高次の方向量の論理

佐藤省三

内容

高次の方向量の論理

三、複素數と方向量の問題（數形象のテンソル的構造）。
——虚數——ガウスの複素平面——複素數の本質とヴェクトル表示——數對（ツアーレンパール）——複素數のマトリックス表示——マトリックスの論理
四、結　尾
——カントの負量導入の論文——負量の論理とテンソル量の論理

一　テンソル量の概念の解明

先に他の場所に於てニュートン以後の近代物理學の發展の論理的意義を考察することにより、ヴェクトルよりも更に高次の方向量が論理に導入されなくてはならぬ所以を明かにし、かゝる高次の方向量としてテンソルの論理の特色付けを試みたのであるが、こゝでは其處に於て到達し得た所を豫想した上能ふる限り數學並びに物理學の「事實」をも顧慮することにより更に精細に「高次の方向量の論理」の檢討を企圖せんとする。物理學の發展が一面、物理的量を表はすに以てする方向量の發展としても視られることが出來るならば、かゝる方向量の概念の發展の意義を考量することの論理乃至は哲學の根本的なる諸概念の解明上心要なるはこゝに再び贅するを迄もないことであつて、その著しき例としてはライプニッツ以來の內包量的思想と

關連して内包量の原本的な型 Prototyp と考へられた力の概念が他方に於て又ヴェクトル量の原型であつたこと (vgl. A. Haas, Vektoranalysis) を想起すればよいであらう。

論述の内容上比較的詳細なる數學的並びに物理的事項の叙述に亙つたのは、單なる紹介的意義を有することを目的とするに止るものではなく論理的意義の考察にあたつて出來る丈特殊科學の教ふる事實に卽せんが爲に外ならない。成可く典據を明かにせんとしたのもその爲である。然し固より我々は特殊科學の立場に立つものではないから、かゝる叙述が根柢に論理的關心を豫想することによつて同一事項の叙述と雖も、何れに重きを置き如何なる點から問題にするかにより單なる特殊科學そのものゝ立場に於て試みらるゝ場合と異るのは當然である。

我々の問題とするテンソルはヴェクトルを一次の方向量とすれば二次の方向量とも云ふ可きものである。然るに物理的量が座標變換に對する不變量として有する意義に基いて物理的法則を座標系の採り方にかゝはらざる不變式として表はすことは、相對性理論以來量子論に於てもディラックの transformation theory に於て理論物理學の方法として重要なる意義を發揮し、テンソルなる語も廣くかゝる不變量

一般を表はす爲にも用ひられその意味ではスカラー、ヴェクトルをも之に包含するのであるが、(vgl. A. S Eddington, Relativitätheorie in math. Behandlung 1925 § 20—21) 我々は物理的量が一般に有するかゝる不變量としての共通の性質は別個の獨立なる哲學的省察の對象に値するものとして當面の考察の範圍から除かんとする。我々の問題とするのはテンソルのかゝる用語法に從へば第二階級のテンソルに相當するものである(之に對しヴェクトルは第一階級のテンソル、方向を有せざるスカラー量は第零階級のテンソルである)。且これが本來「伸張」或は「緊張」に由來するテンソルの語にふさはしいものであることは疑ふべくもない。數學的には更に高階級のものが定義され物理學に於ても適用を見出さないのではなくこれらの高階級のテンソルが複雜な高次の方向量を表はすものとして、二次の方向量の論理的意義を明かにする上から言つても無視し得られないものであるが、然しそれらが如何なる方向量を表はすかについては尙充分に明かにされてゐるとは言へないが故に、こゝでは高次の方向量として主として第二階級のテンソルを取上げ、それがヴェクトルに對する高次の方向量としての特質を問題にせんとする。從つて我々はテンソルの語を特に斷らざる限りこの意味に使用せんとするものである。

方向量の研究が哲學上種々の問題の解明に對して光を投ずると思はれるに拘らず、私の知る限り、高次の方向量に關し物理學者や數學者のまとまつた研究の比較的少ないのが遺憾である。これはテンソル（廣義）の表示にあたつて低階級のものと雖も種々なるテンソルの區別をその屬する空間の特異性と共に考慮に入れなくてはならぬ困難にもよるかと思はれる。勿論テンソルを方向量として問題とせず、即ちその方向上有する特異性の問題を無視して單にその代數的並びに解析的取扱ひを以て滿足することも出來、普通數學者の立場としてはそれで充分であり當然であるとも考へられてゐる。私はこの小論を通じて第二階級のテンソルをかゝる方向量として見んとする見地を貫かんと努めた。然し固より我々の關心は第二階級のテンソルについてそれが一般に如何なる方向量を表はすかの一般的な Idee を得んとするに止る。その圖示の仕方を問題とするのもかゝる純粋な直觀化の爲であつて、種々なる第二階級の特殊なテンソルの有する區別が一々圖によつて如何に表はされるかの如き問題ではないのである。その點から言つてこゝに試みたテンソルの高次の方向量としての特色付けはかゝる意味の一般性を有することは出來るであらう。（尚この點については本文、四四——四五頁參照）

テンソル（狹義即ち第二階級のテンソル）よりも高次の方向量についても、代數的には三次の方向量、四次の方向量とも言ふ可きものに相當する第三階級のテンソル、第四階級のテンソルが夫々 Trilinearform, Quadrilinearform によつて定義されるが（H. Beck, Einführung in die Axiomatik der Algebra. Kap. x, § 109）、それらの方向量としての表示については三次の方向量が三次曲面 Fläche dritter Ordnung により表はされその軸が einseitig な方向を有するに反し、四次の方向量が四次の曲面 Fläche vierter Ordnung により表はされその軸の方向が zweiseitig を有する——以下高次のものも同様——といふフオークト W. Voigt の特色付けが普遍性を有するならば（Göttinger Nachrichten 1904, S. 495—503）、かゝる高次の曲面が幾何學的に如何なるものであるかはさて措いて、軸の方向に着目することによつて、高次の方向量として論理的には後に述ぶる如く einseitig な方向を有する一次の方向量とも言ふべきヴエクトルに對して zweiseitig な方向を有する二次の方向量たるテンソルを問題にすれば一先づ足るといふことが出來るであらう。フオークトは上述の三次の方向量に Trivektoren 四次の方向量に Bitensoren なる名を與へてゐる。

（一） 先づ物理學者や數學者によつて與へられるテンソルの定義を要約しやう。量の大さを表はす數値の外にこの數値の妥當する方向を擧ぐる必要のある量を一般に方向量と稱するがヴェクトルよりも高次の方向量を表はさんが爲に初めてテンソルの概念を物理學に導入したフォークトはヴェクトルが一面的 einseitig なる方向を有する方向量なるに對し、テンソルの有する方向を相反する二つの向き Richtungssinn が同格 gleichberechtigt なることを以て特色付け、テンソルをかゝる二面的 zweiseitig な方向を有する三つの軸の直交より成るものとして之を Tensortripel と名付けた (W. Voigt, Über die Parameter der Ksystallphysik u. gerichtete Größe höherer Ordnung; Derselbe, Elementare Mechanik S. 10 ff. 1901)。 物體の伸張或は壓縮の際に於ける彈性的な歪力の如きはその最も簡單な例であり、一物體を互ひに直角な三つの方向に沿つて一樣に「伸張」せしむる場合を想像すれば容易にかゝる Tensortripel の例を考へ得る。フォークトの考へた主軸の直交する Tensortripel は對稱テンソル symmetrischer Tensor と云はるべきものであり、以下我々が問題にするのも物理的形象に關しては多くはかゝる對稱テンソルであるが、テンソルの一般的な形、非對稱テンソル asymmetrischer Tensor を考ふるもかゝるフォークトの定義が貫徹され得るであらうか。 ウェーバ

ーは非對稱テンソルの表示の仕方を問題にし一般的なるテンソルの圖示をも試みてゐるが（Weber-Wellstein, Enzyk. d. Elem.-Math., III. Bd. 1. Teil 3. Aufl. 1923, S. 44—45）、彼に據れば非對稱テンソルは一般に互ひに斜めに交る主軸の方向とこの主軸に夫々歸せしめらるゝ數値卽ち主要素 Konstituenten とによつて一義的に決定され、主軸の直交する對象テンソルはその特別の場合に相當し、且非對稱テンソルにあつては「主軸の方向の向きと主要素の値とは無關係であつて主軸の向きを反對にするも主分素の値は變じない」(S. 18—19) 卽ち「主要素に對應 zuordnen せしめられる主軸を要求するがこの軸についてその向きをば少しも要求しない」(S. 42) が故に非對稱テンソルについても上述の對稱テンソルに於けるが如き主軸の方向の二面性が語られ、テンソルを一般にフォーグトの如く gleichberechtigt な二面的な方向を有するものとして特色付け得ると考へられる。

この際主軸の數は言ふ迄もなく空間の次元の數と一致し、從つてヴェクトルを一個の方向を有する線分 Strecke 卽ち箭で以て表はすと同様に、テンソルの場合に於ても、フォーグトが試みたる如く、その主軸を、兩端に鏃を内側(負)若しくは外側(正)に向つて對置せしめた線分により、主軸に屬する數値を線分の半分の長さ或は全長を以て

表はし、互ひに中點に於て交るn個のかゝる線分を以てすれば一般にn次元空間に於けるテンソルの圖示 Veranschaulichung は必ずしも不可能ではないと考へられる。(Vgl. W. Voigt, Elem. Mech. 1901. S. 10 ff)。

テンソルの高次の方向量としての特色付けの爲のかゝる表示の問題と關連してこゝに一言す可きはテンソルが普通に幾何學的には二次曲面 Fläche zweiter Ordnung によつて表はされるとされる點である。卽ちテンソルの主軸の値が正負の符號を異にする場合は双曲線面 Hyperboloid、何れも同符號なる時は楕圓體面 Ellipsoid、値が相等しき時は球面によつて表はされるといふのであつて、一例をあぐれば、慣性能率の廻轉軸の方向は二面的であり從つてテンソルを成すのであるが、慣性能率のテンソルは又楕圓體面により表はされ「慣性楕圓體」と名付けられるが如きこれである。テンソルがかく二次曲面によつて表はされるとすれば、然らばこのことゝ上述のテンソルの方向量としての圖示の仕方とは如何に關連するのであるか換言すれば二次曲面により上述の如きテンソルの方向の特異性卽ち二面性は如何にして表はさしめられるかの疑問が起きやう。この點につきフォーグトに徵すれば彼の所謂「Tensortripel は又三次元空間の楕圓體 Ellipsoid により表はされ通常「テンソル楕圓體」と稱

されるがこの際、楕圓體の有する三個の主半徑(主軸)の方向は Tensortripel の三個の主軸の方向と夫々一致するのであつて、唯主軸の大さが異り前者卽ち楕圓體の主半徑の大さが後者のそれ卽ち主要素の平方根の逆數に相當する。之は實はヴェクトルの場合でも同樣なのであつてヴェクトルも通常の如く一方向きの方向を有する線分、箭によつて表はされる外に、之に直角にして箭の始點から箭の長さ卽ちヴェクトルの大きさ Betrag の逆數に等しい距離を有する平面 Fläche erster Ordnung によつても表はされることゝ照應する (Vgl. Voigt. loc. cit. S. 20)。而してシェーファーが主張するが如く (Clemens Schäfer, Einführung in die theonetische Physik. § 80. Tensoren)、慣性能率のテンソルが楕圓體により表はされる場合に、楕圓體の主軸(半徑)の長さが楕圓體の中心から軸上正反對の兩方向に等しい長さであることに着目するならば、テンソルの二次曲面による表示の場合にも、テンソルの二面的方向による定義が貫徹され得る。卽ちこの場合テンソルを表示する二次曲面が單なる通常の幾何學的な二次曲面としての意義に盡きず、その主軸の方向そのものが二面的と考へらる可き所にテンソルの方向量としての特色が表はされるのである。

ヴェクトルに對し上述の如き高次の方向量としての特質を有するテンソルは座

標軸に關する成分 Komponenten の上から言へばヴェクトルが n 個の成分を有するに比し一般に n^2 個の成分を有する。而してヴェクトルにはその成分を係數とする一次形式 Linearform が對應せしめられるに對して、テンソルにはその成分を要素とするマトリックス Matrix を係數に有する雙一次形式 Bilinearform (特に對稱テンソルの場合は二次形式)が對應する。一般に n^2 個の數を方形に排列したるものをマトリックスと稱するが、テンソルはかくて代數的にはかゝる雙一次形式によつても定義せられ、その所謂 Koeffizientenschema たるマトリックスの要素を成分に有するものとして考へられるのが普通である (vgl. H. Beck, Einführung in Die Axiomatik der Algebra. Sheppard, From determinant to tensor. R. Courant u. Hilbert, Meth. d. math. Physik 1924. etc.)。而して雙一次式に於て重要なるは變數記號と云ふよりもその係數であり、係數によつて雙一次形式が決定されその全體が代表されるが故に、マトリックスは雙一次形式の單なる係數の Schema のみならず雙一次形式の全體從つてその Operation をも代表するのである。こゝに注意す可きはマトリックスを通じてテンソルが代表する所のかゝる雙一次形式の Operation に關してゞあつて、これは一つのヴェクトルから一つの新しいヴェクトルへの變換の Operation を意味するものとして解釋され得

る。ヴェクトルに通常の數を乘ずるも同一の方向を有し大きさのみ異るヴェクトルより得られざるに反し、方向をも異にする新しきヴェクトルを得る爲にはテンソルを乘ずる必要がある。既述の如き高次の方向量としての特質を有するテンソル形象のこのヴェクトルに作用して新しい一つのヴェクトルを産出する即ちヴェクトルの作用素（Operator として有する意義こそ、テンソルの論理的意義を考察する上に極めて重要であると言はねばならぬ。

n個の數の一組 eine Reihe $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ を以て之を一つの座標軸に對する成分として有するn次元空間に於ける一ヴェクトル（或はn次元ヴエタトルと稱す）を規定し得るが、この $x_1, x_2 \cdots\cdots x_n$ を變數とするn個の一次方程式の Sysstm 即ち

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = x_1' \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = x_2' \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n = x_n',
\end{array}
$$

は $x_1, \cdots\cdots x_2, x_n$ を成分とするヴェクトルから $x_1', x_2', \cdots\cdots x_n'$ を成分とする新しいヴェクトルへの變換の式を表はす。而して上式の代りに（上のn個の一次方程式の左邊に夫々變數 $y_1, y_2, \cdots\cdots y_n$ を乘ずることにより）之を一つに總括したる雙一次形式即ち

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_2y_1 + \cdots\cdots + a_{1n}x_ny_1 \\
a_{21}x_1y_2 + a_{22}x_2y_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_ny_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1y_n + a_{n2}x_2y_n + \cdots\cdots + a_{nn}x_ny_n
\end{array}
$$

を以てするも上式と äquivalent なるを以て、この雙一次形式はヴェクトルの變換の Operation を表はすものと解釋し得る（R. Courant u. Hilbert, op. cit. 1924 §1 に據る）。夫故にヴェクトルの變換の Operation を代表しヴェクトルの Operator としての意義を有するものはこの雙一次形式の n^2 個の係數の Schema 即ちマトリックス

$$A=(a_{ik})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (i,\ k=1,\cdots\cdots n)$$

である。而してテンソルはかゝるマトリックスの要素 a_{ik} を成分に有するものであつて、且之に於て $a_{ik}=a_{ki}$ の如く、二つの指標を入れ替えたものに相當する成分が互ひに等しい時が對稱テンソルの場合である。

（二）　次に上述の如きテンソル量の定義を豫想した上で之を手引としてテンソルの論理的構造に眼を轉じなければならぬ。同格にしてその一つに優位を認め得ざる積極的に對立する正反對の二方向を主軸に有するものとして定義さるゝテンソルに於ては、この兩方向の統一を初めから一つの全體者を想定することによつてこの全體者が自ら互ひに正反對の方向へ分化、分裂したるものとして考ふるよりも、寧ろそれは互ひに一以て他に歸す可からざる獨立的なる二方向の對立的統一として考へらる可きである。何故ならば分化とか分裂は反面に於て分化、分裂せざる狀態

を豫想するからであつて、この狀態が單なる分裂の消失として解せらるゝならば、かゝる狀態への復歸に於てはテンソルは最早語られ得ないからである。テンソルは却つてこの兩動向の對立に於て成立し分化の存する限り存する。その統一は對立を外にして語られるのでなく對立そのもの分裂そのものに於て成立する。對立が消失し分裂が止めば兩動向と共にテンソルも考へることは出來ぬ。こゝにテンソルの二面性を解するに分極的な思想の適用の不適當な理由が存する。一般に單なる分極的思想によつては對立分裂の消失した單に靜的なる死せるものに凝固する運命に陷らねばならぬであらう。主軸の何處をとつてもかゝる相反する兩動向の對立方向の二重性が見られるのがテンソルの本質を成すのである。かくテンソルは兩動向の對立性一種の獨立性の上に成立するのであるが、然しかゝる獨立なる兩方向の外面的統一とは考へることが出來ぬ。一種の獨立性を有し乍ら不可分離的に互ひに內面的に滲透し合ひ張り詰め緊張の狀態にあり、消長生滅の運命を共にし、一は他無くしては存在し得ざるものとして、互ひに自己に對立する他者を自分の構成契機として自分の中に含む所に、テンソルの構造の特色が存する。いはゞ自由なる內面的必然態を表はすとも云ふ可きである。このことは對立の止揚に外ならぬ

が然し對立の消失ではなくしてテンツルが對立を自分自らの中に成立せしめ内在せしむる動的一般者なることを意味する。對立が消失し單なる靜的なるものに歸すればそこには最早自由なる内面的必然態は見られない。

元來方向の一面性を以て特色付けられるヴェクトルにあつてはそれが方向の規定を自分の外に有し、方向との間に偶然的、外面的な關係を殘す所の量と考へられるが故に、その根柢には上述のテンソルの如き方向の規定を自分の中に含み之を必然化する所の一つの閉ぢられたる自己完結的なるものが存しなくてはならぬ。方向の必然化とは勿論之を不動の一方向にのみ固定化することではなくして、方向並びに大きさの可變性を容れ之を自分の中に成立せしめることに外ならない。テンソルの定義に於て述べたるが如きテンソルがヴェクトルの Operator であることは論理的にも重要なる意味を有し、一つのヴェクトルから例へば方向を異にするが如き新しいヴェクトルに移る爲には Operator としてテンソルを必要とするといふことは、卽ちヴェクトルがそれ自身完結體で無くして一度自分の外に出ることを必要とすることを意味しテンソルの媒介者 Vermittler を缺き得ない謂に外ならない。テンソルがかくヴェクトルの Operator として定義されその變換の Operation を内在せし

め代表する形象である點から見てもそれが高次の方向量として單に靜的なる形象ではなくして、一面的なヴェクトルの媒介者、媒質 Medium としてその根柢に存する動的一般者を意味することは明かである。かくて一般に vectoriell なもの丶根柢にはそれを成立せしめる地盤として tensoriell なものが存すると言はなくてはならぬであらう。

かゝるヴェクトルとテンソルとの關係が又成分の上から前者に對應せしめらるゝ系列と後者に歸せしめられる「系列の系列」としてのマトリックスとの關係を示唆し、こゝに「テンソルの論理」と「マトリックスの論理」とが必然的に連關し相通ずる所がある。我々が高次の方向量の論理として特色付けた近代の自然の論理は又他方に於て一次元的な「系列の論理」ではなくして二次元的な、かゝる系列の系列としての「マトリックスの論理」であるとも言ふことが出來るであらう。然しマトリックスの論理的意義については後章に於て論せんとする。

然るに對立的統一が眞に自己の統一性を自覺する爲には、詳言すればテンソルが眞に自由なる內面的必然體たる爲には單なる二面性の立場に止り得ないのであつて、兩方向の Medium としてその根柢にあるものが自覺されなければならぬ。テンソ

ルは、フォークトが Tensortripel と名付けた如く、一般に一個の主軸から成るものでなくして互に交る多くの主軸から成りその主軸の何れもが雙々對立する兩方向から成ることによつてこの要求を容れると考へられる。即ち一軸はその二面的對立の Medium として他の軸を要求するのでこゝにかゝるテンソルの構造上の特質がヴェクトルの意味する一面性に對する二面性の問題から必然的に一種の多面性の問題に轉せしめると言へるであらう。而も一軸に對しその媒介者、媒質となる可き他の軸は、前者の根柢にあつて次元を異にし前者から導出され得ない點から言へば前者に對しては無 μὴ ὄν であり、いはゞ imaginär とも稱す可きである。即ち一方向と之に對立する方向との根柢に存する無としての媒介者は前兩者を實數軸に比すれば虛數軸に相當すると言ふことが出來るであらう。一般に imaginär とは後に明かにせんとする如く、所謂 „unmöglich" といふことではなくして、他から誘導され或は他に歸し得られないものであり乍ら而もそれに對し補足的 komplementär な媒介的 vermittelnd な意義を有するものに外ならぬ。ガウスは實數單位 +1, −1 に對し虛數單位 i をば „gerade", „invers" に對する „lateral" な單位として特色付けてゐるが (Gauss, Werke II. Bd. S. 175), 一般に正 „gerade" 逆 „inverse" 兩方向の轉換を媒介するものとして

横の方向 „laterale" „Richtung" が考へられなければならぬ。テンソルは一見二つの反對方向の無媒介的統一、或は單に兩者の相互的媒介に止る樣に見え乍ら、その根柢にかゝる imaginär な媒介者として laterale な方向を有するのである。かくしてテンソルは方向の對立的統一として自己の根柢を自覺し、横の軸から更に高次元に必然的に深まることによつて、相互に媒介し合ふ他の軸をも自分の中に成立せしめ、眞に自己の內面的必然性、完結性を確保する。かゝるものが單に客觀的に見た場合、互ひに交錯し滲透する所の方向の對立的統一たるテンソルに相當すると考へられ、之は本來上述の如き主體的構造を有するものとして解釋され得る。我々はかくの如くヴェクトルに對するテンソルの論理的構造を特色付け、先づ物理的量のテンソルによる表示を問題としやうと思ふ。

二　物理的形象のテンソル的構造

ニュートン物理學に於ては速度、加速度、力等の主なる物理的量がヴェクトルとして考へられたに反し、電磁氣力を表はすマックスウェルの歪力を始め、相對性理論に於てはエネルギー、ポテンシャル、引力の如き重要なる物理的量がテンソル量として

表はさるゝに至り更に新量子論に於てもその取扱ふ物理的量の性質に於て相對性理論と種々なる重要な相違を有するにも拘らず、エネルギー、其の他運動量、位置の如きものに至る迄諸種の物理的量を表はすに用ひらるゝ所のマトリックスが所謂「ヒルベルト空間」に於るテンソルとして解釋され得る。ファラデー、マックスヱルに始り、相對性理論に於て頂點に達した場物理學に就いては嘗て述べた處に讓り、此處では物理的形象のテンソル的構造として第一に量子論のテンソルを明かにしやう。

（一）量子論

量子力學を基礎付ける空間はハイゼンベルグ其の他の、マトリックス力學 Matrizenmeckank によると又シュレーディンガーの波動力學 Wellenmechanik によるとに拘り無く、上述のヒルベルト空間と名づけらるゝものであり（菊池、量子論、數學講座一三頁）、前者に於て物理的量を表はすに以てせられる所のマトリックスはこのヒルベルト空間に於ける對稱テンソルを表はし通常「ヒルベルト・テンソル」Hilbert Tensor と呼ばるゝものである（M. Born u. P. Jordan, Elementare Quantenmechanik 1930 § 10）。而してこの量子論的マトリックスは共軛複素數を成分に有する所謂エルミットのマトリックスと呼ばるゝ所のものであり、從つてこのマトリックスの屬するヒルベルト空間

は、ユークリッド空間の如く所謂實(リエール)空間ではないが無限多次元のユークリッド的空間と考へ得られるが故に、ユークリッド空間のテンソルに就いて語り得る主なる性質は相當の擴張を行へばこのヒルベルト・テンソルに就いても同樣に成立する。夫故にヒルベルト・テンソルは本質的には通常の實二次形式によつて表はさるゝ對稱テンソルと同樣に取扱はれ、その主軸が量子力學に於ては重要なる問題を形作るのである。(量子論のテンソルについては尙ハイゼンベルクの Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie S. 42 ff. 參照。 こゝでハイゼンベルクは特殊相對性理論の對稱テンソルと量子論のテンソルを比較した上、量子論の物理量につき一つの anschauliches Bild を與へんが爲に兩者をば共に剛體の慣性能率のテンソルを以て考へ、その主軸を圖示することにより量子論に於ける測定の問題を論じてゐる)。

周知の如く量子力學に於ては古典物理學に於けるが如く、或狀態に於ける物理的形象を測定する場合に、その測定値が時間の函數として表はされ一定の狀態の下では一定の數値を有するといふ樣なことは不可能であり、或る與へられたる狀態に於ては特定の確率法則に從つて、數ある「可能なる測定値」の中の一つに導くといふに止る結果、量子力學に於ける最も重要なる問題は、第一に觀測によつて取り得る「可能な

る値」を規定し、第二にこれらの可能なる値の一つが與へらたれる條件の下に於て出現する「確率」を規定することに存する。

夫故に量子論に於ては、物理的量が凡て上述の如きヒルベルト・テンソルによつて表はされるが、然しこれは實際に觀測によつて測定せられる値とは直ちに同一でなく單に可能なる測定値を示すに止るのである。そうして量子論では一つの物理的量を測定した場合にその量が觀測によつて取り得る「可能」なる値はその量を表はすマトリックスの「固有値」であると考へられてゐる。マトリックスの固有値とは換言すればテンソルの主軸の値卽ち主要素 Konstituenten （三三頁參照）である。斯の如く量子論に於て物理的量が、二面的方向により特色づけらるゝテンソルの主軸によつて表はされる點が注目に値する。

テンソルの主軸の方向と座標軸の方向とを一致せしむることを「主軸轉換」と云ひ、この主軸轉換によつて新しき座標軸に對して有するテンソルの成分は、第一對角線上に固有値のみを成分に有し他の成分は零なる所謂對角線的マトリックスによつて表はされることになる。量子論に於ては上述の如く固有値を求めること卽ち主軸轉換が一つの重要なる問題を成す。例へば一つの系の定常狀態のエネルギーとしては或る特殊の値のみが「非連續的」に可能であつて、この可能なる値はエネルギーを表はす對角線マトリックスの對角線上の成分卽ちその固有値によつて表はされるのである。固有値は言ふ迄もなく實數である。

次に既述の如く量子力學に於ては、實際の觀測の結果、是等の可能なる測定値とし

ての固有値の何れかゞ與へられると云ふに止り、その何れであるかは初めから一義的に豫料出來ないのであるから各固有値が夫々與へられる確率が問はれなければならない。然るにこゝに興味のあるのはボルン、ジョルダン等の統計的解釋によれば、物理的量許りでなくそれが觀測される確率そのものがテンソルを成す點である。

上述のことを數式を用ひて嚴密に表はせば一つの物理的量を表はすエルミットのマトリックスa_{nm}について$\sum a_{nm} x^*_n x_m$($a_{nm}=a^*_{mn}$, *印は共軛複素數を表はす)なるエルミットの二次形式を考へ之に主軸轉換を行ひ$\sum a_{nn} x'^*_n x'_n$ $(=a_{11} x'^*_1 x'_1 + a_{22} x'^*_2 x'_2 + \cdots\cdots + a_{nn} x'^*_n x'_n)$の形に齎せばこの物理的量が觀測によつて取り得る可能的な値は固有値たる$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots\cdots a_{nn}$であり而もそれらは夫々その係數$x'^*_1 x'_1, x'^*_2 x'_2, \cdots\cdots x'^*_n x'_n$(これらは勿論實數である)に相當する確率を以て實際に與へられるといふのである。而して$x'^*_1 x'_1 + x'^*_2 x'_2 + \cdots\cdots + x'^*_n x'_n = 1$である。こゝに$a_{11}, a_{22}, \cdots\cdots a_{nn}$が對角線マトリックスを成すことは言ふ迄もないが、それらが夫々與へられる確率たる$x'^*_1 x'_1, x'^*_2 x'_2, \cdots\cdots x'^*_n x'_n$も亦對角線マトリックスを成すのである。

こゝにボルン、ジョルダン等によつて提出された確率テンソル Wahrscheinlichkeitten-sor Φ の如きものも新しく批判の對象に値するであらう (Born u. Jordan, op. cit. §§ 55—58)。

然るに同時に附言す可きはかく量子力學に於て統計論的解釋により確率値がテンソルとして考へられる許りでなく、かゝる量子力學を離れても一般にテンソル計算 Tensorkalkül が確率論に適用さるゝ點である。シェッパード W. F. Sheppard はその

著"From determinant to tensor" 1923 に於てエディングトンに從つて、相對性理論の數學的方法として用ひらるゝテンソル計算が、相對性理論以外各種の問題に適用されて滿足なる結果を收めつゝあることを指摘し、就中統計論への適用に適當せることを述べ (preface)、その適用に亘つてゐるが (p. 92—114)、このことは確率の本性を明かにする上から言ふも甚だ興味あることであり、確率の論理的構造から見て寧ろ當然であるとも考へられやう。即ち確率概念の選言的構造(本誌二百十四號四五——五四頁參照)の根抵に豫想さるゝ所の選言肢の形作る全體者たる Feld, Bereich を表はすのにマトリックス計算やテンソン計算が適してゐると考へられる。

（二）相對性量子論

上に量子論的量に就て述べた所はマトリクッス力學許りでなく、ディラックの transformation theory によるも同樣である。ディラックの方法の特色はマトリックス力學及び波動力學の如き在來の量子力學に於ける如く、座標によつて物理量に對應せしめられた sets of numbers をば初めから取扱ふのでなく、抽象的な記號 symbols によつて表はされた、變換に對する不變量 invariants of transformations としての基本量を直接取扱はんとするにある (P. A. M. Dirac, The principle of quantum mechanics. preface,

I. ed. 1930)。ディラックに於るこの方法上の特色は物理學と數學との關係を考察する上からも暗示に富むものであつて、彼は之を以て現實存在そのものに一層深く徹し得る理論物理學に於ける重要なる方法と考へ之により數學的なるものと物理的なるものとの兩契機を混淆せしめずしてその區別を明確ならしめ、前者に對し後者を前景に持來さんとするのである。ディラックは此の如き不變量の中、或一つの狀態に於ける物理的形象を測定する場合にその測定の對象たるものを "observable" と名付けてゐるが、然し彼に據るもかゝる observable が一つのエルミットのマトリックスによつて表示され、一つの observable の可能なる測定値はその observable を表示するマトリックスの固有値であると云ふのであるから (Dirac, The principles of quantum mechanics 2. ed. 1935 p. 25—32)、前述のマトリックス力學に於けると同樣、物理的形象はテンソルによつて表はされると言ふことが出來る。ディラックの abservable は彼の所謂 "state" をヴェクトルとすればその "operator" に該當する (l. c. p. 25)。殊に注目す可きは彼にあつては「時間」も亦他の運動量、座標、エネルギー等と同樣に tensoriell に考へられてゐる點であつて、時間は一つの obrervable であり、彼の所謂 c 數 c-number と q 數 q-number との區別に從へば、時間は他の量子論的量と同樣に、乘法の交換法則

に從はざる點で前者と區別さるゝ所の一種の多元數 hypercomplex number としての後者によつて表はされると云ふのである(Vgl. A. Haas, Materiewellen u. Quantenmechanik, 3. Aufl. 1930 S. 96)。

然し乍らディラックの量子論の發展史上に於ける劃期的意義は量子論と相對性理論との一つの融合を企圖せる點に存し、その點から言つて彼の相對性量子理論こそ我々にとつて無視し得られぬ問題を成すと言ふ可きである。我々はディラックの電子の運動を規定する相對性論的波動方程式を中心として考察を進めやう。元來波動力學は、初め光が粒子と波動との二重性質を有することに基き、ドゥ・ブローイ de Broglie が同樣に物質の二重性質を推定し電子には h/p (p は電子の運動量 h はプランクの常數)なる波長を有する波が附隨するとして物質の波動性を主張したるに始る。かゝる電子の波動性は其の後電子の結晶による廻折現象から實驗的にも確證され、シュレーディンガーにより波動力學の發展を見たのであるが、從來の波動力學の式は電子の速度が小なる場合にのみ適用され得るのであつて、速度が大となれば相對性理論に從つて粒子の質量がその速度に相對的なることが顧慮されねばならぬ。この要求を滿すのがディラックの波動方程式であり、こゝに相對論的量

子論と稱せらるる所以が存する。

ディラックの波動方程式は、先づ之を物理的量といふ見地から檢するならば、電子の運動を完全に記述する爲には座標(位置)、運動量の外に之とは獨立なる新しい力學的な變數 dynamical variable が必要なることを示す (op. cit. 2. ed. p. 224)。この變數は電子の或る內部的な角運動量、'internal' angular momentum 及び磁氣能率を表はすとされ、之は電子がスピン卽ち旋廻運動 spinning を爲すに基くと考へられる (op. cit. 1. ed. § 43)。詳言すれば電子は單に移動運動 translation を爲す單純なる電荷の點 point charges とは考へられず、同時に一種の自轉にも比す可き或る內部運動 internal motion (2 ed. p. 253) をなすと考へられ、從つてその場合の角運動量は、軌道を畫いて廻轉する場合の角運動量 orbital angular momentum とも同一ではないのである。電子が此の如きスピン運動をなす說は初め(一九二五)ウーレンベック (G. E. Uhlenbeck 及びグーヅミット S. Goudsmit によつて單に假說的に提出されたのであつたが、ディラックの波動方程式は之を假說することなくして、却つてその必然的歸結として電子のスピンに相當する項を導出し得る特色を有する。而してこゝに注意す可きは電子のスピンを記述する上述の新しい變數がディラックにとつては observables であることであつ

て（2. ed. p. 68）彼は之をエルミットのマトリックスによつて表示し、變數相互の關係を規定し、且それらが滿足する諸代數方程式が座標軸の廻轉に對して不變なることを證明してゐる（2. ed. p. 254—5）。

然るにディラックの相對性量子論は尙特殊相對性の範圍に止るが故に、多くの物理學者によつてディラックの波動方程式を一般相對性へ擴張・一般化せんとする試みがなさるゝに至つた。こゝに物理的形象のテンソル的構造を問題とする我々にとつて重要なるは、かゝる相對論的量子論に於て物理的量を表はすに通常のテンソルの外に新しく「スピノール」Spinor の理論を以てする點であつて、スピノールの名稱は前述の電子のスピンと關連するに基くもの「スピノールの理論」の發展の意義こそ無視し得られぬ問題をなすと言はねばならぬ。ディラックの方程式もスピノールにより極めて簡單な形に書き表はされる。今スピノールの一般的定義をヴァン・デル・ヴェルデン Van der Waerden によつて發展せしめられた originär なスピノール論 Spinorrechnung に從つて簡單に述べやう。

二つの複素數 ξ_1, ξ_2 を成分に有し係數の行列式 Determinant が特に1なる一次變換[註一]に從ふヴェクトルが「第一階級のスピノール」としてのスピン・ヴェクトル Spinvektor であ

つて、之を a_λ にて表はせば同樣にしてその成分の共軛複素數たる $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ を成分に有するスピンヴェクトル $a_{\dot{\lambda}}$ が同時に成立する。次に積 $\xi_1\bar{\xi}_1, \xi_1\bar{\xi}_2, \xi_2\bar{\xi}_1, \xi_2\bar{\xi}_2$ の如く變換する四つの數を成分に有するもの $a_{\lambda\mu}$ が「第二階級のスピノール」に相當するスピン・テンソル Spintensor であつて、同樣にして $\xi_1\bar{\xi}_1, \xi_1\bar{\xi}_2, \xi_2\bar{\xi}_1, \xi_2\bar{\xi}_2$ の如く變換する四數を成分に有する $a_{\lambda\mu}$ 及び兩者の混合たるスピノール $a_{\dot{\lambda}\mu}$ が第二階級のスピノールとして同時に成立し得る。以下同原理に基き更に高階級のスピノールを作り得るが、スピノールの最も簡單なるは「第零階級のスピノール」とも言ふ可きスカラー a であり此の如くスピノールにもスカラー、ヴェクトル、テンソル等階級が區別され得るのである。[註二] 從つてヴァン・デル・ヴェルデンは、テンソルの語が一般に不變量の意味に於て使用さるゝ場合スカラー、ヴェクトルをも包含する如く、スピノールをも又かゝる不變量の意味に於て一般にスピン・テンソル(廣義)とも呼んでゐる(Spinoranalyse, Göttinger Nachrichten 1929 S. 100 冊)。かかる種々なるスピノールの中に於て通常の、相對性理論の世界ヴェクトル及び世界テンソルに對應するものが含まれ、兩者の相互の關係が規定され得るのである。(スピノールに關する敍述は、上述の Van der Waerden, ibid. の外に、O. Laporte and G. E. Uhlenbeck, Application of Spinoranalysis to the Maxwell and Dirac equations. Physical

Review Bd. 37, 1931 及び V. L. Infeld, Die verallgemeinerte Spinorrechnung u. die Diracschen Gleichungen, Phys. Zeitschr. 33 S. 475 ff 1932 等に據る)。

一般に可能なるスピノールの理論は上述の如きものであり、且この理論はディラックの波動方程式の一般相對性への擴張に當つて更に一般化されるに至つたのであるが、我々の關心はかゝる可能なるスピノール一般の理論よりも寧ろ主要なる物理的量が如何なる特殊なスピノールによつて表はさるゝかにあるのである。然し乍らスピノールの理論はディラックの波動方程式の一般化にあたつて唯一の方法、途を意味するのではなくして、スピノールを以てせずして通常のテンソルを以てせんとするもの[註三](例へば B. Podolski, A tensor form of Dirac equation, Physical Review, Bd. 37, 1931 p. 1398 ff.)、或はアインシュタインの如くスピノールの代りにゼミ・ヴェクトル Semi-Vektor なる新しき量を導入せんとする企て (Einstein u. Meyer, Semi-Vektoren u. Spinoren. Sitzungsber. d. preuss. Akad. d. Wiss. 37. 1932) 等が存し、物理學者の間に於ても尚この點に關し結着を見ないものゝ如くである。 我々は相對性理論に於て基本テンソルの如き第二階級の對稱テンソルが重要なる位置を占めたのに對し、一般相對性理論と量子論との要求を同時に滿さんとするかゝる相對性論的量子論の發展に

よつて主要なる物理的量が如何なるテンソルによつて表はさるゝかにつき解明の與へられることを期待するものである。例へば電子の力積エネルギー・テンソル Impuls-Energietensor の如きは一般的に言つて對稱的ではないと云ふ (H. Tetrode, Zeits. f. Phys. 49. S. 858 1929)。

第二にディラックの相對性量子論に於て注目す可きはその波動方程式に基いて陰電荷を有する通常の電子に對し陽電荷を有する電子卽ち陽電子の存在が豫料される點である。(Dirac, op. cit. 2. ed. p. 270—271)。ディラックの波動方程式が示すが如き電子の運動のエネルギーが理論上「負」の値を取り得ることは、從來の相對性理論に於ても起り得るのであつて、これに於て無視され得たのはその連續觀に基く。詳言すれば電子の運動のエネルギーには、$+mc^2$ (mは粒子の靜止質量、cは光速度)より大なる正の値と $-mc^2$ より小なる負の値のみが可能であつて、中間に存する $+mc^2$ よりも小にして $-mc^2$ よりも大なる部分は運動のエネルギーの値としては考へ得られないが故に、初め粒子が運動のエネルギーの正の値の狀態にあれば負の狀態に移る爲には、中間の少くとも $2mc^2$ のエネルギーに相當する飛躍、斷續が存しなければならないのであるが、かゝることはエネルギー其の他の力學的量が總べて連續的に

變化することを前提とする從來の相對性理論にあつては不可能なるによるのである。實際に於て運動のエネルギーが負なるが如き運動狀態にある電子の如きは觀測され得ないものである。然るに作用の不連續性の上に立つ量子論に於てはかくの如き非連續的な狀態の推移 transition が可能であるからこの負のエネルギーの狀態を無視することは出來ぬ。而して他方電子の負のエネルギーが、電子と同じ質量を有し、等量にして符號反對の電荷を有する電子の正のエネルギーと關係することが、電磁的場に於ける電子の波動方程式を基礎にして導出される (2. ed. p. 270)。こゝに於てディラックは負のエネルギーを解釋するに、殆ど總べての負のエネルギーの狀態が「パウリーの原理」に從つて夫々唯一個の電子によつて占められてゐると假定し、電子により占められてゐない負のエネルギーの狀態、換言すれば負のエネルギーを有する電子の配分 distribution に於ける「孔」"hole"が、上述の如き通常の電子とは他の點では異ることなくして符號のみ正反對なる電荷を有する新しい種類の粒子即ち陽電子であるとなしたのは周知の如くである。註四

從つてこの理論に從へば、電子が何か或る外からの作用により負のエネルギーの狀態より正のエネルギーの狀態に推移せしめらるれば、こゝに觀測し得る電子とか

かる孔とが生じ、かくて電子と陽電子とが同時に觀測され得べきであり、逆に正のエネルギーの狀態より負のエネルギーの狀態に移る場合には、孔は滿され從つて電子と陽電子とは同時に消失す可きである。このことは實際に於て「光と物質との交互關係」を示す現象に就ての實驗の結果とも一致するのであつて、アンダーソン M. Anderson による宇宙線の實驗(一九三二年)や或はγ線の實驗の示す如く、光子 photon が物質にあたつてそのエネルギーが物質に與へられることにより、光子が消失して陽電子と陰電子とが「對」を成して發生する――「物質化」 materialisation の現象――事實は前の場合に相當し、ティボー M. Thibaut、ジョリオ M. Joliot 等による最近の實驗に於けるが如く陰電子と陽電子とが消失してそのエネルギーがγ線の形で放出される――「物質消失」の現象――のは後の場合であると考へられる。これらの現象に於てかく陰電子と陽電子とは「對」を成し互ひに「補足的」 komplementär な關係にあることが示されるのである。

こゝに興味あるのは「物質」に屬する電子のみならず「光」の粒子たる「光子」「光量子」も亦かゝる一對の粒子から成るといふドゥ・ブローイーの「半光子」 demi-photon の說である。元來光の速度は大であつて且光子は電子と異り「偏り」 polarisation の現象を有するが

爲、從來の波動力學の電子に對する方程式は直ちに之に適用し得なかつたのであるが、前述の如くディラックの相對性論的波動方程式は速度の大なる場合にも適用され殊にそれが明かにし得た電子のスピン現象は光子の偏りの現象に親きものとして光子と電子との差異を少くするものと考へられる所から、ドゥ・ブローイーはこのディラックの電子に對する波動方程式をば光子にも適用せんとするのである（L. de Brogli, Une nouvelle conception de la lumière, 1934 p. 5)。然るに光子と電子との間には尙其の從ふ統計法 statistique 其の他に於て根本的差異が存するが故に直ちに光子にディラックの方程式を適用して、電子に對し陽電子なる anti-corpuscule を對應せしむる如く、anti-photon と言ふが如きものを考へることは出來ぬ。こゝに於てドゥ・ブローイーは光子そのものが二つの粒子から成るとしてこの困難を除き之は電子と陽電子との如く、corpuscule と anti-corpuscule との關係にあつて互ひに補足的 complementaire なる一對 une paire (couple) を成す粒子であると考へ、之を「半光子」demi-photon と名付くるに至つたのである (op. cit. p. 6, 31—33 及び Id., Voies anciennes et perspectives nouvelle en théorie de la lumière, Rev. de métaphys. et de morale 41. année 1934 p. 450—457)。彼はディラックの根本思想に基き、この半光子を以て光電效果の如き現象を說明せ

んとしてゐるが、それに據れば、電子の消滅に於ける如く、光電效果に於て光子が消滅するのは、半光子が正の運動のエネルギーの狀態から負のエネルギーの狀態に移ることを意味し、之によつてその負のエネルギーの配分に於ける孔 trou、裂目 lacune に相當する所の他の補足的な半光子と結合すること換言すれば孔を滿すことに外ならぬ (Une nouvelle conception de la lumière p. 13, 31—3)。半光子は電子に比し質量及び電荷が著しく小であつて殆ど無視し得らるゝ程であるが、光子を形成するかゝる一對の半光子は等量にして互に符號反對なる電荷を有し從つて全體としては中性であると考へることも不可能ではないと云ふ。(p. 48)。

ディラックの「孔」の考へによる陽電子論やドゥ・ブローイーの半光子說は固より假說であつて殊に半光子の存在は尙實驗的にも檢證されないものである。ディラックの相對性論的波動方程式と關連して「スピノールの理論」に次いでこゝに比較的詳細に立入つたこの第二の點は高次の方向量を問題とする我々にとつて直接の問題とならない樣に見える。然しドゥ・ブローイーがその明快なる敍述『光の理論の既往と新しき展望』に於て指示する如く (Voies anciennes et perspectives etc. p. 445, 453) 電子とその antiélectron である陽電子とに限らず、廣く一般的にあらゆる要素的な corpuscule に對し anti-corpuscule が存在し而も兩者が對を成し補足的な關係にあると考へられることは、物質や光が他方に於て粒子性と波動性との二重的性質を有することゝ共に、この小論の主題たる第二階級のテンソルの高次の方向量としての特質、論理的意義と關連して重要なる意味を有すると言はねばならぬ。ディラックも一般に、電荷を有するあらゆる種類の要素的粒子に反對の電荷を有する粒子が對應し質子 proton に對しても負の質子が存在し得べきことを述べてゐるが、[註五]更に進んで粒子性と波動性との間に存する對應關係に基き、前者にかゝる正負の二種の粒子の區別が存することと對應して後者卽ち波動性の側にも互ひに相反し對立し乍ら、補足的な關係を成す何等かの二性質の存在が明かにされるならば興味多いことであらう。

尙ディラックの方程式の適用し得るすべての粒子に對應せしめられる anticorpuscule が前者の負のエネルギーの配分に於る孔として定義されることも哲學の問題として重要であると言はねばならぬ。元來上述の如き corpuscule と anticorpuscule との關係は對稱的交互的であつて、前者は又後者の負のエネルギーの配分に於ける「孔」と考へて差支へないのである。例へば陽電子が上來述べし如き孔として說明される許りでなく、ディラックに據れば通常の電子そのものが又負のエネルギーの狀態

の陽電子の配分に於ける一つの孔であるとも考へ得る（2. ed, p. 272）。かくして一般に粒子がかゝる「孔」としての意義を有することになる。個體、一般に存在のかゝる孔として有する意義こそ深き形而上學的解釋を容れ得るものであらうが、この問題は今我々のこゝに立入る可き當面の問題ではない。

註一、即ちこの一次變換を

$$\xi'_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2$$
$$\xi'_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2$$

にて表はせばその係數の交代式について

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$$ なることを必要とする。

註二、第一階級のスピノール即ちスピン・ヴェクトルの例はデイラックの波動方程式に於ける波動函數 $\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4$ である。然しデイラックの波動函數は之を必ずしもかくスピン・ヴェクトルと考へる途許りでなく、それがハルブヴェクトル Halbvektor と呼ばれる場合や、或は又波動函數 ψ を constant と考へることも出來、何れの方法によるも equivalent であるとせられる（Laporte and Uhlenbeck, ibid. 參照）。

註三、スピノールを以てせんとする者の論據は通常のテンソル（廣義）によつてはローレンツ群のすべての可能な表示が得られないこと、從つて强ひて通常のテンソルを以てすれば非常に複雜となり不自然になるといふにある（Laporte and Uhlenbeck, ibid.; Infeld, loc. cit.）。又ヴェブレンがスピノールの成分とその共軛複素數との或る特定の結合が通常のテンソルの成分となりそれが電子の或る一定の場所に於いて或る一定の方向に運動する確率を表はすものとして解釋されると述べてゐるのは注目に値する（O. Veblen, Science Vol. 80, No. 2080）。

註四、ディラックはかゝる陽電荷を有する電子を Pr. of Q. M. の第一版に於いてはプロトンと同一視し、そこに電子とプロトンとの質量に於いて著しい差異の存することによる困難が伴ふことを認めた (p.256—7)。

註五、Dirac, Theorie der Elektronen u. Positronen, in „Die moderne Atomtheorie. 1934“ S. 45. 下村氏譯、本誌八月號九九頁參照。現今外にも種々なる粒子が考へられてゐるが、中性子 Neutron は電子とプロトン（電子と等量にして反對の電荷を有する）との特殊な結合であるとも考へられ、又フェルミー、E. Fermi によつて提出され尚假説に止る所の neutrino をドゥ・ブローイーは彼の demi-photon と同じもので從つて photon は neutrino と anti-neutrino とから成るのではないかと考へてゐる (Une nouv. concep. de la lumière p. 46—7)。

（三）古典物理學

物理的形象のテンソル的性質は相對性理論以後の最近物理學を俟つて初めて明かにされたのでは無く古典的物理學に於ても已に彈性體の壓力、張力を始め慣性能率、其の他電磁氣、熱、結晶體等の諸性質がテンソル的狀態をなすものと考へられた。元來ヴェクトル量の原型とも云ふ可きは初めに述べたるが如くステヴィン S. Stevin の「力の平行四邊形」が示す樣に「力」であつて、力が加速度との關係に於て vektoriell に精密な規定を獲得するに至つたのは言ふ迄もなくニュートンの運動の第二定律である。

然るにニュートンはこの「力の概念」の定義の仕方に、ヘルツが矛盾を指摘した樣に (H.

Hertz, Die Prinzipien der Mechanik, in neuem Zusammenhange dargestellt, 1894. Einleitung.)方向量といふ點から見ても何等の二義性を殘さなかつたのではない。否ニュートン物理學そのものから言ふも、假令テンソルなる語が使用せられてゐないにせよ、本來「力」は tensoriell な二面的方向量と考へられてゐると言はねばならぬ。

ニュートンの運動の前二定律に表はさるゝ近世の意味の力の概念、卽ち一方に於て物體の慣性を豫想する所の加速度による力の定義を物理學に導入したのは元來動力學 Dynamik の基礎を確立したガリレイであつた。中世を通じて殆んど支配的位置を占めたアリストテレスの物理學に於ては一樣なる直線運動、圓運動のみが主として問題にされ、曲線運動、不等速運動の如き方向及び速さの一定ならざる運動卽ち加速度運動は明確な學的取扱ひを受けず、而もアリストテレスはかゝる等速運動に對しても之を保持する爲に力が働くことが必要であると考へたのに反し、落下、拋射、衝突等の運動現象からガリレイは加速度運動を問題にし、力は加速度運動の場合にのみ限られ「加速度」によつて「力」が定義さるゝに至つた。「加速度」なる概念が初めて學的に明確に把握さるゝに至つたのはガリレイによつてゞあり、彼は落體の運動が等速運動でないことからして落下の速度が落下の距離に比例するか落下の時間に

比例するかに長らく惱んだのである。從つてガリレイによれば等速度運動には力は必要でなく物體は障害によつて妨げらるゝか或は新しい Impuls に促進されざる限り直線運動をなすといふのであつて、これはニュートンの運動の第一定律の內容を成す慣性の法則に外ならない。慣性の法則もガリレイによつて斜面の運動からその極限の場合として獲られ初めは水平運動にのみ適用を見出したのであるが、一般的な形でニュートン以前已にデカルトの物理學に於てその運動の三法則の中にかゝげらるゝに至つたのである。(R. Descart, Principia philosphiae § 36—)

斯くの如くニュートンは、その運動の初めの二定律に述べられたる中心思想をばガリレイに負ひ[註一]、それが元來ガリレイの動力學の礎柱 (Grundpfeiler) とも言ふべきものであり、その意味では力の加速度による vectoriell な定義は本來ガリレイに基くといふことが出來るに反して、動力學の原理に關する限りニュートンの獨自の業績とも言ふべきはたとひケプレルの如き先驅者を有するにせよ――運動の第三定律に掲げられたる「反作用の原理」である。こゝにガリレイの動力學 Dynamik の完成者としてのニュートンの劃期的な意義が存する。マッハはその「力學史」(E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung, 7, Aufl. 1912 S. 193) に於て力學の原理に關するニュート

ンの仕事の中で最も重要なるはこの反作用の定律であり、動力學の原理はガリレイの原理だけでは不充分であるとなし質量をもこの定律から定義せんと試みてゐるが、方向量を當面の問題とする我々にとつて重要なることは作用と共に反作用、加速度と共に「反加速度」Gegenbeschleunigung を同時に考慮す可きことを主張するこの定律からは力が當然兩面性、二面性を有する方向量となる點である。

このことはニュートンの萬有引力の法則に於ける力の定義に就ても同樣であつて萬有引力にはたとへ斥力に相當するものが考へられないにせよ、「引力」としての力は單にガリレイ的な力の定義に歸することが出來ない。寧ろ運動の第三定律の適用と考へらる可きであらう。ガリレイに於ては物體の「質量」と重力による「重量」とが區別されずして地上の物體の地球に對する加速度、重さのみより問題とならざりしに反し、ニュートンの引力說に從へば已述の如く引力としての重力は兩面的な方向を有ち、地球も亦同時に地上の物體に對して加速度、重さを有することゝなる。ガリレイの後繼者にして優れた天分を抱いて不幸夭折せるトリチェリは物體の「重さ」の代りに之と方向反對な物體の「輕さ」を以てしても重力の現象を遺憾なく說明し得らるゝことを示したのは興味深いが (A. Heller, Geschichte der Physik II. Bd. S. 104 f.) 彼に

於ても物體の「重さ」と「輕さ」とは別々に取扱はれたのである。こゝに萬有引力の法則の力學史上殊に天文學史上有する劃期的な意義が顧慮される必要がある。元來ニュートンの萬有引力の法則は之によつて初めて天體の運動に動力學が適用され天體の運動を規定するケプレルの三法則をその結果として導き得た所のものである。ギリシャの力學Mechanikは、それが主として一樣なる直線運動とか圓運動の如き等速運動を取扱つた結果、物理學史家により運動現象に關しては「運動の幾何學」としての「運動學」Kinematikを以て特色付けられるのであるが、而も地上の運動は複雜なるが故に運動學は多く天體の運動に適用を見出し、天文學はギリシャ、中世を通じて且ガリレイが動力學を建設した後も尙かゝる運動學の範圍に止つたのである。ギリシャ以來、天動說に立脚し、圓運動として周轉圓Epicycleによる煩冗な天體の運動の說明に、如何に多くの努力が拂はれたるかを人々は想起するであらう。ケプレルが遊星の運動の從ふ三法則を發見し、遊星の軌道を初めて圓錐曲線により橢圓として表はし、天體の運動をかゝる曲線運動により、方向並びに大さの上から可變的な運動として考へることにより、從來の等速運動說は當然抛棄され、こゝに加速度を說明する爲に「力」の概念が適用さるゝ素地が作られたのである。然るにニュートンにより太

陽のまはりに遊星を廻轉せしむるに必要な力[註二]としてこゝに「力」の概念が適用さるゝに當つて、單に一方の物體にのみ作用する力ではなくして引力の如き二面的な新らしい力の定義を必要としたことは、萬有引力の法則の、その名が示す如き廣汎な普遍的な妥當範圍(天體の運動のみならず分子引力の如く物質を構成する微粒子をも支配する)を有することから言つて、一方ガリレイの動力學の原理がニュートンの反作用の原理によつて完成せられたことゝ照應して極めて重要なる意義を有するであらう。

上述の如きニュートン物理學に於ける力の定義と關連してこゝにヘルツの力學に就き一言し度いと思ふ(H. Hertz, Prinzipien der Mechanik, 2. Aufl. Werke III. Bd.)。ヘルツはその力學の序文に於てニュートンの「力」の概念につき鋭利なる批評を試み彼自身の力學の Rechtfertigung に及んでゐるが、多くの專門物理學者によつて見逃された る問題を指示し、示唆に富むものとして傾聽に値すると思ふ。一般に、物理學者の中には第二定律を以てニュートンの運動の全定律を代表せしめんとする人々の多いのに反して、ヘルツやマッハの如き人々が第三定律を甚だ重んずるのは彼等が實證論的傾向を代表しその立場で語られるものの丈に一層興味あり注意すべき點である

と思はれる。殊にヘルツがその力學に於て獨立な基本量として空間、時間、質量のみを許し「力」を認めなかつたのは、マッハの如く因果關係に對する實證論的な見解から力概念を排せんとするのではなく、ニュートンの力概念の規定が上述の如く運動の定律に於て初めの二定律に從ふ場合と第三定律に從ふ場合とで異る所に矛盾、混亂が存すると考へ、この錯綜を避けんが爲であつたことは注意すべきである。彼はこゝに於て力概念の代りに「結合」Verbindung の概念を以てし、物體の運動を慣性の法則とガウスの「最小拘束の原理」を以て説明せんとしたのである。然しヘルツは力概念を全く消去せんとしたのではなく補助概念として認め之を二つの「結合」されたる gekoppelt 物體の一つが他により受くる影響であると定義する。「結合」による影響は相互的 gegenseitig なるが故に、必然に一つと力と共に反力 (gegenkraft が存することになる。ヘルツの結合の思想の新しい特色はニュートンの運動の第三定律を基礎とし、一種の近接作用的見地に立つことによつて場理論的に、力を二物體間の運動の Medium, Mittelglieder (S. 33) と考へ、「結合」の概念を以て同時に力と反力との兩者を、換言すれば互ひに影響を與へ合ふものゝ全體を考へんとする所にある。この結合の思想に立脚すれば、作用と反作用とが互ひに相伴ふとは、作用の zeitliche Folge として反作

用が存するといふよりも、寧ろ作用は初めから反作用を豫想し、後者を俟つて初めて存立し得るのである。ヘーゲルが精神現象論に於て明かにした「力」の概念に於ける„Äußerung"と„Sollizitation"との關係が示す如く(Bollands Ausgabe S. 103 ff.)、作用の意味する能動性 Aktivität はその反作用に對する受動性 Passivität 換言すれば反作用そのものの能動性の上に成立するのであつて、一の他に對する能動性、自發性 Spontaneität は、單に前者に對する後者の受動性、受容性 Rezeptivität を意味しその能動性、自發性を廢するのではなく、却つてこれを豫想し措定するのである。こゝに受動的なるものゝ反面にもつ能動性、受容的なるものゝ同時に自發的な面が存する。單なる受動的なるものも、單なる能動的なるものも亦存在しない。その點から作用も亦反作用としての意義を有しそれ自身一つの反作用と考へることが出來る。「Kraft と Gegenkraft とは同格 gleichberechtigt であり、何れを Kraft と解し Gegenkraft と解するも隨意である」(Hetz, op. cit. S. 208)。ヘルツにあつては物體が一樣な直線運動をなさずして不等速度運動卽ち加速度運動をなすのは、運動の方向及び速さを異にする他の物體との結合に基くといふのであるから、此の如き物體が見えない場合には隱れたる運動をしつゝある隱れたる物體を假定するに至る。勿論影響とか「隱れたる」とかの如き

は、觀測し得べきものゝみを尊重する彼の實證論的見解と相容れないものでありinkonsequent であるが、隱れたる物質の隱れたる運動を假想して迄双關的、二面的な「結合の思想」を徹底し、「結合の範疇」に全力學の基礎を認めたことは、物理學の範疇論史から言つて重要なる意味を有する許りでなく、力の本質に就ても敎ふる所多いと言はねばならぬ。　然し結合の思想は、ガリレイ的な力の定義に缺けたる方向の二面性、兩面性を指示する點で具體性を有するにも拘らず、もと實證論的な思想の地盤に成立せるもの、力的關係 dynamisches Verhältnis 全體を表はし得るには不適當と言ふ可きであつて、之を以て力の概念におきかへんとすることは、別種の抽象性に墮するを免れないであらう。　ニュートンの力の定義に於ける二義性に矛盾を認めたのは烱眼であるが力の概念を廢し或は他の語で置き換へんとするよりも、ニュートンの運動の定律中、ガリレイに由來するものとニュートンに originär なものとを分け、萬有引力の法則と連關して第三法則の有する劃期的な重要な意味を反省することにより、後者に從ふ力の定義を以てガリレイ的な力の定義の抽象性に代り之をも容れ得るものとして、ニュートン物理學の本來の力の定義と見做すことが正當でないであらうか。事實ヘルツの結合の思想はかゝる途を暗示するものと言ふことが出來る。

ニユートン物理學に於ける力が本來上述の如きものであるにせよ當時は第三定律に對應して二面的方向量を取扱ふ fruchtbar な數學的方法を缺いたとも考へ得る。之に對し相對性理論以後の物理學の發展はテンソル論 Tensorkalkül, マトリックス論 Matrizenkalkül の如きテンソル量を取扱ふ數學的方法の發展によつて特色付けることが出來るであらう。近世の動力學がギリシャ以來の一樣な直線運動、圓運動の如き等速運動の範圍に止る運動學から脫して加速度運動を取扱ふに至り、かゝる方向並びに量の上から可變的な運動が自己の眞の數學的表現手段と見出したのは微積分學 Infinitesimal-Rechnung の發見に俟ち、後者は多く速度、加速度の如き一面的なヴェクトル量を取扱ふ數學的方法として物理學に於て使用されたのである。ガリレイーニユートン以前の物理學たる運動學、及びガリレイーニユートンの動力學を特色付ける數學が略ぼ夫々 "mathesis extensorum" としての幾何學、"mathesis intensorum"[註五] としての微積分學であつたと言ひ得るならば、相對性理論及び量子論を特色づける數學たるテンソル論やマトリックス論は之を mathesis tensorum と呼ぶことが出來るであらう。かゝる物理學の發展を特色付ける數學を以て單なる物理學の方法、手段と解することは出來ないにしても、自然そのものの物理的存在そのものが數學の發展を

通じ具體的な數學的方法を媒介にして漸次自分の具體的な姿、構造を自覺するに至つたものと見ることが出來、一般に物理的存在のテンソル的構造が推論され得るのである。vectoriell な方向量を取扱ふ數學的方法として fruchtbar な意義を發揮した微積分學に就ても、ニュートンと同じくその發見者であり且偉大なる Dynamiker であつたライプニッツにとつて本來微分 infinitesimal は所謂 « point mathematique » として « point métaqhysipue » 卽ち單子(モナド)に對應するものである (Leibniz, Spstème nouveau. aus-gew. philosoph. Schriften, herausgeg. v. Schmalenbach Bd. I S. 126)。從つて彼の微積分學はその根柢に彼の形而上學たる單子論を豫想するものなることを想起するならば、全宇宙を映し一切の關係を内に含む、窓無き一種の自己完結體としての單子(モナド)に對應して、微分は本來單に一面的な方向のみを容れる可きでないことも明かであらう。[註四](未完)

註一、ガリレイに於いて力の概念に相當する Moment (impetus) の概念は必ずしも一義的でなく、forza, virtù, talento, efficacia, energia として使用され (Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik 1887, S. 23 ff; Dilthey, W.W. Bd. II S. 268)、運動量、力積、動力等を表はした。尙彼にあつては顯勢的 (efficacia, energia) と共に、尙潜勢的に (virtù, talento) 考へられてゐる點も注意さる可きである。

註二、ニュートンは初め月をして地球の周圍を廻轉せしむるために之に働く求心力が地球上の重力と同一なることに氣付き更に遊星と太陽との間にも之を推し萬有引力の法則を樹てたことは周知の如くである。

註三、mathesis extensorum に對し mathesis intensorum として微積分を解することについては H. Cohen, Das Prinzp der Infinitesimal Methode u. seine Geschichte, Schriften II. Bd. 1928 S. 55, 95 參照。幾何學を mathesis extensorum とすることは Kant の Kr. d. r. V. に於ても見られる。

註四、ライプニッツに於いては、力（活力）は、ガリレイ、デカルトに於ける如く運動量 mv でなく mv^2 で表はされ、ヤングによつて導入せられた今日の運動の「エネルギー」に相當するものであつたことも、その點から却つて意義深く考へられるであらう。