的推理を屢々使用する。例へば、對象の非存在の假定が既證の定理や原理と矛盾するとの證明に依つて該對象の存在を證明する。だが斯る證明は問題たる存在物の性質を何等明かにしない。「3は奇數である」は眞の命題であるが、「奇數が在る」は單に前の判斷から抽出した判斷抽象にすぎぬ。然るに此種の證明法は從來單に使用されてゐたばかりでなく實に重要な數學の推理法であつた。直觀主義は此種の推理を眞向から否定する。單なる存在命題は數學的には無意味だと。「數學は教說ではなく、寧ろ行爲である。」數學的存在は構成可能の事であり、若し之を無矛盾性と同一視するならば數學は單なる遊戲にすぎなくなるだらうと。

構成の操作を踏まないで單なる「凡て」とか「在る」とかの概念を用ゐて作り上げられた所謂集合論の「矛盾」は實體なき影の如き存在に過ぎない。斯うして「矛盾」は追ひ拂はれる。

然し「構成」のみに數學的推理を限る彼等はよく「矛盾」を退け得たが、斯うした數學的推理の制限は數學自身に果して如何なる影響を及ぼしたか。

ブロゥワーに依ると數學的構成の素材は自然數に限る。而て有限的操作に依り自然數から構成されるもののみに數學社會の市民權を與へる。

直觀主義者は「拒中律」を拒否する。ところで拒中律は間接證明法の核心を作つてゐる。例示しよう。圓周率π=3.14159…は無限小數であるが此數列の何處かで少くとも7が七度引續いで現れるかと質問する。我々の在來の推理法からは、それが何處に事實現れるか否かとは無關係に、「現れるか現れぬか」の孰れかであると答へるだらう。だが直觀主義者は右の解答を無意味と宣告する。彼等は存在卽構成可能のテーゼに依り「然り」の解答は現實に7が七度現れるのを發見した時にのみ可能である。又「否」の解答は通常の證明に依り7が七度現れる事の不可能が示された時、始めて有意味である。故に「然り」と「否」とは矛盾對立をしない。卽ち七箇の7の發見出來ぬ時に且つ其存在の不可能證明も成立しない時、換言すれば「然り」も「否」も成立しない場合があり得る。

拒中律の崩壞と共に數學問題の解決可能の信念も其の保證を失ふ。「然り」とも「否」とも云へぬ場合があり得るからである。斯くて數學上の「不可知論」が結果する。

直觀主義者は集合論の改造を斷行する。從來、集合概念には種々の解釋があつた。① カントルは集合を要素確定と考へた。卽ち各對象に對して、それが該集合の要素であるか否かが概念的に確定され得る時、集合は確定と云ふ。集合は法則 性質に依り定義される。然し或一定の對象が實際に構成に依り該集合に屬するか否かが決定される必要はない。然るに斯樣な一般的な集合概念からは周知の「矛盾」が生ずる。斯くて循環律の禁止要求と共に集合概念も一層の限定を要求する。

ラッセルの「外延確定」に依る集合概念が斯くて成立する。卽ち「要素はそれ自身に於て規定され限界されイデアルに完結されし總體を形成する」（ワイル）。集合とはまさに斯るものであると。

だが直觀主義者は限定に更に一歩を與へる。集合は決定確定的 Entscheidungsdefinitheit でなければならぬと。卽ち集合中に或性質を持つ要表が存在するか否かの問題に對して構成的に決定され得る集合である。拒中律の使用は勿論禁止されてゐる。

ところで上述の集合に對する三つの見地は連續に對し

て如何なる態度を執るであらうか。——

要素確定の立場に立つカントルは線狀連續體を要素の集合と考へる。其等要素間には順序關係が定められ、其等要素の相互關係に依り連續の本質が完全に規定（例へば聯結閉集合として）される。然し既述の如く此方法は客觀的循環律を使用する。

第二の立場、外延確定の立場に立つ初期のワイル②は循環律を一般に使用しない要素（第一階の實數）のみを許す。（ラッセルも還元可能公理を要請せざる限り此ワイルの見地に立つ事を要求される。）だが之に依り連續は孤立化され、もはや連接しない要素に分解されてしまふ。

第三の立場、決定確定の立場は更に一層狹隘であり、連續は一層の支離滅裂に陷る。直觀主義者は構成主義の此把握力の無能を救濟するために新原理を導入して來る。彼等は徹底的な構成主義を執つて客觀的循環律をも禁止し數學中に大ギャップを作るのであるが、此ギャップ充塡のためには新原理が要求される。

既述の如く直觀主義のテーゼは「數學的存在即構成產物」である。構成は逐次遂行されるから系列の概念が根本的となり、ベッカーの所謂「無際限なるもの」が中心に置かれる。自然數系列は此「無際限なるもの」の原型であり、「算術的根本直觀」（ワイル）に依り與へられる　而て此直觀に依り與へられる無限系列は「在る」ところのものではなく「生成する」ところのものである。かくて「生成」が基本觀念として新しく導入される。生成に依つてのみ無限系列は與へられ、假無限のみが無限概念として許される。

扨、數列にも種々の區別がある。自然數系列では一項から直後の項への移行が法則的に行はれる。斯る數列は合法則的系列と云はれ、それの典型的なるものは自然數系列である。次に全く性質の異つた系列がある。即ち「自由に生成する選擇系列」である。これにも種々の區別が可能である。完全に自由な選擇列に於ては一項から次項への移行は全く自由である。次に一定の條件（然し自然數系列の如く條件に依り系列の進行が完全に規定されてゐるのではないが）を持つ系列がある。更に一歩一歩と

個別的に進行が定まる系列がある。

選擇系列は逐次に生成する系列である。我々は生成せる系列に就ては確定的な決定が可能であるが、未だ生成せざる項は全く未知の領域に屬する。此處で注意すべきは、此種の系列に於ては「時間」が必然的にしのびこまされてゐる事である。直觀主義者カウフマン[3]も時間の導入は數學の主觀化を招來する危險ありと考へ、數學の對象は斯る生成する具體的系列から時間を捨象した抽象の産物なりとする。然し此企圖は成功しないであらう。何者既に生成せる系列（これは既に時間性を失つてゐるのだが）からは時間性の捨象も可能であるが、未だ生成せざる未來の不定の項から時間を捨象する事は項自身の存在そのものを奪ふものに外ならぬ。數學の對象は直觀主義からは時間化され、形式的普遍性を失ふことから免れ得ない。

扨、彼等は集合を次の如く考へる。系列構成の素材は自然數系列であり、此上に選擇を加へると種々の系列が生ずる。集合とは斯る選擇の法則にほかならぬ。選擇に依り生ずる記號の系列の項が集合の要素である。これは要素の一般的規定であるが、個々の要素は選擇過程の進行そのものに依り決定される。

ところで實數は選擇が法則に從つて無限に進行する場合に生じ、連續は完全に自由な選擇に依り規定されるとする。今、正整數の系列 $a_1, a_2, \ldots$ に實數 $\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_1+a_2}}+\frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3}}+\cdots$ を對應させるならば $a_1\ a_2 \ldots$ が確定すれば一定の實數が生じ $a_1\ a_2 \ldots$ が完全に自由なる時は零と一（一をも含めて）の間の實數の生産となる。これが零と一との間の連續を現すのである。

然し自然數系列からの選擇の自由とは何であるか。それは一定の選擇を行はぬことであり、又或選擇を行はぬとの自由もないのである。故に選擇を行ふ以上は凡ての選擇を行ふことである。（これはカントルの羃集合の規定である。）勿論我々は凡ての選擇を實際に行ふ事は出來ないが、然し何故に選擇が可能なのであるか之に對する解答は二つある。卽ち、選擇の自由を我々が持つてゐるからであるとの解答――然し之は全くの同語反復にすぎ

ぬ。今一つの答へは、何故に可能かの「可能」を保證する「領域」を認める。これに依れば、我々は自然數から總ての選擇系列を作り出すことは出來ぬが、だが我々が選擇を行ひ得るのは斯る選擇系列を容れる領域があるが故にであると。換言すれば客觀的領域の存在こそ我々が選擇を行ひ得る保證を與へると考へる。而て此領域は實數領域である。だが一度び此領域の存在を認めるや否や選擇の自由と云ふ主觀的定義を以て連續を規定する事が不可能となる。逆に選擇の自由こそ領域に依り保證される。

ところで直觀主義者自身も選擇の自由を保證する領域の存在を彼等自身の構成主義にも拘らず認めてゐる。即ち連續は自由生成のメディウムであると④。カウフマンは Spielraum と云ふ。だが此事こそ構成主義自身が連續に對して妥當せぬとの雄辯な告白にほかならない。我々は此處に直觀主義自身の破綻を見出す。メディウムとかスピールラウムこそ完結的存在の謂なのである。

困難は之に止まらない。直觀主義は此メディウムの補充に依り問題を解決したかの樣である。彼等は實無限の存在を否定し可無限のみに無限を限る事に成功したかの如く見える。だがメディウム自身の持つ非構成的性格を度外に置くとしても困難は更に待ち設けてゐる。ベッカーは此處に直觀主義の超克し難いディレンマを見出す⑤。――即ち、次の疑問、メディウムは有限の擴がりを持つか無限の擴がりを持つか。今、有限の擴がりを持ち、其中に含まれる可能なる部分（グリード）の數をnとし、數字をq個に限るならばq^n個の可能な系列が存在する。若し數字を無際限に許せば、換言すれば自然數全體を許せば可能なる系列の箇數アレフ零のn乘個、即ちアレフ零個である。だが之では可附番集合以上に進む事は出來ない。ハトディが構成したアレフ一の系列を容れる餘地がかのメディウムには存在しないこととなる。然し若しメディウムが無限に擴がり無限の部分（グリード）を持つと考へるならば此事こそ實無限なる直觀主義にとつて許し難い概念に逢着させる。蓋しメディウムは在るのであつて成るのではないから。故に自由生成のメディウムなる概念は連續を把握するものではないとの歸結に達する。

い直觀主義者の云ふ一歩々々と進行する自由選擇系列とアレフ零以上の超限數は全く融和し難い。逐次進行の系列は連續に突き進むことが出來ない。我々はベッカーの語る如く、⑥ブロゥワーの連續論は數學的には極めて不完全であると認めざるを得ないのである。（未完）

（1） Becker, Beiträge zur phänom. Beg. d. Geometrie usw. (Jahrbuch. VI. S. 403. ff.)

（2） Weyl, Das Kontinuum. 1918.

（3） F. Kaufmann, Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung. S. 59.

（4） Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. S. 42 f.

（5） Becker, Mathematische Existenz. S. 164.

（6） Becker, ebenda. S. 166.