集合論の所謂「矛盾」に就て（承前）

——循環論法の吟味——

近藤洋逸

七、公理主義

「公理的」なる語は廣狹種々の意味に用ゐられる。最廣義に於ては、基本概念と基本前提とが先頭に置かれ、其處から定義と證明の力に依り理論の內容が展開される時、斯る理論の展開を公理的と云ふのである。此意味に於てはユークリッドの幾何學、ニュートンの力學、クラジゥスの熱力學は公理的である。

然しヒルベルトが『幾何學の基礎』に用ゐた更に狹い意味の公理主義とは、前提が極度に吟味され不用のものが悉く捨象されてゐる場合である。然し前提は飽くまで實質的內容に充されてゐる。

最も嚴密な意味の公理主義には獨特の存在形式がモメントとして加はつて來る。これに依つて公理的方法は所謂構成的又は生成的方法から區別される。構成的方法では理論の對象は單に物の種屬 Gattung von Dingen として導入されるが、公理的方法にては一定の述語に對する凡ての主語の領域として規定される物の體系System von Dingen が與へられ、この展開に依り理論の內容である命題が導來されるのである。換言すれば無定義的に前提された對象の集合があり、此集合の性質は集合の要素間の基本關係を定式化した公理の體系に依り規定されるのである。物の體系とは斯くの如きものである。內在的定義法(implizite Definition)と云はれるものは此公理系に獨自の定義法なのである。斯樣な形式的公理系に於ては實

質的内容が捨象され、從つて無矛盾性證明が必要となる。然るに内容的公理系にては基本概念は既知の經驗に關說する事に依り導入され、又基本法則は自明の事實、經驗からの抽象物と考へられるのである。

然し内容的公理系は形式的公理系の必要な補充物である。何者、内容的公理主義に依り形式的公理主義は形式(フォルマ)體系(リスムス)の選擇への手引が與へられ、現實領域への聯關が確保されるからである。

だが我々は内容的公理主義に何時迄も滿足してゐる事は出來ぬ。我々は現實の事態を完全に再生するのではなく、事態を簡單化する觀念化を行ふ理論をも扱はねばならぬからである。數學は其の典型である。斯かる理論は自明的眞理とか經驗とかに其の基礎附けを求める事は許されない。理論の行ふ抽象化觀念化は理論の概念構成や原則をして直觀的事實とか經驗の領域を踏み越えさせ、相對的な獨立性を與へるのであるから、此等の觀念化自身が無矛盾として獨自に示されねばならない。其の無矛盾性の證明には經驗的原理の近似的な妥當性を以ては當り得ない①。

我々は集合論の公理系としてはツェルメロ、フレンケル、フォン・ノイマン等のそれを持つてゐる。此等公理系は極めて嚴密な前提と論構を持つてはゐるが、其等は未だ内容を持つたものとして單に前提されてゐるに止まる。彼等は集合論の不可缺の前提を擧示し、無用な概念構成を排斥し「矛盾」を排除した事に於てはカントルの偉大な發展的繼承者ではあるが、自己自身の公理系の基礎附けを求めようとはしなかつた。此意味に於てツェルメロ以下の集合論公理系はカントルからの本質的飛躍ではない。彼等はカントル集合論から主觀的循環を排除したものの、客觀的循環自身は不可避として單に承認するに止まる。後者に對してはフレンケルの循環律論に於て見た如く、修正的態度を遠く出てはゐない。彼等から其以上の何等效果的な循環論を聞く事は出來ない。故に公理系自身の基礎附けを企圖するヒルベルトの形式的公理主義の考察に直ちに向はう。

（1） Hilbert & Bernays, Grundlagen der Mathematik, S.

I—3.

(1)問題提起

ヒルベルトが集合論の「矛盾」に現れる循環論と通常の數學に用ゐられる循環論、我々の言葉で云へば主觀的循環と客觀的循環との區別の必要を感付いてゐる事は確かである。彼は集合論の「矛盾」は許すべからざる無意味な概念構成を用ゐる事から生ずると云つてゐる。①これに反してポアンカレの所謂 imprädikative Aussagen（客觀的循環のこと）の禁止に對しては彼は極力反對してゐる。客觀的循環禁止のために數學は其の最奥の數論的本質や根據に關する問題に就て二十年間も惡夢に襲はれてゐたとさへ語つてゐる。②

數學解析に於てヒルベルトは客觀的循環の存在の必要を認める。③彼は自然數全體を一箇の個體領域として、卽ち完結的存在として認めてゐるのであり、構成主義とは對蹠的である。更に彼は實數全體をも個體領域として數學解析にとつて不可缺のものと考へてゐる。例へば有界なる實數集合の上限定理の證明に於ては實數の個體領域は絕對必要であると、彼は次の如く說明する。有界な、例へば零と一の間の實數集合の上限の存在をデデキントの實數定義（此處に既に客觀的循環が必要だ）を基礎として證明するには、有理數を二つに分類し、一集合の有理數は最初に與へられた實數集合の一數によつて追ひ越される有理數を要素とし、追越されざる有理數を他の集合とする。卽ち實數集合中に $a>r$ なる實數がある時は有理數 r を一集合にまとめあげる。ところで數學解析に於ては一般に集合は其を規定する性質に依つて與へられる。換言すれば或條件 $\mathfrak{B}$ を滿足する實數の總體を以て實數の或集合とする。與へられた集合に於て $a>r$ なる實數 a があるか否かの問題は r より大にして且同時に或條件 $\mathfrak{B}$ を滿足する實數が在るか否かの問題である。此場合に於ては實數の總體が個體領域として基礎におかれてゐる。卽ち上限は自己を含んだ全體の上に規定されてゐる。客觀的循環が用ゐられてゐる。

カントルの基本列を用ゐても結論は同じである。ただ推論過程が些か複雜化するばかりである。

數學解析は更に選擇公理を必要とする。[4]〔選擇公理の非原子主義的性格、及び客觀的循環との關係は既に述べた。〕例へば實數集合$\mathfrak{M}$の上限aがある時、aに收斂する實數系列が集合中に在る事を示すとしよう。——上限の性質から所與の各整數nに對して集合中に

$$a-\frac{1}{n}<c_n\leqq a$$

故に

$$|a-c_n|<\frac{1}{n}$$

を滿足する數c_nが存在する。故に數c_nがaに收斂する系列を爲し且凡て上記の集合に屬するのである。ところでc_nは如何にして成立するのであらうか。各與へられた數nに對して上記集合に屬し且次の不等式

$$a-\frac{1}{n}<c\leqq a$$

を滿足する實數cの中から一定の數を選ぶのである。此處に一つの前提が用ゐられてゐる。我々が上記の推理過程から直接に歸結し得るのは各數nに對して上記の不等式を滿足する數にして且當初の集合に屬する數の集合$\mathfrak{M}_n$($\mathfrak{M}$の部分集合)があり、各nに對して此部分集合は少くも一要素を含むと云ふ事のみである。故に此等の集合$\mathfrak{M}_1$ $\mathfrak{M}_2$……を作るならば、此等の各集合、例へば$\mathfrak{M}_1$にてはc_1、$\mathfrak{M}_2$にてはc_2……が代表要素として選び得るとの前提が用ゐられなければ、求むる實數の系列は得られない。選擇公理が此處に使用されてゐる。

此等實數全體とか選擇公理とかは凡て無限的性格を持つてゐるとヒルベルトは言ふ。ヒルベルトは右の例を超限的推理の範例として、無限なるものの數學に於ける役割の典型的例示として引用し來つてゐるのである。

我々の當面の問題はヒルベルトが此等超限的命題に對して如何なる態度を持つてゐるかである。

彼は無限を具體的内容なきもの、無對象の概念と考へ、理想的要素の一つとする。[5]彼は幾何學に用ゐる無限遠點や無限遠直線、代數學に用ゐる複素數量等にと類比的に、無限を有限なるものと共に用ゐられる場合にのみ有用な理想要素にすぎないと見る。「無限は何處にも現實化されない。自然の中にも存在しないし、我々の悟性的思惟の基礎としても許容されない。[6]」「無限に殘されし役割は全

く理念（イデー）のそれである。[6]」彼は無限を斯くの如く無對象、無內容の理想要素に轉化させて置いて、此理想要素を有限的なものへ添加して何等の矛盾が生じない事を證明するならば、無限は基礎附けられたと考へるのである。

かくて此處に次の如き問題が提起される。――

ヒルベルトは、何故に無限を理想要素と、超限推理を理想命題（イデアレ・アウスザーゲン）と考へるのか。

又理想要素とは如何なるものか。

又無矛盾證明は如何なる意味を持ち、如何にして遂行されるか。等々。

(1) Hilbert, Die Grundlagen der Mathematik. (Grundl. d. Geometrie. Anhang. IX. S. 306—307.)
(2) Hilbert, Probleme der Grundlegung der Mathematik. (Grundl. d. Geometrie, Anhang X. S. 315.)
(3) Hilbert & Bernays, §2. S. 36 ff.
(4) Hilbert & Bernays, S. 40—41.
(5) Hilbert, Ueber das Unendliche. (Grundl. d. Geom. Anhang. VIII. S. 268f.)
(6) Hilbert, ebenda. S. 288.

(2)問題の分析・批判

ヒルベルトは無限を理念（イデー）と考へるが、之はまさしく彼の徹底した有限主義に基く。彼は現實には無限は存在しないと言ふ。曰く――[1]「自然現象や物質に關する最初の素朴な印象は連續的なものの印象である。一片の金屬や液體をとれば、それが無際限に可分的で其の如何なる小片でも常に同一の性質を有する樣に思はざるを得ない。然し物理學で物質研究の方法を充分精緻にすれば何處に於ても我々は可分性の限界に逢着した。――研究法の不備に基くのではなしに事態の本性に基く限界に。其故まさしく現代科學の傾向を無限小よりの解放と解することが出來よう。そして今や『自然は飛躍せず』なる古い指導的命題の代りに其反對たる『自然は飛躍する』と主張することが出來るだらう。周知の如く凡ての物質は物質の小片、卽ち原子から合成され、これの組合せと結合に依り巨視界の物質の凡ての多樣が成立する。然し物理學は物質の原子論に立ちどまりはしなかつた。これと並んで前世紀の終り頃、最初は異樣な作用を及ぼした電氣の原子論が現れた。從來電氣は液體と認められ連續的な作用體の模

範であつたが今やそれは又正の核と負のエレクトロンから構成されることを示した。物質と電氣の他に物理學には猶ほ同じく保存律が妥當する他の實在、即ちエネルギーがある。ところで此エネルギー自身さへ無限の分割を端的に無制限的には許さぬ事が今日確立されてゐる。プランクはエネルギー量子を發見した。かくして結果は何れの場合もどこまでも分割を許す如き而てかくして無限小を實現する如き同質的連續は現實には決して存しないと云ふことである。」之に引續いてヒルベルトは更に無限大も現實には存在しないと言ふ。だが簡略のため無限小の場合のみを考察しよう。ヒルベルトは從來の連續主義無限主義に反對して、まさしく其の反極である分離主義有限主義を現代科學の所産であるとする。然し我々はヒルベルト流に一方の極にのみ固執するのは形式論理的思惟の結果であると考へる。現實に於ては分離と連續、有限と無限は統一されてゐる。エレクトロン、プロトンは成程、非連續的である。然し我々は此等と共に連續性を本質とする電場磁場を持つてゐる。不連續な電子と連續な電場の統一の裡に現實の電氣現象が行はれる。ヒルベルトは一方の極を完全に看過してゐる。更に次の事も考へねばならない。――我々は機械的方法では分子まで到達し得たが、化學の發展のため原子まで到達した。現代の電磁氣學の發達は更にヒルベルトの語る如くエレクトロン、プロトン等にも到達し、現在に於ては更に此限界も越えられようとさへしてゐるのである。ヒルベルトは可分性の限界が常に移動してゐる事を見ようとしない。科學の絶えざる發展は從來不可分とされたものを可分とする。故に我々は物は可分(連續)であると同時に可分でない(不連續)と云はねばならない。無限は常に有限と統一されてゐる。我々は物の一微小片の中にも無限の實在を認める。ヒルベルトは認識過程を一義に固着させて有限と無限、連續と分離の統一を理解しようとしない。無限性は例へば法則の中にもある。水の成分が酸素と水素であると云ふ事は如何なる現實の水に就ても妥當するのであるが、此「如何なる」は法則自身が無限性のモメントを持つ事の告白にほかならぬ。有限と無限は常に統一の

うちにある。

物理的世界の有限主義者ヒルベルトも數學に於ては無限の役割を否定することは出來ぬ。例へば既述の如く彼は實數全體の集合をさへ不可避としてゐる。「無限は總體(ゲザムトハイト)として保持される」②と云ふ。又彼は

$$1^2+2^2+\ldots\ldots+n^2=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)$$

の如き初等式の中にすら既に無限性の存在を認める。③

外的世界に對する有限主義と數學に於ける無限の不可避性の承認の間の矛盾の除去はヒルベルトに依つて無限の理念化として現れる。彼は無限を無對象のもの、無内容のものと考へ、カントのイデーになぞらへて無限はイデーなりと結論する。

此思想は論文『無限に就て』(一九二五年)で最も明晰に現れてゐるが、最近の大著『數學の基礎』(一九三四年)に於てもイデーの語を使用してはゐないが無限の實在性の否定は歷然としてゐる。例へば曰く④——「無限性は決して事實的には與へられないで思惟過程に依り始めて挿入されるか或は析出されるかである」と。

實在性を奪はれた無限は有限數學の補助的なる假構(フイクシヨン)にすぎなくなるだらう。斯かる無限に對する基礎附けが無矛盾證明に盡きる事も當然である。ヒルベルトは「無限」の難問を無矛盾性證明の問題に歸着させる。⑤有限主義を固守する限り無限のイデー化、無限に對する無矛盾證明の唯一の要求は必然の結果である。無矛盾で無限の内容が盡きるとする無矛盾萬能論は、有限主義の立場から何等かの形で無限を認める無限處理の唯一の路である。無矛盾性が、斯る有限主義を克服した立場から如何に見られるかは別箇の問題であり、これの解答はヒルベルトの積極的評價ともなると考へられる。(後出)又ヒルベルトが要求する無矛盾性が如何なるものか、又循環律と如何なる關係を持つか等の問題も後に讓る。

ヒルベルトの有限主義に對する右の批評の結論は、無限卽イデーを必然ならしめる根據の否定である。

ところでヒルベルトの無限卽イデー論の根據は、更に、現實の數學にも無限遠點とか虛數とかの如き理想要素が存在するとの確認にも基く。⑥かくて問題は——無限遠點

虚數等が無對象無內容のイデーにすぎぬか否かの問題となつて來る。

虚數は無對象の理想要素であらうか。⑦虚數の意味に就てはガウスが既に本質的なものを語つてゐる。ガウスに依ると算術學は幾何學とは反對に漸く近代に於て發展した。數の概念は段階的に整數から分數へ負數へ最後に虚數へと發展した。「此進歩は然し乍ら最初は常に躊躇がちな歩みで進んだ。最初の代數學者は尚、方程式の負根を僞根と呼んだ。彼等の扱ふ課題で求められる量の性質が反對物を許さぬ場合には實際さうなのである。だが分數が無意味である如き多くの可算の物があるとは云へ、一般算術學に於て分數を取入れる事に心配を持たぬと同様に、無數の物が反對物を許さぬとの理由から代數學に於て負數に正數と同じ權利が拒否されるには及ばなかつた。――負數の實在性は充分に根據附けられてゐる。何者、負數は無數の他の場合に完全な基體を見出すから。其事に就ては遥か以前から人は明瞭に知つてゐる。だが實量と對置される虚量――以前には、そして今日も屢々不適當にも**不可能量**と呼ばれる――は今も尚ほ權利附けられてゐるより寧ろ我慢させられてゐるにすぎぬ。從つて、それは無內容な符號の遊戯以上のものと見えても、人々はそれから考へ得べき基體を無條件に拒否し、しかも此符號の遊戯が實量の諸關係の寶庫にて貢納する豐かな貢物を輕蔑しようともしない。」ところがガウスは他の見地から虚數を基礎附ける。彼に依ると正數負數が其の適用を見出し得るのは「算へられし物が反對物を持ち、それを合すると無となる如き場合」なのである。「もつと精確に觀察するならば實體（それ自身として考へられる對象）ではなくて、各々二對象間の關係が算へられる物である場合に此前提が成り立つ。」同様に「對象が無際限であるとは云へ一系列中には順序付けられず系列の系列に於てのみ順序付けられる場合には、換言すれば對象が二次元集合を形成する時は$+1$ -1の單位の他に$+i$ $-i$なる對立する單位が必要となる。」人はこれまで此對象を誤れる觀點から觀て其處に神祕な暗黒を見出した。だが之は大部分は不適當な名稱のためである。$+1$ -1 $\sqrt{-1}$を正負虚と呼

ばないで、直接的、間接的、傍系的單位と呼ぶならば斯る暗黑はあり得なかつたであらう。」虛量は實量と相俟つて複素數領域を形成する實在的な量である。ヒルベルトは虛量を單に「方程式の根の存在及び個數に關する諸定理を單純化するに役立つ」[9]にすぎぬと考へ、何故に單純化が可能かを一顧すらしない。だが虛數はガウスの說にて明かな如く無內容無對象の理想要素では斷じて無い。

ヒルベルトは無限遠點無限遠直線等が理想要素であると云ふ。[10]其等の導入に依り「二直線が常に一點に於て而して唯一點に於て交る」との定理が一般に妥當せしめられると。而て此定理の普通妥當性のためにのみ無限遠點等は導入されると。だが我々は此導入に依りて何故かの定理の一般性が保證されるかを問はねばならない。「何故」は無限遠點の理念性に依つては答へられない。無限遠點の理念化は最初から「何故」の問題を放棄する。ところで平行線が無限遠點を持つとは同じ方向を持つ事に他ならぬ。同方向の中に無限遠點の基點がひそんで居る。無限遠點は無對象の概念ではない。

更にヒルベルトは數論に用ゐられるイデアル數を理想要素と考へる。[11]ところでイデアルの定義は次の如くである。[12]——「體Kに屬する代數的整數から成る集合にして次の性質を有する物を『體Kに於けるイデアル』と稱す。(Ⅰ)此の集合はモードゥルを作る。卽ち此集合中の任意の元素の和又は差が又此集合に屬す。(Ⅱ)此集合の任意の元素にKの代數的整數の任意の物を乘じたものは又此集合に屬す。」卽ちイデアルは或條件を充す代數的整數の集合である。斯るイデアルを理想要素と考へるならば群や體をも理念化せねばならぬ。然し此『理想的』の意味は現實からの抽象(數學的抽象)の意味の觀念性、數學の對象の持つ觀念性にすぎなくなる。それは決してヒルベルトが欲する如き無對象無內容な理念性でない。

要之、ヒルベルトが數學中に現存すると考へる理想要素は斷じて彼が想像する如き理念ではない。從つて無限理念化の一大支柱が倒れる。

更に次の事も注意せねばならない。數學に於ける無限の機能は、カントのイデーの如き規制的機能ではなく、

構成的な機能を持つてゐる。數學的無限は「一切の經驗を超越しこれに依つて具體者が全體性に於つて補足される理性概念」[13]ではなく、公理を介して對象を定義し構成して行く。數學の無限はカント的イデーではない。[14]

ヒルベルトの有限主義は必然的に無限の理念化に導く。しかも以上に說明した如く此理念、理想要素は何等の存在の理由を持ち得ないことが明かとされる。故に有限主義の止揚そのものが理想要素を無用ならしめる唯一の道であると云へよう。

右に述べた如くヒルベルトの有限主義は無限の理想要素化に導くばかりでなく、更に記號の極端な重要化、絕對化、或意味での記號神祕主義とも云ふべきものと密接な聯關を持つてゐる。

ところで形式主義者は數學を次の樣に考へる。ベルナイスは云ふ[15]――「論理學が內容的最普遍者を取扱ふのに對して數學は形式的關係及び性質の普遍的理論である。」卽ち數學的なものに於ては全然、實質を持つ內容は存在せず、全く抽象的形式的なものとする。しかも之は外論理的（ausserlogisch）な對象であると。然らば此外論理的にして無內容なものとは如何なるものであらうか。「論理的推理の適用や論理的手續きの實行の前提條件として旣に表象中にあるものが――直觀的に直接體驗として一切の思惟の前に存在する或外論理的具體的な客體が――與へられてゐる。論理的推理が確實であるためには其等の客體は完全に其の總ての部分に亙つて總覽されねばならず、其等の提示、區別、順序、並列は客體と同時に直接的にもはや或他のものに還元されない若しくは還元を要しない或物として與へられてゐる。これは私が數學並びに一般に學問的思惟、理解、表示のために必要と考へる哲學的立場である。而して殊に數學に於ては我々の觀察の對象は具體的な符號自身であつて、其形態は我々の立場からは直接に判明で再認され得るものである」とヒルベルトは云つてゐる。[16]

だが我々は此處に若干の疑問を提出しなければならない。形式主義者は數學を形式的なるものとして內容から絕對的に峻別する。先づ此處に問題がある。次ぎに數學

對象卽記號(符號)とするところに更に重大なる疑問がある。

數學の對象の規定づけを一應考へる。我々は現實の物を數へる時此等の物の質的差別を捨象し同質性に於て把握する。此時現實の或物(エトヴス)は質的差別を止揚されてヘーゲルの所謂一者(アインス)となる。かくて數學の對象たる量の範疇(勿論ヘーゲル的意味の)が成立するのである。異質性を失つた一者と一者の境界、一者の限界、卽ち量的限界は限界ならぬ限界であり、斯くて數學對象の質に對する無關心性、外面性が生ずる。だが此處で忘れてならぬことは數學の對象の形式性は具體的對象の一モメントであつて、斯る具體者から離れて存在するものではないこと、形式は內容と常に統一されねばならぬことである。故に數學の形式化無內容化は相對的な意味に於て、卽ち具體的な現實に對比して形式的外面的と云ふにすぎない。數學の對象は絕對的な意味に於て無內容であるのではない。數學の對象がヘーゲル的な量の範疇に含まれること、更に量が質と統一されて度量に發展すること自身が、數學の對象の或意味の內容性、質性を物語つてゐる。* 公理主義者は數學の對象の相對的無內容性を絕對化する事に依つて記號の神祕化への道を切り開いて行くのである。この伏線を見逃してはならない。

*數學の對象を論究するのは一箇の重大なる問題である。これに關してはヘーゲルの量の範疇に依る數學對象の規定は多大の示唆を與へる。詳細な展開は別の機會に行ひたい。

第二の問題。「數論に於ては我々は數の記號

I.　II.　III.　IIIII.

を持つてゐる。此場合各數の記號は各に於てIの次に常にIが續くことによつて直觀的に識別される。此等の數記號はそれ自身に於ては何等の意味を有しない。——我々の考察の對象は正しくこれである。」[17](傍點筆者)卽ちヒルベルトに依れば數記號はそれ自身何等の意味を有しないとされ、且此無意味な記號が我々の考察の對象であるとされる。以上の二つの主張は、まさしく區別されない。數記號の無意味性(卽ち數記號の指示性の缺如)は數記號のみを考察の對象たらしめざるを得ないからである。勿論、數學は記號を處理する、ライプニッツは對象

の直接的認識である直觀的(intuitiv)認識から、對象の全性質を顧慮しないで對象を記號に依る云はば盲目的な象徵的(symbolisch)認識を區別し、數學を後者にかぞへてゐる。然し此認識の被媒介性、間接性を不當に絕對化して記號から指示性を奪ひ、記號のみを認識の對象とすることは許されない。「意味なき記號」とは形容矛盾の以外の何ものでもない。視覺的或は音響な現象がそれ自身記號であるのではない。それが記號であり得るのは當該現象を媒介として或思想が、或對象が把握せられねばならない。且、把握すること自身が記號の本質なのである。記號は思惟と結合して思惟の對象たる物の存在を指示する。此處に記號の本質がある。[18] 從つて數は數記號ではない。數記號IIは數對象「二」そのものではない。II及び此略號2はいづれも客觀的な對象（ヘーゲル的意味に於て量の範疇に屬する）を指示するものであり、斯る指示性を失つた記號は記號たるの本質を既に失つてゐる。數記號の無意味化は數學を無意味たらしめるであらう。「符號が符號自身を意味する、卽ち符號が符號自身として自立的自足的にあることに他ならぬ」と主張される下村氏の意見[19]には我々は同じ難いのである。若し斯る立場より數學の自然界への適用を論じようとするならば記號が萬有を支配するとの記號の神祕主義＝呪術主義に陷らざるを得ない。公理論者は數の記號の役割の重大性と數認識の間接性、抽象性に眩惑されて數學の對象そのものをも見失つた。

更に記號の神祕化は無理のイデー化と密接な關係を持つてゐる。之に就て述べよう。我々は既に超限的なるものが數學に於て不可避な事をヒルベルトが承認したのを知つた(前出)　例へば次の例に於ても其事を容易に看取するであらう。[20] ――素數に關する定理――「p＋1 と p!＋1 との間には確かに一の新しい素數が存在する」との命題は「p＋1 又は p＋2 又は p＋3 又は……又は p!＋1 は確かに素數である」と云ふ命題の略稱であり、全く有限的性格を持つてゐる。然し「より大なる素數が存在する」は既に超限性をもつ。これは「存在する」との陳述に依つてである。「一つの有限な全體中に一の性質を持つ一の對

象が存在する」との主張は勿論未だ有限的であるが、「p より大なる素數が存在する」との陳述は「p+1 又は p+2 又は……」と無限に至る選言命題なのである。有限主義の立場からは斯樣な無限性を含んだ選言判斷に對しては拒中律は成立し得ない。選言命題の選言項の無限を有限的に個別的に其の眞僞を判決し盡すことは出來ぬから、斯樣な選言判斷を一般に否定することは有限的立場からは無意味なのである。卽ち肯定と否定が對立をなさぬから、拒中律が無意味となつて來る。(これは直觀主義が唱へ始めたもので最近はヒルベルトも此說に相唱和してゐる。)

勿論此場合拒中律萬能を主張して直觀主義者、公理主義者を論難しようと云ふのではない。我々の反對するのは拒中律を有限主義的に否定することである。有限主義者は認識を絕對的に有限化して之に依つて無限性をもつた拒言判斷を否定するのである。上記の素數の例がさうである。然し我々は認識の中には有限性と無限性の統一の存することを主張するから無限選言判斷、一般に無限

判斷を總體的に否定することには反對せざるを得ない。例へば「自然數系列にてすべての項が直後に次項を持つ」とのペアノの公理は無限性を含んだ結合判斷ではあるが、此無限性はペアノの公理そのものに依り完全に規定されてゐるから、斯る判斷と其の否定判斷とは完全に對立する。從つて拒中律が成立する。我々が有限主義者でない限り右の事實は自明的である。

次に拒中律を主觀の客觀に對する關係から否定する立場(拒中律の主觀的否定)がある。これは我々の認識の不完全から眞とも僞とも判決し兼ねる場合があると云ふのである。我々の認識が絕對的に無限のものでない限り、有限と無限との統一である限り、斯る場合はあり得るのである。然し此場合に認識の不完全を誇張して絕對化するならば不可知論、特に無限の不可知論(拒中律の有限主義的否定)に直ちに轉落する。又、主觀的な不決定をそのまゝ客觀に由來すると考へれば不決定論の危險に陷る。此等の誤謬は警戒せねばならない。

然し拒中律の否定の第三の場合、客觀的否定がある。

これは對象がAの性質をもつと同時に非Aの性質を持つとの客觀的事實に由來するのである。此場合はAと非Aとの間を動搖する不定性があるのではなく、Aでもあり非Aでも同時にあることが嚴然として認識されてゐるのである。形式論理を止揚した論理に於ては斯る場合は容認される。對立物の統一はかゝる論理の中心概念なのである。排中律の斯る立場からの否定、止揚は我々が全幅的に支持するところのものである。

だが所謂直觀主義者の排中律否定は有限主義的否定か、誇張された主觀主義的否定にとゞまつてゐる。

扨、ヒルベルトは無限問題に對する有限主義の無力を無限のイデー化、無限命題の理想的命題化に依つて陰蔽しようとする。「この理想的命題、即ちそれが有限的主張を表現しない限りの式は何等の意味を有しない故に其等に於ては論理的手續きは有限的命題に於ける如く內容的に行ひ得ない。それ故に論理的手續き及び數學の證明自身をも形式化することが必要である。」(21)(傍點筆者)。このヒルベルトの言葉を注視せよ。有限主義の無限問題に對する無力を記號の無意味化に依つて救助しようと云ふのである。ヒルベルトの所謂形式化は記號化、しかも無意味な記號との轉置のことに他ならぬ。此記號化は論理計算學(ロギクカルキュル)に依り行はれるが、勿論斯學の記號は根源的には何等かの對象の表示のために導入されたのであるが、ヒルベルトは記號から總ての意味を奪ひ去つて、論理計算學自身を其自身としては何等の意味なき理想的命題の體系に轉化させてしまふのである。(22)

無限を無內容な理想要素とする有限主義は記號神祕主義を必然の補足物として要求する。有限主義からは絕對に內容の捕へ得ない無限が有限と共に扱ひ得るには、(數學的無限を有限主義から何等かの形で扱はうとするには)、記號に依る有限と無限の平準化無內容化が絕對必至なのである。記號神祕主義に依り有限と無限の或意味の結合、勿論極めて歪曲された結合統一が(一度び有限主義に依り排除されてゐたのが)密輸入される。これは公理主義者が無限の前に彼等獨自の仕草で屈服拜跪した一場のカリカチュアである。

だが勿論我々がヒルベルトの「記號の哲學」に反對したからとて彼の用ゐた記號、記號を用ゐての論理的數學的操作全體を否定するのではない。(彼の用ゐた個體記號とか變記號とかは既に何等かの客觀への指示を明白に含んでゐる。)記號に依り我々は對象を明確に把握し得る。記號の中に對象を代表させる事に依り對象の矛盾が記號の矛盾として出現する。我々は記號の運動(勿論これは對象の運動に依り規定される)を追求し以て對象の運動を知ることが出來る。記號の單純性直觀性は記號を媒介とする認識に單純と明確を與へる。記號の完備は觀察者の視線を對象自身に向ける事を無用にする。ヒルベルトの形式化は此意味に於て利用し得るのである。

最後に次の事を忘れてはならぬ。無限的關係を表示する記號は有限的直觀的であるが、然し此記號に依つて無限的關係そのものが有限に還元するのではない。これは記號の神祕主義に立たぬ限り自明の事實である。

扨、ヒルベルトの形式的公理主義の目的は何處にあるのだらうか。公理的方法とは體系を根本概念及びこれの結合體たる公理から出發して展開する方法である。集合論に於てはツェルメロに依り始められフレンケル等に依り發展させられてゐる。これに依り現存の「矛盾」は排除された。然し公理系自身が矛盾をもたぬとの論理的保證は未だに果されてゐない。ヒルベルトの目的はまさに公理系自身の無矛盾の證明、論理的保證にある。彼は此仕事を超數學とか證明論とか呼んでゐる。(23)

超數學は先づ數學の總ての前提(基礎概念、推理法、證明手段等々)を摘出列擧し、之を論理計算に依り記號化する。これをヒルベルトは形式化と呼んでゐる。超數學の對象はかく記號化された通常數學の公理命題證明等であり、證明論の目標は其等對象間の無矛盾性の證明にある。矛盾の存在は表示される一定の式、例へば一≠一の出現に於て看取する。公理系の無矛盾證明はかゝる一定式の不出現の證明に歸着せしめられる。(此歸着が如何なる前提と過程に依り可能かの吟味は後に讓る。)ところでヒルベルトの所謂無矛盾性とは何であるか。

公理系は一定の對象領域(ヒルベルトは個體領域と呼

ぶ)を基礎として成り立つが、此對象の個數が有限ならば當該公理系の無矛盾性は當該公理系を充足させる對象の存在(ヒルベルトは充實可能性(エルノユルバルカイト)と呼ぶ)と同意義である。然し無限個體領域の時は些か問題が變る。今或式Aの否定式Aが個體領域の總ての個體に依り滿足せしめられる時、即ち普遍妥當的である時はAは矛盾を持つと云はれる。ところで無限個體領域にてはAが普遍妥當的でないからとて直ちにAを滿足させる個體が見出されるとは限らぬ。即ち此場合には公理系の充實性は無矛盾性の充分條件ではあるが必要條件ではない。故に無矛盾性證明は充實性の證明に依つては望まれない。此時には無矛盾性の意味を有限の場合とは變化させねばならない。公理系Aの無矛盾性はAの充實性に依つてではなくAの充實の假定が矛盾に導かぬ事を證明すればよいとする。(24) 此證明は例へば $1 \neq 1$ の如き一定の形式論理的に矛盾せる式の不出現に依つて行はうと云ふのである。

扨、數學の對象は極度に抽象的ではあるが、然し無矛盾性に依つて其の本質は盡されはしない。無矛盾は對象存立即ち充實可能性の必要條件ではあるが充分條件ではない。矛盾の缺如が對象に存立を與へるのではなく、對象の存立が無矛盾の基礎である。(25) これは充實可能性の假定に依つて無矛盾性證明を行はうとするのを見ても明白である。充實可能とは對象の存立のことなのである。ところで無矛證明は對象存立の必要條件の證明として極めて重要であり、ヒルベルトの業蹟も相應に評價されねばならない。たゞ對象存立の無矛盾の證明は當該對象成立の特殊性を保證するものでない事を忘れてはならぬ。

更に次の事を注意せねばならぬ。ヒルベルトの所謂「矛盾」とは、$1 \neq 1$ の出現と解する如く、形式論理的矛盾である。式「一が一でない」は一の無媒介な直接的自己否定である。我々は主觀的循環に於て斯樣な矛盾を見た。其處では集合が直接に自己の要素となる、即ち集合の無媒介直接の否定が行はれた。斯る否定が所謂集合論「矛盾」の直接の根底であるからヒルベルトの無矛盾證明は主觀的循環除去の論理保證として極めて重要である。我々は有限主義記號神祕主義理想要素說の外被に包まれた

超數學の中に右の如き合理的核心を見出す。

ところで客觀的循環はヒルベルトの無矛盾證明にては排除されない。客觀的循環は $1 \neq 1$ の如き式に還元し得ぬ。循環は形式論理的矛盾を持つのではなく、集合と要素との對立的統一なる具體的矛盾を持つからである。否それどころかヒルベルトの無矛盾證明が客觀的循環を使用することも示される。(後出)

我々はヒルベルトを有限主義、理想要素説、記號神祕主義として實に否定的に批評し去つたが、然し彼の超數學の合理的核心を見失つたとは思はない。有限主義の狹小な立場からは無限は數學的には曖昧極まる自由生成のメディウムになり終る(ブロウワー)か、或は理想要素として採り入れる(ヒルベルト)かである。無限は前者に依り其の本質を破壞されるが、後者にあつては理想要素として其の内容を問はぬことから却つて無限は實質的な破壞を被る事なく恢復される。此處にヒルベルトの有限主義の特色がある。彼は記號を無内容化し、無限を此無内容な記號で現さうとする事に依り却つて實質的には有限主義の立場を踏み越えて行く。ヒルベルトの優れた點はまさに此處にある。我々が彼を利用し得るのもまさに此處にある。

愈々超數學の中心問題たる無矛盾性證明の吟味に向ふ。ヒルベルトは古典的名著『幾何學の基礎』(一八九九年)の發表以來絶えざる公理主義的努力を續けてゐるが、無矛盾性證明は本來の目的たる集合論や解析に於ては未だに解決に達してゐない。ベルナイスとの協力になる最近の大著 "Grundlagen der Mathematik" (1934) は自然數論の無矛盾證明さへ續卷に讓つてゐる。然し斯る未完成な勞作のうちにもヒルベルトの論究の基本方向をうかがひ知ることは出來る。先づ彼の超數學にて重要な機能を擔つてゐる若干の概念と操作の批判を始める。批判は常に循環論と聯關を保ちながら進めることとする。(註)

先づ個體領域。——ヒルベルトはこれを個體(要素)の存在する處には必ず其の基礎に置いてゐる。例へば述語の規定の時にも此規定を此述語の含む變項の領域と關聯

して規定すべき事を注意してゐる。[26]又自然數の場合にも自然數集合が完結せる全體をなす事を要求する。[27]加之、實數集合をさへ個體領域として要求する。[28]此態度は公理系形成の場合にも一貫してゐる。彼がペァノの公理系を採用する際に、「零は數である」と「aが數なる時はa'も數である」なる二公理の無用を唱へるのも彼が數を個體領域の物、數領域の數と考へたからである。[29]右の二公理は個體領域を基礎におけば數0とStrich記號及び個體變項に對する代入規則を以て代位される。

又、ヒルベルトは(A)から(Z)に至るまでの數箇の公理系を構成してゐるが、此等に現れる個體變項はすべて其の基礎に個體領域を前提してゐる。自然數論の公理系にては自然數の集合が、卽ち領域が本質的前提となつてゐる。此前提なくしては公理系中の變項の意味が全く理解されないのである。ところでかくの如く無限個領域を前提として持つことは有限主義、原子論的構成主義そのものの否定である。これはヒルベルト批判の中心點であるから忘れてはならない。

次に代入(Einsetzung)。——此操作は右記の個體領域と本質的な聯關を持つてゐる。ヒルベルトも認める如く代入は通常の論理に於ける普遍から特殊への推論に照應し之を形式化したものである。命題計算學に於ては命題變項に對する任意の或命題の「代入」なのである。述語計算學にては例へば個體變項に對しては個體變項又は個體定記號が、獨立變項（アーグメント）なき式變項 Formelvariable には或式が「代入」される。以上の如き「代入」が何故行はれ得るか——これの理解は個體領域なしには不可能である。與へられた式の體系中の或變項を他の變項又は定記號にて置きかへても式の體系の構造が破壞されぬこと——これに依り始めて「代入」なる操作が可能なのであるが、この可能性の保證を與へ得るものは個體領域以外にはない。代入さるべきものの領域と代入すべきものの領域との共通性に依り始めて代入が論理的操作たり得る。

次に自由變項と束縛變項との關係。——公理系には一定種類の對象と一定の基本述語が前提され、各基本述語は各々述語定記號で表示され、これの各獨立變項は一定

の對象領域に含まれるものとして前提されてゐる。㉚ ヒルベルトは普遍判斷と特殊判斷を充全に形式化するために束縛變項を導入する。㉛ ところで此自由變項の束縛に依り何がもたらされるのであらうか。(x)𝔄(x)は「凡てのxに對して𝔄(x)が成立ち」、(Ex)𝔄(x)は「𝔄(x)を成立させるxが在る」を夫々表示するが、此等はいづれも個體變項xの領域自身との關係を顯現的に定式化してゐる。此處に束縛變項導入の意義がある。自由個體變項に對しては束縛變項の代入は禁止される。㉜ 何者、「他入」は一定の個體領域の中でのみ可能であるのだから、この個體領域との關係、從つて個體領域自身を他の個體で置き換へる事は事態の許さぬところであるから。領域の考慮此代入禁止の理解にとつても實に不可缺である。

從つて自由變項と束縛變項との基本關係を表示した所謂基本式(a)(b)㉝の理解にとつても領域の考慮は絶對必至である。

(a)　(x)A(x)→A(a)
(b)　A(a)→(Ex)A(x)

次に實證可能性(Verifizierbarkeit)。——これも超數學の中心概念の一つであり、數字式の「眞」wahr の規定の擴張である。㉞

(1)數字式は「眞」なる時は「實證可能」。
(2)若干個の自由個體變項のみを持つ式は如何なる數字を該變項と置換するも「眞」となれば「實證可能」。
(3)束縛變項を持つが式變項と全稱記號を持たぬ式には還元(これの分析は後出)に依り(1)(2)の意味での實證可能の式となれば「實證可能」。

右の「實證可能」概念の規定を一見すれば「如何なる數字を該變項と置換するも」なる規定に見られる如く自然數全體が隱密のうちに前提され使用されてゐる。自然數全體の前提なくしては「如何なる」の意味は全然不可解である。ヒルベルトは自然數論の無矛盾證明に「實證可能」の概念を用ゐるが、此概念は逆に自然數全體を前提する。

愈々ヒルベルトの無矛盾證明を批判の對象とする。ヒルベルト派の「矛盾」とは既述の如く形式論理的のものであることを先づ常に記憶の中にとゞめておかねばならない。公理系の無矛盾とはそれから或式𝔄と其の否定$\bar{𝔄}$が導出されぬことである。

扱、或式の否定が導出されぬ時はかの式を反駁不可能 unwiderlegbar と云ふ。ところで式の反駁不可能と公理系の無矛盾とは密接な關係を持つ。(35) 次の定理が成立つ。——「論理記號、束縛個體變項、或る述語定記號及び個體定記號を用ゐて式 $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_k$ に依り表示され且自由變項を持たぬ公理がある。而て述語定記號に依り表示される基本述語は專ら公理を以て特色付けられるとする。然る時は公理系の無矛盾性は（述語計算に依り形式化された通常の推論が問題となる限りは）此公理系の各述語定記號をこれと夫々同個數の獨立變項を持つ各新しき式變項を以て置換し、各個體定記號を各異れる自由個體變項を以て置換する時 $\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2 \& \dots\dots \& \mathfrak{A}_k$ から生ずる式の反駁不可能性と合致する。」ところで無矛盾性の問題は無限個體の場合に關しては單に消極的に充實可能の假定が論理的矛盾を來さぬとの意味にしか解し得ないが、(36) 右の定理に依り無矛盾性の問題は充實可能の問題から反駁不可能の問題へと轉化されて行く。

無矛盾性と反駁不可能性との不可離の關係はヒルベルトの所謂「演繹定理」から導出される。(37) 演繹定理とは——「式 $\mathfrak{A}$ から式 $\mathfrak{B}$ が導出可能の時は $\mathfrak{A}$ 中の自由變項が導出過程中で固定（フエストハルテン）されてゐる時は式 $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ はそれ自身が述語計算學の導出可能の式であるか或は代入に依り之から生ずる。」今、式變項を含まぬ式から論理記號に依り表示される公理系（第一階の公理系）中の與式の自由個體變項を全稱記號で束縛すると公理系は自由變項なき演繹相等な公理系（これを $\mathfrak{A}_1 \dots\dots \mathfrak{A}_k$ で表す）となり、式 $\mathfrak{C}$ は此公理系に依りて證明されるとすれば $\mathfrak{A}_1 \& \dots\dots \& \mathfrak{A}_k$ から $\mathfrak{C}$ が導出される。$\mathfrak{A}_1 \& \dots\dots \& \mathfrak{A}_k$ は假定に依り自由變項を含まぬから演繹定理を適用すれば、式 $\mathfrak{A}_1 \& \dots\dots \& \mathfrak{A}_k \rightarrow \mathfrak{C}$ は述語計算學の導出可能の式から代入に依り得られる。若し此時公理系が矛盾を持つとすれば式 $\mathfrak{A}_1 \dots\dots \mathfrak{A}_k$ から式 $\mathfrak{B}$ 及び $\bar{\mathfrak{B}}$ が、從つて $\mathfrak{B} \& \bar{\mathfrak{B}}$ が導出可能である $\mathfrak{C}$ を此式で置換すると式 $\mathfrak{A}_1 \& \dots\dots \& \mathfrak{A}_k \rightarrow \mathfrak{B} \& \bar{\mathfrak{B}}$ が述語計算學の導出可能の式から代入に依り得られる。然るに右の式は命題計算に依り式 $\mathfrak{A}_1 \& \dots\dots \& \mathfrak{A}_k$ の否定に變換されるから、今公理系が矛盾を持つとすれば式 $\mathfrak{A}_1 \& \dots\dots \& \mathfrak{A}_k$ から、述語定記號を式變項

を以て、個體定記號を個體變項を以て置換する事に依り生ずる總ての式は述語計算學に於て反駁可能となるのである。卽ち公理系の無矛盾性と此公理系から生ずる式の反駁不可能性とは不可分の關係を持つのである。

以上は述語計算學の場合であるが無限個體を含む數論の公理系にても同樣である。[38] これを特別の例

$$(\mathfrak{F})\begin{cases}(x)\ \overline{R\ (x,\ x)}\\(x)(y)(z)(R(x,\ y)\&R(y,\ z)\rightarrow R(x,\ z))\\(x)(Ey)\ R(x,\ y)\end{cases}$$

を以て明かとしよう。（R(x, y)はyはxの後續であるの記號）此式は無限個體領域では成立するが有限個體領域では成立しない。今$(\mathfrak{F})$中のR a, b)に$a<b$を代入すると

$$(\mathfrak{F}_0)\begin{cases}(x)\ \overline{x<x}\\(x)(y)(z)(x<y\&y<z\rightarrow x<z)\\(x)(Ey)(x<y)\end{cases}$$

を得る、$(\mathfrak{F}_0)$は有限個體領域では充實されない。若し$(\mathfrak{F}_0)$を出發式として述語計算學に加へる時或式とこれの否定式が同時に導出されぬ事が示されるならば、これは（述語計算學に依り形式化された推論の範圍で」無限個體領域の無矛盾性が證明されること丶なる。それはさておき$(\mathfrak{F}_0)$の無矛盾性と式$\mathfrak{F}$（$(\mathfrak{F})$の三式の結合式）の反駁不可能性との合致は容易に示される。若し$(\mathfrak{F}_0)$が矛盾に陥ると假定すれば式$\mathfrak{F}_0$（$(\mathfrak{F}_0)$の三式の結合式）が矛盾に陥る。卽ち$\mathfrak{F}_0$から述語計算學を用ゐて斯學の變項及び定記號に定記號$<$を加へて作られる總ての式が、從て亦$\overline{\mathfrak{F}_0}$が導出される。$\mathfrak{F}_0$は自由變項を持たぬから既述の「演繹定理」に依り式$\mathfrak{F}_0\rightarrow\overline{\mathfrak{F}_0}$が述語計算に依り導出され、更に之から命題計算に依り$\overline{\mathfrak{F}_0}$が得られる。此$\mathfrak{F}_0$の$<$記號に式變項Rを代入すれば$\overline{\mathfrak{F}}$を得、$\mathfrak{F}$の反駁可能が證明されるのである。逆の證明も容易である。卽ち式$\mathfrak{F}$の反駁不可能性は公理系$(\mathfrak{F}_0)$の無矛盾性と同意義である。

更に無限個體領域に於てのみ成立つ式として

$$(\mathfrak{D})\begin{cases}(x)(Ey)\ P\ (x,\ y)\\(Ex)(y)\ \overline{P\ (y,\ x)}\\(x)(y)(z)\ (P\ (x,\ y)\ \&\ P\ (x,\ z)\rightarrow y=z)\\(x)(y)(z)\ (P\ (x,\ z)\ \&\ P\ (y,\ z)\rightarrow x=y)\end{cases}$$

がある。$P(a,b)$を「bはaの映像(ビルド)である」の表示であるとすると右の式はデデキントの無限規定――物の集合が無限であるとは其の部分集合と一對一の映寫を許す集合である――の形式化に外ならぬ。$(\mathfrak{S})$の四式を「結合」した式$\mathfrak{D}$の充實性こそデデキント的無限の成立である。此場合は$\mathfrak{D}$の導出不可能の立證が$(\mathfrak{S})$の無矛盾證明となる。$(\mathfrak{S})$中の式變項$P(a,b)$に「aはbを後續項として持つ」を置き之を簡單のため Strich 記號を導入して等式$a'=b$を以て形式化すれば$(\mathfrak{S})$は

$$(\mathfrak{D}_0)\left\{\begin{array}{l}(x)(Ey)(x'=y)\\(Ex)(y)(y'\neq x)\\(x)(y)(z)(x'=y \& x=z \rightarrow y=z)\\(x)(y)(z)(x'=z \& y'=z \rightarrow x=y)\end{array}\right.$$

となる。$(\mathfrak{S}_0)$の無矛盾性の證明は同時に$\mathfrak{D}$の導出不可能性、從つて$\mathfrak{D}$の反駁不可能性の立證である。$(\mathfrak{S}_0)$中の第一式第三式は相等性公理$(J_1)\ a=a\quad(J_2)\ a=b\rightarrow(A(a)\rightarrow A(b))$から導出されるから無矛盾性證明の目標は次の五式である。

$(x)\ \overline{x \langle x}$

$(x)(y)(z)(x \langle y \& y \langle z \rightarrow x \langle z)$

$(x)(Ey)(x \langle y)$

$(Ex)(y)(y' \neq x)$

$(x)(y)(z)(x'=z \& y'=z \rightarrow x=y)$

扨、無矛盾證明の第一歩は束縛變項の排除、自由化である。これは所謂基本式を用ゐて行はれるが、此基本式そのものは個體領域を不可缺の基礎としてゐる。先づ全稱記號を自由化すると右の五式と演繹相等な式

$\overline{a \langle a}$

$a \langle b \& b \langle c \rightarrow a \langle c$

$(Ey)(a \langle y)$

$(Ex)(y)(y' \neq x)$

$a'=c \& b'=c \rightarrow a=b$

を得る。此第五式は相等性公理から導出され、第三式、第四式は存在命題である。此存在命題の存在形式を排除するには此命題が主張する存在を顯現的に示す一層規定的な命題で置きかへる。卽ち第三式は$a \langle a'$で置き換へ

る。然し此置換が何故可能であるかを考へるならば、それは偏に自然數の順序性、卽ち自然數全體の領域の特性に基く事は實に明白である。第三式の（Ey）が排除される事は如何にも命題を有限化するものの様であるが、此有限な外觀を持つ置換の可能性はまさしく逆に自然數領域に依つて保證される。

扨、第四式は個體定記號0の導入に依り先づ$(y)(y' \neq 0)$で置換される。此式は第四式から基本式(b)を用ゐて導出されるが、それは更に演繹相等な $a' \neq 0$ に變形される。此變形は第三式の場合と同じく自然數領域の前提に依り始めて可能である。結局、無矛盾性證明(相等性公理の導入に依り擴張せる述語計算學を前提して）の對象は

$$a < a \qquad (<_1)$$

$$a < b \,\&\, b < c \rightarrow a < c \qquad (<_2)$$

$$a < a' \qquad (<_3)$$

$$a' \neq 0 \qquad (P_1)$$

$$a' = b' \rightarrow a = b \qquad (P_2)$$

となる。

ところで公理系の無矛盾性證明は或一定の式の導出不可能を證すればよい。[39] 既述の如く矛盾とは或式$\mathfrak{A}$と其の否定$\bar{\mathfrak{A}}$が同時に導出される事である。而して矛盾ある時は如何なる式でも導出可能なのである。何者、今、命題計算學の恒等眞な式 $A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B)$ から出發し此式のAに式$\mathfrak{A}$、Bに式$\mathfrak{B}$を代入すると $\mathfrak{A} \rightarrow (\bar{\mathfrak{A}} \rightarrow \mathfrak{B})$ を得る。矛盾ある時は$\mathfrak{A}$と$\bar{\mathfrak{A}}$とが導出可能であるから推理式を二回適用すると式$\mathfrak{B}$が導出される。Bに代入される$\mathfrak{B}$は任意の式だから、公理系に矛盾があれば任意の式が導出されるのである。故に逆に或一定の式の導出不可能から公理系の無矛盾性がひき出される。

以上に依つて無矛盾證明が完全に有限化される。卽ち無矛盾證明は或一定の式、例へば $0 \neq 0$ の如き有限な式の導出不可能に歸着される。若し公理系に矛盾無しとすれば、導出可能式の否定式の、導出不可能なる事は無矛盾の本質から明かである。$0 \neq 0$ は相等性公理 $a = a$ から導出される式 $0 = 0$ の否定式として導出不可能である。無矛盾證明は結局式 $0 \neq 0$ の公理系からの導出不可能の

立證となる。

併し右の論考は決して無矛盾證明が完全に有限なものである事を示すものではない。先づ無限多の個體領域を持つ公理系に矛盾があれば 0≠0 が導出されるが若し0≠0が導出されぬとすれば公理系は無矛盾であるとの論證が上述の證明の有限化の核心をなしてゐる。これは無限多に對する拒中律の使用であり、有限主義からは許し得ない論理である。0≠0 の導出不可能は無限個體の公理系の無矛盾を意味し、0≠0の導出可能は無限個體の公理系の矛盾を意味するとの推論はヒルベルトの所謂超限論理函數である。即ち0≠0を成立させる對象が可能であるとすれば此可能な對象の實在を要求するのである。構成可能を旨とする有限主義とはおよそ完全に對立した論法である。有限主義からは無限多の場合の「可能」は全くの無意味である。ヒルベルトは有限主義の此難點を克服しようとして超限論理函數を考へる。――即ち $A(x)$ を命題の命題函數とする時 $A(x)$ を成立させる對象の存在が可能であるならば此可能な對象の一つを理念的な對象として $\tau_x(A(x))$ を以て表示するのである。斯くの如くヒルベルトは有限主義の立場から拒中律を可能ならしめようとして例の批判ずみの理念主義を持ち出して來るのであるが、我々は既述の理念主義の批判の否定的結果からして、有限主義を越えて卒直に無限領域に對する拒中律の事實的な(理念的でなく)成立を、選擇の單なる理念的可能でなく選擇さるべきものの實在を承認せねばならない。

要之、無矛盾證明の外見上の有限性は實際には無限に對する拒中律と選擇函數(勿論理念的な選擇函數ではなく實在を要求する選擇函數)を含んでゐる。ところで拒中律は選擇函數を前提する。例へば上記の如く 0≠0 の導出可能が矛盾せる對象の實在を、0≠0 の導出不可能が矛盾無き對象の實在を意味する處に始めて拒中律が事實的に成立する。結局、選擇函數(事實的に解された選擇函數は選擇公理に同じ)が有限化の核心である。然るに我々は既に選擇公理に於ける客觀的循環の存在を立證したから、ヒルベルトの無矛盾證明は客觀的循環なしにはすまされない。かくて主觀的循環の不成立の論證に客觀

的循環を使用せざるを得ないのである。

無矛盾證明の $0 \neq 0$ の導出不可能證明への歸着は右の如き意味を持つてゐるが、次に $0 \neq 0$ の公理系からの導出不可能の考察に移る。先づ定理——「式 $0 \neq 0$ の公理からの導出可能は束縛變項の適用なしには不可能である」——が證明される。[40]（證略）ところで $0 \neq 0$ の不可能證明を以て無矛盾の證明と解することから無矛盾證明は著しく簡單となる。$0 \neq 0$ を終結式とする證明圖を考へ、之に二段の操作——證明圖の證明系への分解、及び自由變項の排除——を行ふが、この自由變項排除可能は專ら終結式が $0 \neq 0$ である事に基く。自由變項の排除は「代入」の出發式への逆行と、此操作の後にも殘つた變項に對しては各變項を含まぬ式で置きかへる。例へば獨立變項なき式變項には式 $0=0$ を、獨立變項 $\mathfrak{A}$ を持つ式變項には $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}$ を、多數の獨立變項 $\mathfrak{A} \ldots \mathfrak{S}$ を持つ式變項には $\mathfrak{A}=\mathfrak{A} \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{S}=\mathfrak{S}$ を、各個體變項には0を置く。然し斯る變項の排除可能は終結式が $0 \neq 0$ である事に基くのである。

第二段の定理は——「束縛變項を許す時も上掲公理から導出可能の式は總て眞である」——である。[41] 此場合にも終結式として有限な數字式 $0 \neq 0$ を考へ、證明圖分解と代入の逆行を行ひ、式變項を排除する、然し自由個體變項は未だ排除されぬ。何者、束縛變項を含む式の證明聯關には

(α)

$$\frac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(a)}{\mathfrak{A} \rightarrow (x)\mathfrak{B}(x)}$$

(β)

$$\frac{\mathfrak{B}(a) \rightarrow \mathfrak{A}}{(Ex)\mathfrak{B}(x) \rightarrow \mathfrak{A}}$$

が用ゐられ、其中には自由個體變項が含まれてゐるから。故に我々の分解證明圖には數字式ばかりでなく、自由個體變項、束縛個體變項も含まれ、證明の進行も繰返しと推理圖式ばかりでなく、圖式(α)(β)及び束縛變項の「改稱」に依つても行はれる。出發式としては命題計算學の恆等眞式のみならず、既述の公理系、述語計算學の基本式(a)(b)が加へられる。

右の事情を考慮するならば第一段の定理に用ゐられる

如き單純な方法は許されぬ。ヒルベルトはエルブランとプレスブルガーの方法を援用する。[12] 此方法は束縛變項を含む式に、束縛變項を含まず且内容的に見ると上式と等價な式、還元式(Reduzierte)を對應させるところに成立つ。先づ全稱記號を存在記號を用ゐて排除する。注目を要するのは存在記號の排除である。存在記號の排除は證明を有限化するが、此有限化が果して如何なる根據に依り可能なるかを考察すべきである。

先づ對象たる式の最内部にある$(Ex)\mathfrak{A}(x)$の形の表示を考察する。此表示はx以外にも束縛變項を含み得るが、孰れにせよ$\mathfrak{A}(x)$は等式 $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ 及び不等式 $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$ から命題計算を用ゐ合成されたものである。此$\mathfrak{a}$、$\mathfrak{b}$は數字、個體變項、又Strichの有無に關せず、且又自由個體變項でも束縛個體變項でもあり得る。t個の Strich を持つ$\mathfrak{A}$を$\mathfrak{A}^{(t)}$で略示する。

$\mathfrak{A}(x)$の變形。(1)先づ$\mathfrak{A}(x)$を分離標準形$\mathfrak{A}_1\vee\ldots\ldots\vee\mathfrak{A}_k$に變形する。(2)次に否定形を排除する。$\mathfrak{a}\neq\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}\vee\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$ で、$\overline{\mathfrak{a}<\mathfrak{b}}$ は $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\vee\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$ で置換する。(3)次に兩側に變項xを持つ等式不等式ではxを0で置換する。此置換の可能は終結式が有限な $0\neq0$ なる事に基く。かくてxは式の一側のみに現れる。(4)次に式中のxのStrich記號の最大個數をtとすれば之より少い個數k個のStrich記號を持つxを含む等式不等式にては等號不等號の兩側に立つ表示に $t-k$ 個のStrichを添加しxのStrichをすべてt個とする。

以上四段の操作に依り$\mathfrak{A}(x)$の代りに次の分離形を得る

$$(Ex)\mathfrak{E}_1(x^{(t)})\vee\ldots\ldots\vee(Ex)\mathfrak{E}_m(x^{(t)})\vee\mathfrak{E}_{m+1}\vee\ldots\ldots\vee\mathfrak{E}_n$$

此分離形の各部分項(グリード) $(Ex)\mathfrak{E}_r(x^{(t)})$ $(r=1,\ldots,m)$ は$x^{(t)}=\mathfrak{a}$, $x^{(t)}<\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}<x^{(t)}$ の孰れか一形を含む。

第一、部分項(グリード)が等式を含む時。該部分項は$(Ex)(x^{(t)}=\mathfrak{a}\,\&\,\mathfrak{E}_r^*(x)^{(t)})$ ($\mathfrak{E}_r^*(x^{(t)})$ は$x^{(t)}$を含まなくても良い)、或は $(Ex)(x^{(t)}=\mathfrak{a})$ の形を持つ。前の形はxを持たぬ表示 $0^{(t)}=\mathfrak{a}\vee0^{(t)}<\mathfrak{a}\,\&\,\mathfrak{E}_r^*(\mathfrak{a})$ で、後の形は $0^{(t)}=\mathfrak{a}\vee 0^{(t)}<\mathfrak{a}$ で置換する。此等置換に依り(Ex)が排除され有限化されるが、此置換たるや全く公理系に依り規定された個體領域全體に依つてのみ可能である。即ち置換は無限から無

線なのではなく、まさに逆に無限を槓杆として始めて行はれ得る。ヒルベルトの所謂超數學に於ける有限性は其實全く無限性を自己の核心に含んでゐる。

第二は$x(t)$が不等式にのみ現れる場合であるが、此場合の(Ex)排除の置換に就ても全く同じ注意が繰返される。

以上の操作を繰返すと凡ての存在記號が排除される。此操作を還元と呼び、還元に依り得られる式を原式の還元式と云ふ。

ヒルベルトはラッセルの還元可能の公理が單なる疑はしき要請たるに止まるに反して、自己の還元は實際に行はれ得る事を自讃してゐるが、(43)然し彼の還元といへども有限主義の勝利でも確證でもなく、まさに遂に無限を媒介とする有限化、云はば有限と無限との統一を物語るにすぎない。

數字式に對して規定した「眞」の規定が還元に依り擴張され、實證可能の概念の導入となるが、既述の如く實證可能性は自然數領域を前提とする。而てこの「實證可能性」を用ゐて無矛盾證明が完成されるのである。

以上は無限個體領域に對する無矛盾證明の最も簡單な場合であるが、此場合にすら無矛盾證明は決してヒルベルトの誇稱する如く有限的なものではない。證明の中樞である還元が證明の向ふ公理系に依り規定された無限個體領域全體に依り始めて可能な事は、ヒルベルトの所謂(z)公理系では還元が不可能であるとの否定的事實からも逆に推察される。(44) (z)以外の公理系にて還元を行ひ得るのは我々が當該公理系にて表示可能なる限りの數論的關係を完全に支配し得るからである。

(z)公理系、即ち自然數領域の凡ての可能な諸關係の總體の無矛盾の困難さは還元の不可能に依つても推察されるが、今の我々にとつては(z)の無矛盾證明が目的ではない。たゞ最も簡單な無限個體領域に於てさへ無矛盾證明が非有限的性格を持ち、無限個體領域を前提し、客觀的循環を使用せざるを得ないかを認識するのが重要である。更に高度の複雜性を持つ(z)の無矛盾性證明が有限的であり得ぬ事は全く明白である。以上は自然數領域の場合で

あるが、證明が更に集合論や數學解析に及ぶ時、無矛盾證明が更に高度の無限性と客觀的循環を使用するかもたやすく推察される。だが之は決して證明すべきものを證明過程に於て使用すると云つた態の惡循環を意味するものではない。我々の目的は主觀的循環の非存在の證明であり、此證明過程に使用されるのは客觀的循環に外ならぬ。循環律の兩基本型への峻別はヒルベルト證明論の正當な評價と理解にとつても全く缺くべからざるものと云はねばならない。

ヒルベルトの所謂超數學、即ち公理系の無矛盾證明論に於ては有限と無限との統一が、客觀的循環が、不可缺である。――これがヒルベルト的形式主義の批判の要約である。

以上は無矛盾證明との聯關に於て公理主義を吟味したが、公理主義自身に關しては其以外にも種々の問題がある。例へばレーヴェンハイム・スコーレムの背理である。これは客觀的循環とも密接な關係を持つてゐるから、最後に簡單に論究しよう。(45)

先づ、五箇の論理的操作――「及び」「或は」「否定」「總て」「在る」――に依つて集合と基本關係（此處では要素が集合に含まれると云ふ所謂 ε 關係）から成り立つ命題を數命題と呼ぶことゝする。

今、集合論の基本關係に依つて形成される數命題の可附番無限集合がある時、かの數言表は相互兩立しないか（從つて相互矛盾するか）、或は基本關係に依る客體の結合を適當に選べば可附番無限の客體領域の內部で充實されるか、孰れかである。――これが哲理の要約である。

集合論の公理は數命題として表示され、例へば「分出の公理」は可附番無限箇の數命題の總體となる。即ち集合論の公理系は、若し無矛盾であるならば、可附番無限の領域以上に出づることが出來なくなる。スコーレムは云ふ――「絕對に可附番以上のものを得るためには公理自身が絕對超可附番集合に於て存在するか、又は數命題の絕對超可附番集合を與へる如き公理がなければならぬ。然し之は總て高次の無限の循環導入に外ならぬ。即ち公理的基礎に於ては高次の無限は相對的意味に於ての

み存在する。」

それにも拘らず我々は超可附番集合を知つてゐる。スコーレムは此矛盾を次の様に說明しようとする。卽ち集合の濃度の概念の相對化に依つてゞある。公理主義に立つて或集合Mが超可附番であるとは、公理に對應する領域の內部で公理に基いて集合Mと自然數系列Nとの間に一對一の對應が成立しないと云ふ事に過ぎぬ。然し他の異れる仕方に依つても不可能と云ふのではない。新しい公理體系に應ずる更に包括的な領域に於ては以前の領域では不可能であつた對應が成立し、MとNとの對應も可能となると。かくて公理主義に於ては有限、無限、可附番無限、超可附番無限は全く公理系そのものに相對的なるものとなる。

此「背理」から我々は種々の教訓をくみとる事が出來る。先づ公理系の相對化は、公理系に對する數學的對象の客觀的獨立性を暗示する。更に今の場合重大なのは次のことである。——卽ち無限に段階があり、高次の無限に到達するには純構成的方法に依つては不可能である。

然らば如何にして低次の無限から高次の無限に到達し得るか。單に超可附番集合を「直觀」に依り受納する態度は、或は、生成のメディウムであるとする立場（直觀主義）は、高次の無限を孤立化し、絕對化し、低次の無限との連繫を見逃す點に於て甚だ不充分である。

我々は「羃集合の構成」に於て、「對角線の方法」に於て、かの兩無限の間に橋を架す事を知つてゐる。カントル以來の集合論の歷史がこの事を示してゐる。ところで以上の手續きの中心には客觀的循環があつた。從つてレーヴェンハイム・スコーレムの背理の祕密は客觀的循環に依つてのみ解けるのではないであらうか。卽ち客觀的循環を否定する構成主義原子主義のみが可附番集合以上に到達し得ないのではないか。レーヴェンハイム・スコーレムの背理こそ、原子主義の貧弱無力な方法と數學自身の提供する豐富な內容との矛盾の表現以外のものでないと斷言したい。客觀的循環こそ始めて豐富な無限の內容を把握する方法ではないか。

集合論の背理、ポアンカレ・ラッセルの循環律禁止等の

事件は然し乍ら決して歴史的に偶然な突發的のものではない。それは深い歴史的事情が其の根據に横はつてゐる。デカルト以來の數學方法論卽ち明晰判明な個々のイデアの聯合分離から數の概念を形成しようとする方法論が先づ想ひ起される。[46]また前世紀後半ワイエルストラス、デデキント、クロネッカー等に依り唱導された「數學の算術化」も大きな歴史的背景であらう。「數學の算術化」こそデカルト的方法論の精華であらう。

然し全數學の算術への還元を企圖する此傾向は、化學を錬金術に、醫學をヒポクラテスの昔へ引き戾さうとするアナクロニズムではないか。集合論の「背理」、循環律の禁止等は「算術化」の最も著しい表現である。而して我々は循環一般の禁止が如何に數學を貧困化させるかを知つて來た。集合論の「矛盾」を排絶するためには、「數學に於けるアトミスムス」「數學の算術化」の止揚が先づ行はれねばならない。

(1) Hilbert, Über das Unendliche. (Grundl. d. Geometrie. Anhang VIII. S. 265.)

(2) Hilbert, Grundl. d. Math. S. 37.

(3) Hilbert, Über das Unendliche. S. 268.

(4) Hilbert, Grundl. d. Math. S. 17.

(5) Hilbert, ebenda. S. 17—18, S. 43—44.

(6) Hilbert, Über das Unendliche. S. 268.

(7) Becker, Math. Existenz. S. 476.

(8) Becker, ebenda. S. 477; Gauss. Werke II. Bd. S. 175ff.

(9) Hilbert, Üb. d. U. S. 269.

(10) Hilbert, a. a. O. S. 268f.

(11) Hilbert, ebenda. S. 269.

(12) 米山、數學の基礎、下卷、五三九頁。

(13) Hilbert, a. a. O. S. 288.

(14) 三宅剛一、實數の領域と連續、哲學研究一六五號三二頁參照。

(15) Bernays, Über Hilberts Gedanken Zur Beg. d. Arith. (Jahr. d. D. M. V. Bd. 31. S. 12.)

(16) Hilbert, Über. d. Unendliche. S. 275.

(17) Hilbert, a. a. O. S. 276.

(18) F. Kaufmann, Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung. S. 45ff.

(19) 下村寅太郎、數學基礎論に於ける公理的方法に就て、思想七二號、二五二—三頁。

(20) Hilbert, a. a. O. S. 277f.

(21) Hilbert, a. a. O. S. 282.

(22) Hilbert, a. a. O. S. 283.
(23) Hilbert, Grundlagen der Mathematik. S. 44.
(24) Hilbert, ebenda. S. 17—18.
(25) Hölder, Die mathematische Methode. S. 114.
(26) Hilbert, a. a. O. S. 8—9.
(27) Hilbert, a. a. O. S. 15.
(28) Hilbert, a. a. O. S. 39.
(29) Hilbert, a. a. O. S. 219—220.
(30) Hilbert, a. a. O. S. 89.
(31) Hilbert, a. a. O. S. 95.
(32) Hilbert, a. a. O. S. 96.
(33) Hilbert, a. a. O. S. 100ff.
(34) Hilbert, a. a. O. S. 238.
(35) Hilbert, a. a. O. S. 130ff.
(36) Hilbert, a. a. O. S. 18.
(37) Hilbert, a. a. O. S. 155ff.
(38) Hilbert, a. a. O. S. 210ff.
(39) Hilbert, a. a. O. S. 86.
(40) Hilbert, a. a. O. S. 221—231.
(41) Hilbert, a. a. O. S. 231ff.
(42) Hilbert, a. a. O. S. 234.
(43) Hilbert, Die Grundlagen der Mathematik. (Grundl. d. Geom. Anhang. IX. S. 302)
(44) Hilbert, Grundlagen der Mathematik. S. 371.
(45) Becker, Math. Existenz. S. 794.; Fraenkel, Mengenlehre. S. 333.
(46) P. Boutroux, Das Wissenschaftsideal der Mathematiker.

(註) 簡單に術語の説明をしておく。命題は主語と述語を持つ

が命題の主語の箇處に現れる一定の對象を個體定記號 Individuensymbol、主語の箇處に現れる變項を個體變項 Individuen-Variablen と呼ぶ。式 Formel とは可變的命題又は一定の命題又は可變的述語又は一定の述語の記號に依る表示である。可變性を持つ式を式變項 Formel-Variablen と呼ぶのである。ヒルベルトは個體定記號と式を夫々ドイツ語の小文字と大文字で、個體變項と式變項を夫々ラテン語の小文字と大文字で表示してゐる。

後記。この拙い習作は、卒業論文に加筆增補したものにすぎない。甚だ論點が制限されてゐるため、幾多の重大な點を未解決のまゝ殘さざるを得なかつた。これは勿論私の無力と準備不足にも大いに據るのであるが。例へばレーヴェンハイム・スコーレムの「矛盾」、ゲーデルの ω 不完全等は不充分にしか又は全然觸れてゐない。又、數學の對象とか方法とかの聯關の分析も殆んど爲されてゐない。又、集合論の發生發展、數學全體に於ける役割にも觸れなかつた。集合論の「矛盾」は決して數學に於ける唯一の危機の源泉ではない。それは前世紀から此世紀にかけて數學がはらんでゐる全面的危機（新しいものの生れ出づる陣痛でもあらう）の一表現にすぎない。だが以上の樣な全面的な、論理的歷史的分析は私の企て及ぶところではなかつた。然し乍ら無力な私が甚だ拙いものにせよ、一箇の習作を作り上げ得たのは偏へに田邊先生の指導と激勵に負ふところであり、茲に厚く感謝の意を表する次第である。（一九三四・一二・一二）