パラドックス再論

――レーヴェンハイム・スコーレムの背理を中心として――

近藤洋逸

論理學乃至數學の基礎にまつはる所謂パラドックスはラッセルなどの論究以來、相當の數にのぼり、又其の解法も種々の方向に求められてゐるが、それの重要なものとしてはF・P・ラムゼー[1]等の採る方法がある。A・フレンケルの黄表紙本「集合論」[2]でも此方法が用ゐられてゐる。彼等に依ると、先づ論理學、數學の客觀的なシステム自身に就てのパラドックス（ラムゼーは之をグループAの背理と呼んでゐる）がある。例へば「自己自身の要素でない總てのクラスのクラス」（ラッセルの背理）とか、「最大の序數」に關するブラリ・フォルティのパラドックス等である。此グループに屬するパラドックスの共通特徴は、論理計算の言葉を用ゐると、命題函數自身が自己のアーグメントとなることである。$f(x)$を命題函數とすると$f(f(x))$が成立すること、之を命題函數に對應させられる集合に就て言へば、集合Mが自分自身の要素となることである。之は

$$M=\{a, b, c, \ldots\ldots, M\}$$

で圖示することが出來る。括弧内の記號はMの要素を示す。ところでラッセルのパラドックスとは次のものである。——集合は自己を要索として含むか、又は含まぬ。此判斷は現實に斯る二種類の集合が實在するか否かに拘りなく成立する。第二種の集合をノルマル集合と呼び、集合Mを總てのノルマル集合の集合とする。ところでM自身はノルマルか否か。若しMをノルマル集合と假定するとMは凡てのノルマル集合の集合だからM自身を要素として含み、從つてMがノルマルであるとの假定に矛盾する。次にMがノルマルでないと假定すると、Mは總てのノルマル集合の集合であるから必然的に自己を含み、從つてMがノルマル集合となり前提と矛盾する。かくて孰れの前提からも前提と矛盾する結果に到達するのである。

此種のパラドックス防止のためには$f(f(x))$, $M=\{a,b,c,\ldots\ldots,M\}$を禁止すれば充分である。ラッセルのパラドックスでは、ノルマルでない集合が論理的に無意味なものとして排除されるから、「集合は自己を含むか、又は含まぬ」と言ふ Entweder-oder の判斷が成立せず、斯くて矛盾發生の根據が除かれる。卽ちアーグメントと此アーグメントの凾數自身とをタイプの相異るものとする所謂「簡單なタイプの理論」でグループAのパラドックスは完全に排除される。換言すると普遍（卽ち凾數）と特殊（卽ちアーグメント）とを同一列に置くべからずと宣告すれば充分である。普遍と特殊と外的に並列すること、この事は必然的に普遍を特殊に轉落させ、普遍の本來の意味を失はしめるのであ

る。此處にパラドックスAの發生の論理的根據が在る。普遍を特殊と外的並列に於てゞはなく、內的に統一すること、これに依つてのみ普遍は普遍の、特殊は特殊の意義を保持し得る。「簡單なタイプの理論」はこの論理的關係の形式的表現以外のものではない。グループAのパラドックスは實のところ右の如き論理的關係を無視するところに成立するのである。

ところでいま一つのグループのパラドックス、ラムゼーの所謂グループBのそれは些か上記のそれとは面目を異にしてゐる。「私は嘘を言ふ」（エピメニデスの背理）、「十九箇のシラブル以下では命名されぬ (not nameable) 最小の整數」、「定義されぬ最小の順序數」、ワイルの "heterological" に關する背理等がBのそれである。Bパラドックスの共通特色は nameable, defineable などの認識の作用自身に屬する機能が含まれてゐることである。Bパラドックスが epistemologische Antinomie と呼ばれる所以である。

扨、ワイルの "heterological" に關するパラドックスに就てBパラドックスの構造を檢討してみよう。命題「xはφなり」に於てxは主語、φは述語（性質）であるが、xを不定とすると右の命題は命題函數と呼んで、xが一定した主語を示す場合と區別する。命題函數は $\phi\hat{x}$ で表はす。而て $\phi\hat{x}$ の不定の値を $\phi\hat{x}$ で示す。$\phi\hat{x}$ のφはxに就ての性質であるが、φを書かれた文字と見る時は、之を "φ" で表示する。今 "φ" と $\phi\hat{x}$ との關係をRとすると、「φがヘテロロヂカルである」とは "φ"

自身が性質ϕを持たぬ事であり、之を記號化すると

$$(E\phi):xR(\phi\hat{x})\cdot\sim\phi x \quad \cdots\cdots *$$

となる。$(E\phi)\cdot\phi x$ は「ϕx がある」、$\sim\phi x$ は ϕx の否定形である。例へば形容詞 "long" は、之を書かれた文字、記號と見ると「長い」ではないから、ヘテロロヂカルである。ところで性質「ヘテロロヂカル」は果してヘテロロヂカルであるか否か。若し記號「ヘテロロヂカル」がヘテロロヂカルであるとすれば、記號「ヘテロロヂカル」にはヘテロロヂカルなる性質がヘテロロヂカル自身の意味に依り歸屬しなくなり、前提と矛盾する。逆に、記號「ヘテロロヂカル」がヘテロロヂカルでないとすると、記號「ヘテロロヂカル」に性質ヘテロロヂカルが歸屬することとなり前提と矛盾する結果を得る。今、以上の推論を記號を以て示すと次の如くになる。上記＊を Fx と書くと、"F" と Fx との關係は

$$``F"\ R(F\hat{x})$$

で示される。今、F がヘテロロヂカルでないとすれば

$$(\exists\phi):``F"R(\phi\hat{x})$$

である。ところで＊の Fx の ϕ に "F" を代入すると

$$(\exists F)[``F"R(F\hat{x})\cdot\sim F(``F")]$$

卽ち $F(\text{“}F\text{”}) \equiv \sim F(\text{“}F\text{”})$ を得る。斯くて矛盾した結果を得るのである。ところが此矛盾は上述の「簡單なタイプの理論」を以てしては除去出來ない。$F\hat{x}$ と $\phi\hat{x}$ とはいづれも同じ$\hat{x}$に關する函數、卽ち同じタイプの函數だから、兩者を範疇的に區別すべき理由が無いのである。

この問題に關しベーマン③は次の如くに考へる。——

$$F(\text{“}F\text{”}) \cdot \equiv \cdot \sim F(\text{“}F\text{”})$$

から、Fが*の簡略記號であるからには、逆代入に依りFは除かるべきである。然るに $F(\text{“}F\text{”})$ からFを排除しようとすると $\sim F(\text{“}F\text{”})$ となり、又、$\sim F(\text{“}F\text{”})$ に排除を施すと $F(\text{“}F\text{”})$ となり、斯くて如何なる仕方に依るもFは除去出來ない、これは論理學の原則に反するから、以上の如き不都合な事態が惹起しないやうに簡略記號を作るべしと。之に依つて矛盾は除去されると。

然しこのベーマンの解決法は殘念乍ら解決策になつてゐない、問題の本質は、如何なる理由で、簡略記號の排除が不可能になる如き不都合が生じたかにあるのだ。ベーマンは禁止の準則を掲げるのみで、矛盾の由つて以て生ずる源泉をつきとめてゐない。

ところでラッセル自身は如何なる方法を採つたか。彼の解法は(ベーマンと同樣に)或種類の式の成立を防止する準則、卽ち同じタイプの命題函數の間に “order” を設ける所謂「複雜なタイプの理論」verzweigte Typentheorie である。ラッセルに依ると、矛盾の成立は、*に見られる $F\hat{x}$ と $\phi\hat{x}$

とを同一の段階に置き Fx を ϕx の値と考へるところにある。Fx と ϕx とのこの關係を截然と斷ち切れば矛盾は排除される。然らば ϕx と Fx とを截り離つべき區別は何處に求めるべきか。Fx の構成を見るに、それの定義には $(E\phi)$ と言ふ ϕ の全體に關聯するところのものが用ゐられてゐる。これは同じく x の命題函數である ϕx の持たない構造である。この相違に着目して、Fx と ϕx との範疇的區別を設けるのが、ラッセル、ホワイトヘッド特有のオーダーの理論である。

先づ "es gibt" とか "für alle" とかの形式に依り束縛されてゐる所謂「束縛變項」を含まぬ命題函數をオーダー0の函數、束縛が個體變項（主語となつて述語とならぬものを個體 Individuum、之を可變と考へたものが個體變項）のみに及ぶのがオーダー1の函數、次に其の値がタイプ1の函數であるところの束縛變項を含む函數のオーダーが3、等々、一般にオーダー n の函數とは之の含む束縛變項の値がタイプ $n-1$ の函數である命題函數である。

この解決法は然し乍ら重大なる結果を意外の方面にもたらす。矛盾が除去されると共に或種の貴重なものまでが押し流されてしまふのである。命題函數にオーダーの區別を設けることは、$(E\phi)$ とか (ϕ) 等に依る規定、卽ちあるものの性質の全體に依り規定された性質を、この全體を構成する他の個々の性質から峻別することに他ならぬ。上記の例では Fx と ϕx との峻別である。このために Fx で規定されるクラスと、ϕx に對應するクラスとが絶對的に切離される。斯くして性質の全

體に依り規定された性質を持つもののクラスは、かの性質の全體の構成分たる個々の性質に依り規定されるもののクラスと完全に隔離されるのである。之を論理的に言へば、普遍（性質の全體）と特殊（個々の性質）との交互規定、兩者の統一が排除されることである。普遍を構成する特殊と、普遍に依り規定される特殊とが完全に截り離されるのだ。普遍と特殊との統一の破壞――之が函數へのオーダー導入の論理的意味であらう。

　ところが函數へのオーダー導入は單なる論理の制限に終るばかりでなく、數學に對しても甚大なる破壞力を發揮する。全體に依る部分、普遍に依る特殊の規定、兩者の統一――之は數學の推理に於て到る處に使用されてゐるのだ。之は所謂 Nichtprädikative Begriffsbildung（非述語的概念構成、或はこの論理の性質に依り循環的概念構成と譯すも可、スコーレムは Nichtprädikative Reproduktion と呼んでゐる。以下ＮＰＲと略記することとする。）と呼ばれる論法である。故に之の禁斷は數學の體系に分裂の危機を招來する。ＮＰＲを用ゐるデデキントの切斷（シュニット）に依る實數の定義、有界實數集合の上（下）限存在の規定等々。[4]

　ラッセルの有名な「還元可能公理」Reduzibilitätsaxiom は右の困難の克服策として提出されたのであるが、此公理たるや内容不明の公理、公理らしからざる公理として、論理主義學派（ロギスティカー）自身のうちにも多くの反對を見出すのである。還元可能公理とは――「任意の命題函數 $\varphi\hat{x}$ が與へられた時は

之に對して形式的等價な述語函數 predicative function（束縛變項を含まぬ命題函數）がある」。之に依り一度びオーダーの導入に依り作られた命題函數間の障壁が形式的に撤去される。ところで此公理こそ全くの窮餘の策と論斷するほかないであらう。

B群のパラドックスとNPRとは一見すれば全く同じ構造を持つもののやうであるが、然し前者の含んでゐる「言葉」とか「意味」とかの語を見れば明かな如く、パラドックスBは對象に對する意味作用にからみあつて生じてゐる。この點に於て、全く客觀的な對象間の規定の關聯であるところのNPRと相異する。實のところ、ラッセル自身の方法に於ても、還元可能公理がNPRのみを回復して、パラドックスBを再び呼び返さぬ根據は、オーダーの相異る意味作用の間には形式的等價が成立しないと考へられるところにあつた。ところで我々は一歩進んで、このNPRとパラドックスBとの本質的區別を理論の先頭に揭示すれば、還元可能公理は不用となり、所謂「簡單なタイプ理論」で充分となるのである。パラドックスBは意味作用（記號と之で表示される客觀との關係）に關聯して生ずるが、この意味作用にては、記號に依る對象のシンボリックな表示の仕方そのものが本質的なるものであり、同じタイプの對象に關しても、束縛記號を使用するか否かの記號的表示法の間には嚴密な區別を設けるのは當然であり、斯くて意味作用に於てはこのものの本質からオーダーの區別は自ら生ずるのである。故に還元可能公理は客觀的な論理のうちに外部から持ち込む必要は

毫も無い。

扨、此解決法は、記號に對する數學の對象の客觀的獨立性、意識に對する論理や數學の對象の客觀性を拒否する所謂數學的觀念論の許し得ざるところのものであらう。然し乍ら此觀念論の立場こそ批判さるべきドグマである。パラドックス排除には「簡單なタイプの理論」で充分である。勿論このタイプ理論は上述の如く普遍と特殊の統一の是認、數學乃至論理の對象の客觀的獨立性の容認を以て補强されねばならない。

ところで更に次の事を注意すべきである。ラムゼーにては、束縛變項を含む式と含まぬ式との相違をたゞ記號に依る記法の相違にすぎずとされてゐる。例へば $(Ex)\cdot\phi x$ は $\phi a \vee \phi b \vee \ldots\ldots$ と同じであり、$(x)\phi x$ は $\phi a \,\&\, \phi b \,\&\ldots\ldots$ と同じと考へられる。之は ϕx を滿足するクラスが有限の場合は問題は無いが、クラスが無限となれば、一箇一箇と enumerate することは不可能となる。且又、記法の相異に應じて對象の異る側面が照し出されると考へてはならぬだらうか。我々は、$(x)\phi x$, $(Ex)\phi x$ 等は ϕx を x の領域との關聯に於て explizit に把握するものと考へる。然るに單なる命題函數、束縛變項を含まぬ命題函數にてはこの關聯は背景に沈み implizit である。記法の發展とは對象が把握される度合の發展である。束縛記法の無いものから、之を含むものへの轉化は一つの發展である。ラムゼーは束縛記號を論理的には非本質的なりとして退け、之でオーダーの區別を撤去

するのであるが、我々は束縛記法の論理的特性を認め、しかも普遍と特殊との統一の觀點からオーダーの區別を止揚するのだ。全く同一の結果には到達するものの、結果を導出し、理由付ける根據に於ては、我々とラムゼーとは本質的に相異するのである。

① F. P. Ramsey, The foundations of mathematics. (Proceedings of the London Math. Soc. Ser. 2. Vol. 25, 1926)

② A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre. 3. Aufl.

③ H. Behmann, Zu den Widersprüchen und der Mengenlehre. Jahresber. d. D. M. V. 1931. S. 40 f.)

④ 前稿、本誌第二三一號參照

R・カルナップはパラドックスB（彼は之をジンタックス的矛盾 Syntaktische Antinomie と呼ぶ）のうちに定義可能 defineable 命名可能 nameable 等を用ゐて構成されるパラドックスを一括してゐるが、定義可能にも全く相異る二つの事が意味されてゐるのだ。即ち一定の記號で表示される客觀的對象に依る同じく他の客觀的對象の規定と云ふ關聯、他方には命名可能の意味の定義可能があり之は對象に對する記號の表示の關係である。パラドックスBは後者にのみ屬する。ところが所謂レーヴェンハイム・スコーレムの背理は、以下述べる如く客觀的な集合論の公理系に關聯し前者に關聯するものであり、從つてパラドックスBとは全く別箇の處理を要求するのである。カルナップの如くに之をパラドックスBと同じくジンタクティッシュと呼んで同一視するのは正當な取扱とは言ひ得ない。

扨、レーヴェンハイム・スコーレムの背理は如何なる根據から成立するのだらうか。之に答へるには背理を導出する推論の過程を仔細に吟味する必要がある。以下に示す如く此背理の關るところのものは主として有限と無限との關聯、それにＮＰＲがからまつてゐる。

集合要素を一般に x、y、z、…… で示す。$x\varepsilon y$ は x が y の要素であることを表す。$x\varepsilon y$ の形の個々の命題から五箇の論理的オペレーション――否定(ニヒト)(－)、分離(オーダー)(＋)、結合(ウント)(・)、すべて(アルレ)(Π)、あるもの(エス・ギプト)(Σ)――を有限回適用して得られる命題を確定命題 definite Aussage、又は數命題 Zählaussage と呼び、而て x、y、…… が可變である場合を、x、y、…… が一定と考へられた場合及び x、y、……にすべて束縛記號Π、Σが加はる場合から區別して、確定命題函數 definite Aussagenfunktion 或は數命題函數 Zählaussagenfunktion と名付ける。

レーヴェンハイムの定理とは――「數命題は矛盾を持つか然らざれば既に可附番の領域で充實可能である」。之をスコーレムは擴張して――「數命題の可附番無限系列の同時成立は矛盾を持つか、然らざれば既に可附番の領域で充實可能である」。

扨、述語計算學の法則を用ゐると、各確定命題函數に含まれる束縛記號を全部外部に出すことに依り所謂標準形 Normalform を得る。標準形の一般形は

$$\underset{x_1}{A}\cdots\cdots\underset{x_m}{A}U\,(x_1\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots x_n)$$

である。AはΠ又はΣのいづれかである。Uは初等命題函數 elementare Aussagenfunktion と言はれ、之は結合、分離、否定のオペレーションのみを用ゐて構成される。之を論理計算の所謂ブール展開 Boolesche Entwicklung を用ゐて展開すると

$$a_1(x_1\epsilon x_1)(x_1\epsilon x_2)\cdots(x_n\epsilon x_n)+a_2(x_1\epsilon x_1)(x_2\epsilon x_2)\cdots(x_n\bar{\epsilon}x_n)+\cdots+a2^{n^2}(x_1\bar{\epsilon}x_1)(x_1\bar{\epsilon}x_2)\cdots(x_n\bar{\epsilon}x_n)$$

となる。$x\bar{\epsilon}y$ は「xはyの要素でない」。aは僞(0で示す)又は眞(1で示す)のいづれかの眞理値を表はす。ブールの展開式はUのあらゆる可能な場合を含めて顯示したものに他ならない。ところで展開式の各項の順序は次の如く定める、要素と集合の關係を一般に e_i e_i'、で示す時は $e_i=e_i'$, $e_j=\epsilon$, $e_j'=\bar{\epsilon}$ ならば $(x_1e_1x_1)\cdots\cdots(x_ne_{n^2}x_n)$ を $(x_1e'_1x_1)\cdots\cdots(x_ne'_{n^2}x_n)$ の前におくのである。而て各項の內部の順序は $i=h$ 又は $i=h$, $j<k$ ならば $x_ie'x_j$ を $x_he''x_k$ の前におく。但しe' e'' は ϵ 又は $\bar{\epsilon}$ である。

すると我々は命題函數を順序付けることが出來る。(順序付けるとは自然數列と一對一の對應關係におき、番號をつけることの意味に用ゐる)。先づ $n=1$ から大いさの順序に從ひ、而て同じ n に對しては m の大いさに從つて並べる。且、同じ m、n に對しては、

$$A_{x_1}\cdots\cdots A_{x_m}U(x_1,\cdots\cdots x_m,x_{m+1}\cdots\cdots x_n)$$ が

$$A'_{x_1}\cdots\cdots A'_{x_m}U'(x_1,\cdots\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots\cdots x_n)$$

の前におかれるのは、$\underset{x_i}{A}=\underset{x_i}{A'}$, $\underset{x_j}{A}=\pi$, $\underset{x_j}{A'}=\Sigma$ $(i<j)$ の場合である。以上すべてが同じ場合にはUの内部の構造に從つて順序付ける。即ち $a_i=a_i'$, $a_j=1$, $a_j'=0$ $(i<j)$ ならば $U=\Sigma a_k P_k$ $U'=\Sigma a_k' P_k$ の前におく。

ところでスコーレムの目的は集合論の公理(こゝではツェルメロ・フレンケルの集合論公理系が對象とされる)を凡て數命題として表はすことにある。この目的が到達されると、「定理」に依つて集合論は既に可附番領域で成立することが歸結され、從つて可附番以上の集合を特色付ける集合論の命題は存在しなくなり、こゝに有名なレーヴェンハイム・スコーレムの背理が生れるのである。

先づ Axiom der Bestimmtheit (集合 x、y、z に就いて x が z の要素で、$x=y$ ならば y は z の要素でもある)が記號化されると

$$\prod_x \prod_y \prod_z ((x\neq y)+(x\bar{\varepsilon}z)+(y\varepsilon z))$$

となる。此處に $x\neq y$ は $x=y$ の否定であり、$x=y$ は

$$\prod_z ((z\varepsilon x)(z\varepsilon y)+(z\bar{\varepsilon}x)(z\bar{\varepsilon}y))$$

で定義される。之を用ゐると $x\neq y$ は容易に排除される。

「零集合存在公理」は $\sum_x \prod_y (y\bar{\varepsilon}x)$ で記號化される。

Axiom der Paarung (集合 x、y が相異る集合ならば x と y とのみを含む集合がある)は次式で記

號化される。

$$\prod_x \prod_y \sum_z (x\varepsilon z)(y\varepsilon z)$$

Axiom der Vereinigung を記號化すると次の如くなる。

$$\prod_x \sum_y \prod_z \sum_u \prod_v \left((z\varepsilon y)(z\varepsilon u)(u\varepsilon x)+(z\bar{\varepsilon}y)\left((z\bar{\varepsilon}v)+(v\bar{\varepsilon}x)\right)\right)$$

Axiom per Potenzmengen （各集合 x に對して x の總ての部分集合 z を要素とする集合 y あり）は

$$\prod_x \sum_y \prod_z \sum_u \left((u\varepsilon z)(u\bar{\varepsilon}x)+(z\varepsilon y)\right)$$

で表はされる。

無限公理も選擇公理も同様に數命題を以て表示し得る。

然るに Aussonderungsaxiom （數命題函數を成立させる集合を要素とする集合を然らざる他の集合から區分し得る）は

$$\prod_E \prod_y \prod_z \cdots\cdots \prod_m \sum_n \prod_x \left[(x\varepsilon n)(x\varepsilon m)E(x,y,z\ldots\ldots)+(x\bar{\varepsilon}n)\left((x\bar{\varepsilon}m)+\overline{E(x,y,z\ldots\ldots)}\right)\right]$$

で記號化されるが、この表示に於ては記號Πが凡ての命題函數Eに關與してゐるから右式は明かに數命題ではあり得ない。然し命題函數は可附番化されるから（前出）、Eに對して存在する各々の命題函數を代入して生ずる個々の數命題の單純無限系列の同時成立を考へれば、右の式も數命題の單純な擴張となるのである。

Axiom der Ersetzung も同樣に處理される。

斯くして公理はすべて數命題に轉化される。之で證明の第一歩が踏み出される。

扨、愈々レーヴェンハイムの定理――「數命題は矛盾を持つか、然らざれば既に可附番の領域で充實可能である」――の證明にとりかゝる。勿論、數命題が成立するのは領域（ベライヒ）$\mathfrak{B}$であるが、而て之があらゆる數命題を成立させる領域として前提されてゐる。從つて$\mathfrak{B}$は可附番とは制限されてゐない。たゞ數命題が$\mathfrak{B}$にて成立するとすれば、即ち數命題が無矛盾とすれば、それは既に可附番の領域で成立すると主張するのがレーヴェンハイムの定理なのである。

先づ簡單な場合として命數題 $\Pi_x \Sigma_y A(x,y)$ を考へる。この命題の意味を、領域に含まれる各要素 x に對して $A(x,y)$ を成立させる要素 y を構成する實際の手續きが知られてゐる命題とする。即ち各 x に對して y を對應させる對應の手續きが(之を $f(x)$ で表示する)知られてゐる場合にのみ右の數命題が有意味と考へるのであるから、この立場は構成可能のもののみを認める直觀主義のそれである。　かくて $\Pi_x \Sigma_y A(x,y)$ とは $A(x,f(x))$ が領域の各要素 x に對して成立することを示す。今、a を領域$\mathfrak{B}$の任意の要素とし、この a を $f(x)$ の x に代入して得られる要素を b とする。a と b との集合を M_1 とし、M_1 のあらゆる要素をあらゆる可能な仕方で x に代入すると更に若干個の要素が得られる。之等と M_1 の要素とを合せて M_2 とする、等々、此操作を無際限に續けると、集合の

無限系列 $M_1, M_2, \ldots\ldots$ を得る。之の Vereinigungsmenge を $\mathfrak{B}_0$ とすると、$\mathfrak{B}_0$ は明かに $\mathfrak{B}$ の部分集合であり且可附番である。而て上記の數命題は $\mathfrak{B}_0$ にて成立する。卽ち $\mathfrak{B}_0$ の任意の要素を x とし、之は有限箇(卽一箇)だから、之を含む集合 M_ν があり得る。故に $f(x)$ は明かに $M_{\nu+1}$ に含まれるから、從つて $\mathfrak{B}_0$ に含まれるからである。斯くて $\mathfrak{B}_0$ の如何なる要素を x とするも $f(x)$ は $\mathfrak{B}_0$ の外に出ることはないのである。直觀主義からは以上の結果に必然的に到達する。

然しスコーレムに依ると、直觀主義ならざる立場にても選擇公理を用ゐるならば全く同じ結果に到達すると。上例 $\prod_x \sum_y A(x,y)$ にては $\mathfrak{B}$ の各要素 x に對して $A(x,y)$ を成立させる要素 y の集合を $\mathfrak{B}_x$ とし、之から選擇公理を用ゐて代表の要素を選出し、之を $f(x)$ とするならば $A(x,f(x))$ を得、かくて結局前と同じ論法を進め得るのである。

以上は簡單な數命題に關してゞあるが、一般の數命題

$$\prod_{x_1}\ldots\prod_{x_m}\sum_{y_1}\ldots\sum_{y_n}\prod_{z_1}\ldots\prod_{z_p}\sum_{u_1}\ldots\sum_{u_q}\ldots\ldots U(x_1\ldots x_m, y_1\ldots y_n, z_1\ldots z_p, u_1\ldots u_q\ldots\ldots)$$

にても同樣に論ずることが出來る。卽ち之が $\mathfrak{B}$ にて成立するとは

$$y_1=f_1(x_1\ldots\ldots x_m)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n=f_n(x_1\ldots\ldots x_m)$$
$$u_1=g_1(x_1\ldots x_m, z_1\ldots z_p)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_q = g_q(x_1 \cdots x_m, z_1 \cdots z_p)$$
………………

が知られる時、命題Uが$\mathfrak{B}$の任意の要素 $x_1 \cdots x_m, z_1, \cdots z_p, \cdots\cdots$ に對して成立する事なのである。

ところでスコーレムは更に進んで直觀主義をも、選擇公理をも用ゐないで、所謂古典的立場に立つ場合にも、定理を證明し得ると主張する。簡單な數命題Z

$$Z: \Pi_x \Sigma_y \Sigma_z U(x,y,z)$$

を考へる。Uを構成する命題函數をA、B、C……とし、原命題函數と呼んでおく。右の命題が成立するとは、A、B、C……の、領域$\mathfrak{B}$からのアーグメントの値に對する眞理値に依りzが眞となることにほかならぬ。而てこの場合に「zは既に可附番の領域で充實可能なり」と主張するのが問題の「定理」である。いま領域$\mathfrak{B}$の任意の要素を1と名づけると、先づ $U(1,y,z)$が成立する。zは、xのすべてに對してzを滿足させる要素y、zがあることを主張するから、1に對應して定まるy、zを夫々2、3と呼ぶと、$U(1,2,3)$が成立する（第一回）。次にxに2を代入した$U(2,y,z)$が成立するから、2に對應して定まるy、zを夫々4、5とすると$U(2,4,5)$、及びxに3を代入して成立する$U(3,y,z)$にて3に對應して定まるy、zを6、7とすると$U(3,6,7)$を得る（第二回）。以下同樣の操作を無際限に續けることが出來る。以上の操作をn回進めると $1, 2, 3, \cdots\cdots, 2^{n+1}-1$ の要素を得るから次の結合形 Konjunktion 〔(K_n) と呼ぶ〕

$$(K_n)\ U(1,2,3)\ U(2,4,5)\ U(3,6,7)\ \ldots\ldots\ U(2^n-1, 2^{n+1}-2, 2^{n+1}-1)$$

が成立する。$1,2,\ldots\ldots,2^{n+1}-1$ を自然數列からの n 番目の截片 Abschnitt と名付け、R_n と記すと、K_n が R_n を$\mathfrak{B}$から適當に選ぶとき眞となる事を z は主張するのである。換言すると、各 n に對して R_n に含まれるアーグメントの値に對する原命題函數 A、B、C……に眞理値を適當に與へて K_n を眞ならしめ得ると主張するのだ。ところで R_n から取り來つたアーグメントの値に對する原命題函數の値のとり方が問題となる。

先づアーグメントの値の順序付けを行ふ。　　數列

$$2^n,\ 2^n+1,\ldots\ldots,2^{n+1}-1$$

は R_{n-1} には含まれず、R_n に到つて始めて含まれる。

次に Paar を

$$(1,\ 2^n),\ldots\ldots,(2^{n+1}-1,\ 2^{n+1}-1)$$

の順序に、Tripel を

$$(1,\ 1,\ 2^n),\ldots\ldots,(2^{n+1}-1,\ 2^{n+1}-1,\ 2^{n+1}-1)$$

の如くに系列付ける。かくて R_n からのアーグメントの値が系列付けられると、之の直後に R_{n+1} からのアーグメントの値を全く同様の仕方で系列化するのである。但し R_0 にはアーグメントの値は

ない。以上の如くして各 n に對してのアーグメントの値が完全に順序付けられるのである。

次に數命題を構成する原命題函數を順序付けて

$$A_1, A_2, \ldots\ldots$$

と記すこととする。

以上の操作が完了すると次に R_n から取り來つたアーグメントの値に對する原命題函數の眞理値の選擇の仕方を系列化する。今、函數の眞理値の二つの選擇 $W_i^{(n)}$ $W_j^{(n)}$ があるとする。而てアーグメントへの値の系列を順次に追跡して ρ に到つて始めて凡ての原命題函數が必ずしも兩選擇に對して一致しなくなるとする。そして A_r が始めて ρ に對して他の原命題函數と合致しない眞理値を持つ命題函數とし、若し $A_r(\rho)$ が $W_i^{(n)}$ にて僞であり、$W_j^{(n)}$ にて眞となるならば $W_i^{(n)}$ を $W_j^{(n)}$ の前に置くのである。斯くて R_n から取り來つたアーグメントの値に對する原命題函數の値の選擇には次の順序が生ずる。$W_i^{(n)}$ が $W_j^{(n)}$ の前にある事は、R_m $(m<n)$ 內にては $W_i^{(n)}$ が $W_k^{(m)}$ と合致し、$W_j^{(n)}$ が $W_h^{(m)}$ と合致するとき、$W_k^{(m)}$ は $W_h^{(m)}$ と合致するか(卽ち ρ が R_m には未だに含まれてゐない)、然らざれば $W_k^{(m)}$ は $W_h^{(m)}$ の前にある(卽ち ρ が R_m 以前に既に含まれてゐる)ことである。

扨、K_n は自己の成立を主張するのであるから、K_n を眞ならしめる若干箇の $W_i^{(n)}$ がある筈で

ある。之をn階の解と呼んでおく。n階の解は勿論m階$(m<n)$でも成立するから、それはm階の解のあるものと合致しなければならない。即ちn階の解はm階の解の接續 Fortsetzung である。ところで各階の解の數は有限箇だから(何者、アーグメントの値が有限箇だから)、そのうちには更に高い各階への接續を持つ解が必然的に含まれてゐる。これをF解 F-Lösung と言ふ。n階のF解を順序付けて

$$L^{(n)}_1,\ L^{(n)}_2,\ \ldots\ldots$$

とする。但しもとの選擇 $W^{(n)}_i$ の順序に從つておく。すると各nに對して $L^{(n+1)}_1$ は $L^{(n)}_1$ の接續である。故に各nに就いて原命題函數の値を $L^{(n)}_1$ に對して規定するならば、數命題zは明かに充實される。かくて定理の證明は終る。

以上の證明はzが一般の形態を持つ場合にも全く同樣にして(勿論複雜にはなるが)遂行し得るのである。更にスコーレムに依る擴張定理の證明も根本に於ては毫も變りは無いから、省略しておく、レーヴェンハイム・スコーレム流の論法の特色は以上の如き最も簡單な場合に於ても既に充分に、且明瞭に覗ひ得るのである。

ところで我々は既に集合論の公理をすべて數命題となし得たのであるから、上記のレーヴェンハイム・スコーレムの定理は全く許し難き背理を惹起する。此定理に依ると如何なる無矛盾の數命題

も可附番の領域で既に充實可能であるのだから、超可附番集合を特色付ける數命題は存在しないのである。換言すれば連續とか實數集合の如き對象を自然數集合の如き可附番の集合から區別すべき何等の數命題をも作り得ないのだ。ところが我々は自然數集合に羃集合構成のオペレーションを施せば、周知の如く、實數全體の集合を得る。卽ち實數集合を數命題で表示し得るのであるから、實數集合は何等かの仕方で可附番化されなければならなくなる。然るにカントルの對角線方法は實數集合と自然數集合との濃度の相違を立證するから、此處に一つの解き難いパラドックスが生れるのである。實數集合は超可附番であつて、しかも可附番となる。

此パラドックスは比較的最近に到つて問題となつたためか、それに關する文獻も少く、從つて其の解決法も、他のパラドックスとは異つて、僅少である。スコーレム[7]、フレンケル[8]、カルナップ[9]等の採る解法が最も廣く採用されてゐるが、この解法の主眼點は、立場の相違に依り、基礎におかれる公理系の如何に依り、實數集合は可附番とも超可附番ともなると言ふところにある。彼等は次の如くに考へる。――濃度の概念は公理化する際には必然的に相對化すると。有限、可附番無限、超可附番無限の區別は公理主義の立場から論ずる限り、必ずしもカントル流の立場からの區別と合致する必要はない。基礎に置かれる公理系に從つて可附番の概念も變化し得ると。

然し乍ら問題は斯樣な漠然たる解決を以て滿足すべきであらうか。彼等が解決策の支柱として求

めてゐる實數集合を可附番ならしめる公理系は果して如何なるものか。此要求を充足する公理系を提出しない限り、パラドックスは解決されたとは言ひ得ないではないか。勿論、實數集合を有限の手續で實際に構成される實數の集合のみに限るならば、即ち本來の意味の實數集合、連續の特性を持つ實數集合を破壞して或種類のみの集合、不連續な實數集合とするのであれば、（ワイルの"Das Kontinuum"（1918）に於ける立場だ）實數集合は可附番となり、パラドックスは消失するであらう。然しパラドックスを主張する論者は、立場の制限に依つてゞはなく、立場を高め、領域を擴げ、視野を擴大することに依り、實數集合を可附番化し得ると言ふのである。例へばカルナップは、カントル流の集合論、從つて又、ツェルメロ・フレンケルの集合論公理系は客觀化された言葉 Objektsprache であり、これに對してレーヴェンハイム・スコーレムの定理は客觀化された言葉そのものの結合法則を研究する高次の立場、彼の所謂 Syntax の立場に於て成立すると言ふのだ。故に二つの立場を區別すれば矛盾は生じない筈であると主張する。然しジンタックスの立場は客觀化された言葉である集合論の立場より高く、從つて廣い立場なのであるから、集合論で謂ふ實數集合の連續性を破壞することなく、しかも之を可附番としなければならぬ筈である。だが之が果して可能であらうか。

我々はレーヴェンハイム・スコーレムの定理の證明過程を吟味する必要を感ずる。之に依り始めて此定理が果してより高次の立場に於て成立するものであるか、それともより狹小な立場（例へば上

述のワイルの立場[10]に於て成立するものなるかを決定し得るであらう。若し前の場合が正しいとすると、實際に實數集合を可附番化する公理系の建設が問題となり、之が解決されざる限りパラドックスは依然としてパラドックスとして存在するだらう。濃度の相對化が如何なる具體的プロセスを通じて行はれるかゞ明示されない限り、單に濃度の相對化を叫ぶのみでは何等の解決策とは言ひ得ないのだ。然し若し後の場合が正しとすると、其處にはパラドックスは毫も存在しない。それは、たゞ限られた狹小な立場に立てば、實數集合の連續性が破壞され、可附番集合しか殘らぬと言ふことにすぎないのだ。次に第三の場合として、若しレーヴェンハイム・スコーレムの定理と集合論公理系が同一の立場にあるとするならば、其處にはカントルの對角線方法が正しいか、然らざれば右の定理が正しいかの二者擇一が提出されることになる。

證明の吟味に於て先づ問題となるのは、命題函數の系列化である。既述の如く、命題函數に含まれる變項の個數nに依り分類し、同一のnに對しては束縛される變項の箇數mで分類し、同じm、nの場合に對しては束縛變項に含まれる全稱記號Πと、存在記號Σの箇數の配分の如何に依り區分し、最後に以上すべてが同じ場合には初等命題函數Uの構造に從つて系列化したのである。例へば$U=\Sigma a_i P_i$を$U'=\Sigma a'_i P_i$の前に置くのは、$a_i=a'_i$, $a_j=1$, $a'_j=0$（但し$i<j$）である場合なりとするのである。（ブール展開の箇處參照）　だが此處で次の事を注意すべきである。相異る命題函數U、

U' に於ても P_k が同一の形で書かれてゐることである。即ち相異る U, U' に於ても獨立變項たる $x_1, \ldots\ldots, x_n$ が全く同一に記號化されてゐることは、全く變項の成立する領域を顧慮してゐない事に由るのではあるまいか。又、顧慮するとしても領域全體に關聯してのみ考へられてゐるのではなからうか。こゝにスコーレム流の命題論理學に對する重大なる問題が横つてゐるのである。命題函數を記號の外見にのみ從つて見るならば、U, U' に於て同じ P_k を書いて差支へないかも知れぬが、然し一度び命題函數の持つ獨立變項の成立する領域が問題となるや否や、同じ P_k を書くことは一般には許されない。例へば $U(x)$ と $U'(x)$ とにブール展開を施すと夫々 $a_1(x \epsilon x) + a_2(x \bar{\epsilon} x)$ と $a_1(x' \epsilon x') + a_2(x' \bar{\epsilon} x')$ とになるが、スコーレムの如く U と U' とに於て P_k を同一に記す事は即ち $x \epsilon x$ と $x' \epsilon x'$ とを同一視することである。然し乍ら獨立變項 x x' とはそれの成立する領域を考慮すれば決して $x \epsilon x$ と $x' \epsilon x'$ とは同一の論理的意味を持ち得ないのだ。x x' の特殊性につれて $x \epsilon x$ と $x' \epsilon x'$ とは全く相異る對象を持つ、然し若し x x' の成立する領域の特性を抹殺して一律に $\mathfrak{B}$ にのみ關聯させて x x' を考へるならば $x \epsilon x$ が $\mathfrak{B}$ にて成立することは $x' \epsilon x'$ が $\mathfrak{B}$ にて成立する事と全く區別出來なくなる。まさに兩者の區別こそ兩者が夫々成立するところの領域の各々の特殊性に存するのだ。

束縛變項の無い命題函數、即ち初等命題函數にては獨立變項の成立する領域がインプリチットな

のだが、束縛記號が附加されるに到るや變項の領域への關係がエクスプリチットになつて來る。領域の特性を顧慮しない獨立變項も記號化されるが、それは全くシンボルとしての意味しか持ち得ず、從つて各命題函數を特性付けることが不可能となり、かくて當面の課題たる凡ての命題函數をすべて系列化する要求に充分に應じ得ないのである。

然らば變項の領域の特性を考慮するとき問題はどう展開するであらうか。我々が出發の土臺とした領域𝔅は可附番と制限されてゐないから、この領域中にとり得る個々の特殊の部分領域の箇數は明かに可附番とは限定し得ない。若し可附番と考へようとすれば、𝔅を有限的と考へるか、然らざれば𝔅中の部分領域を逐次形成される限りと制限するほか無い。このいづれの途を進むとしても、その途たるや有限主義、構成主義、アトミズムのそれではないか。かくて我々はスコーレムの出發點そのものに致命的な制限を見出すのである。斯る立場から考へられる命題函數乃至數命題が、可附番の領域で充實可能なのは全く自明的なことである。くだ〱しい證明を經なくとも、既にこのスコーレムの出發點に於て其結果を充分に豫知し得るのだ。

ところで命題函數が系列化されぬとすれば命題函數に全稱記號の及ぶ Aussonderungsaxiom はスコーレムの意味に於て可附番性を持つた數命題ではなくなり、從つてレーヴェンハイム・スコーレムの定理は適用不可能となるのだ。かくてパラドックスも消滅する。

スコーレムの意圖とは反對に、集合論の操作の非構成的性格は既に羃集合（ポテンツメンゲン）の公理に於て充分に現れてゐる。或集合の凡ての部分集合の存在を土臺とする此公理は、之を可附番無限集合（之の存在は無限性公理にて保證されてゐる）に唯一回適用するのみで既に超可附番の集合を得ることはカントル以來周知の事實であるが、この場合に可附番無限集合の凡ての部分集合を逐次に形成することの不可能なのは對角線方法の明示するところのものである。しかも羃集合の形成はスコーレムの許した五箇のオペレーションのみを有限回適用して得られるのである。又、スコーレムが要素と集合を一律に同じタイプの記號x、y、z……で表示してゐるのも彼を誤謬に導いた一因であらう。集合は命題函數に依り規定されるから、これの要素とはタイプに於て相異る筈である。ところで羃集合公理で束縛記號の及ぶのは集合、即ち命題函數に及ぶのであるから此公理は第一階 erste Stufe の論理學ではなく、更に高階の論理學に屬するのである。このことがスコーレムに於ては完全に看過されてゐる。束縛記號が個體にのみ及ぶ第一階の論理學では、領域は出發點にあつた$\mathfrak{B}$のみであり、$\mathfrak{B}$内にすべての部分領域を限界することは不可能であり、從つてスコーレムの命題函數の順序付けは容易に遂行される。然し羃集合公理に於ける如く束縛記號が集合に及ぶ場合は事態は完全に見直さなければならない。今や各集合の夫々の特殊の規定、即ちそれの成立する部分領域の可能なる凡ての限界付けが必要となる。かくて既述の如き集合の領域、命題函數の領域が全面に押し出さ

れるのは高階の論理學に於てゞあり、しかも集合論の公理系が高階の論理學を要求することは上述の羃集合公理に依つて既に明白である。レーヴェンハイム・スコーレムの定理が第一階の論理學で成立することは誰しも認めるところであるが、殘念乍ら集合論の公理系は更に高階の論理に依つてのみ把握され得るのだ。こゝにスコーレムの意圖を不成功に終らしめるギャップがある。スコーレム自身が許したオペレーションΠΣが集合に及ぶ高階論理の場合には、第一階論理に於ける如き逐次的構成は許されない。集合論、高階論理學の非構成的非アトミスティックな構造と、他方定理自身の成立が許される第一階論理學のアトミティックな逐次構成の論法――この全く相反する兩者の確執のうちにこそパラドックスの眞の原因があるのだ。ツェルメロ・フレンケルの集合論公理系の非構成的特性をスコーレムの原子論的逐次構成の論理で以て律しようとするところにこそパラドックス成立の根據を求むべきである。謂はゞスコーレムの立場は古典的立場を包んで高まつた立場ではなく、まさに逆に古典的立場の極度の狹小化、それの破壞と言つてもいゝ程の變樣を加へる立場なのである。換言すると高階の論理から第一階の論理への轉落――こゝにパラドックスの眞相がある。第一階論理の定理を以て高階の論理を律しようとするところにパラドックスがあるのだ。

　然し乍ら他方に於てスコーレムも羃集合形成の裡に非構成的論理、卽ち全體に依る部分、要素を規定する既述のＮＰＲ[11]の特性を流石に見逃してはゐないやうである。[12]

ところで彼はこのオペレーションを如何に始末するであらうか。

集合の任意の要素に或オペレーションを施して再び此集合の要素を得るならば此オペレーションを再生産 Reproduktion とスコーレムは呼んでゐる。再生産にも次の二種がある。有限箇の要素にオペレーションを施して一要素を得る場合が其の一つである。例へば群、體はこれに屬する。スコーレムは此種の再生産を prädikativ と呼んでゐる。ところで今一つの種類の再生産は集合のすべての要素に或オペレーションを施して再び此集合に屬する要素をつくり出すのである。即ち集合はこのオペレーションに關して完結 abgeschlossen してゐる。この場合の再生産を特徴付けて nicht-prädikativ と彼は呼んでゐる。以下NPRと略記する。例へば集合Mの部分集合で或性質Eを持つ部分集合の全體をU_Eとすれば之の Vereinigungsmenge SU_Eは再びMの部分集合で性質Eを持つてゐる。即ち集合の全體に依り規定されたものが再び集合の部分乃至要素とされるのである。

スコーレムは斯るNPRは逐次的擴張の操作に依つては得られぬことを判然と承認してゐる。之は彼のアトミスティッシュな傾向と相容れないものであり、彼としてはアトミスムスからの一大退却ではあるが、彼は此退却を何等の代償無しで行はうとするのではない。彼はNPRの場合には部分より全體への逐次的擴大を斷念して、その代りに超可附番なものを可附番なものに轉化しようとするところに彼の目的があるのだ。NPRを集合と要素との關係に於て考へると必然的に超可附番の

ものにぶつかる。例へば羃集合構成を考へよ。スコーレムはＮＰＲで始めて把握される集合を理論の冒頭に前提することに依り、可附番以上のものの分析を豫め回避するのだ。彼は次の如き簡素な例を擧げて自己の所説を確證しようとしてゐる。次の四箇の公理を持つ集合論を考へる。

（一）要素を含まぬ零集合 o がある。

（二）各集合 m に對して m のみを要素に含む集合 $\{m\}$ あり。

（三）m、n を任意の集合とすると、m、n のみを要素として含む集合 $\{m, n\}$ がある。

（四）各集合（領域の物）を要素として含む全體集合 Allmenge がある。

この集合論に於ては全體集合には明かにＮＰＲが貫徹してゐる。ところがスコーレムに依ると斯るＮＰＲが成立する場合にも既に可附番の領域でＮＰＲの要求を充し得ると言ふのだ。先づ記號 o ι から出發して公理（二）（三）も用ゐて記號 $\{o\}$ $\{\iota\}$ $\{o, \iota\}$ をつくる。更に $\{\{o\}\}$、$\{o, \{o\}\}$ 等々をつくつて行く。（二）（三）の操作を無際限に繰返すと無限多の記號を得る。しかもこれら記號の總體は明かに可附番である。（三）は常に相異る m, n にのみ適用され、しかも $\{m, n\}$, $\{n, m\}$ の一方のみを保存しておく。斯くして作られた記號から $a \varepsilon b$ を次の規則に依り構成する。o 及び ι を除いた各記號は $\{S\}$ 又は $\{S_1, S_2\}$ の形を持つ。此場合は $S \varepsilon \{S\}$, $S_1 \varepsilon \{S_1, S_2\}$, $S_2 \varepsilon \{S_1, S_2\}$ が成立するとする。これに反して $S\,S_1\,S_2$ から異る S' に對しては $S' \bar{\varepsilon} \{S\}$, $S' \varepsilon \{S_1, S_2\}$ が成立する。更に各 S に對しては $S \bar{\varepsilon} o$,

$S\varepsilon_1$ が成立する。以上の如くして得られる記號の可附番の全體に依つて上記の公理系は、從つてＮＰＲは滿足させられるとスコーレムは言ふのである。全體集合に含まれる要素の全體に依り規定される Vereinigungsmenge（公理(三)を限りなく適用すればいゝ）は再び全體集合に屬するから明かにＮＰＲが成立してゐる。しかもこのＮＰＲは既に可附番領域で充足されるとスコーレムは主張する。

だが果してスコーレムの此要求は實現されてゐるだらうか。否。如何なる集合をも含む全體集合が可附番の記號を含むことはまことに當然である。然し之だけで公理系が可附番領域で滿足されたことにはならない。スコーレムの論證するところのものは可附番集合は全體集合に含まれると言ふにすぎないのだ。だが一度び我々が全體集合の濃度が何であるかを問ふならば、スコーレムの意圖の破綻を直ちに見出すのである。集合は可附番無限集合を含むが其の濃度が可附番であるのではない。これは次の如く考へれば直ちに判る。先づ○から出發して{○}、{{○}}、{○,{○}}……を無際限につくつて行くと、零集合から(二)(三)を用ゐて得られる集合がすべて得られる。ところで(四)を滿足させるためには斯くて作られた集合の全體の集合 z をつくる。然し z は要素として有限集合のみを含むから $z\varepsilon z$, $\{z\}\varepsilon z$ usw. である。從つて○と z から(二)(三)を用ゐて作られる新しい集合の全體 z_1 をつくらなければならない。然るにこの z_1 に對しても $z_1\bar{\varepsilon}z_1$ であることは明瞭である。この過程

は"transfinit"にまで續けられねばならない。故に各ォペレーション毎に作られる集合の箇數は明かに可附番無限ではない。"transfinit"だ。しかも此等はすべて全體集合に含まれる。卽ち全體集合の濃度は可附番以上である。

スコーレムは右の如き擴張の方法を誤つたものと考へ全體集合を單に前提すれば良いと論じてゐるが、然し全體集合を單に前提するにとゞまらず、進んで其の濃度を問ふに到るや右の如き擴張のオペレーションは不可避なのだ。彼はこの必然性を完全に看過してゐる。故にスコーレムが自己のために擧げた例に於ても彼の意圖の失敗を見出すのである。

加之、我々はスコーレムがレーヴェンハイム・スコーレムの定理の證明に用ゐた方法そのものに依り逆に彼の主張を裏切る如き數命題をつくり得るのである。所謂「古典的」觀點からの該定理證明の際に自然數列からの截片 R_1 R_2 R_3 …… を作つた。R_1は 1 2 3を要素にもつが、R_1に屬しない要素をS_1とする。次にR_2には 1 2 3 4が要素として含まれてゐるが、R_2に含まれぬ要素をS_2とする。等々。このことは領域$\mathfrak{B}$が可附番と限定されてゐないからには可能である。するとS_1 S_2……を要素とする集合Sを考へると之は明かにR_1 R_2……の全體に屬しない。式で示すと

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(S_\nu \bar{\varepsilon} R_\nu)$$

となる。S_ν R_ν が各々確定的（デフィニット）であるから右の式は明かに數命題の擴張形にすぎない。しかもR_1 R_2…

…の成立する領域𝔅を越えてのみ成立するのだから、可附番領域で成立しない數命題の擴張形の存在を立證し得た譯である。而て數命題の單純無限系列への擴張はスコーレムの擴張定理が保證するところのものであり、且此擴張は集合論の記號化のためには必然的だつたのである。故にスコーレムの許す前提を用ゐながら逆に彼の意圖を裏切る結果を得るのだ。

直觀主義の立場からの定理の證明に對しても全く同樣の結果を得る。而て此事は直觀主義の要求自身と矛盾する。

要之、可附番以上の𝔅を領域として前提する以上は可附番無限領域𝔅で成立不可能な數命題乃至擴張形は簡單に作り得るのである。以上でレーヴェンハイム・スコーレムの背理の批判を終るが、我々は右の分析から次の如き結論を導き得るだらう。背理は多くの論者（フレンケル、スコーレム、カルナップ、フォン・ノイマン等）の主張する如く立場の昂揚にあるのではなく、まさしく逆に立場の狹隘化、貧小化から生れるのだ。この貧小な立場こそ構成主義、アトミスムスのそれ以外のものではない。斯る貧小化された立場乃至方法と豐富な内容（今の場合は集合論公理系だ）との矛盾――此處にこそパラドックスの根據がある。背理の解決には狹小な立場をあくまで固執するか、然らざれば此立場を廢棄して内容に卽した方法を樹立するか――このいづれか一方を選ばざるを得ない、自己の狹小な立場を固守する前者の途が果して正しい科學的立場と言ひ得るだらうか。要素から有限

なオペレーションの逐次的累積のみを以てしては集合論の全內容を汲みとることは出來ない。スコーレム自身が許すΠΣの操作も、之が可附番無限集合に適用される場合には既に非有限的であり、かくて無限性を持つ全體と相まつて、即ちＮＰＲを用ゐて始めて可能なのだ。例へば羃集合の構成を見よ。しかも此場合にこそ可附番無限を越える飛躍、不連續な系列から超可附番な連續への跳躍が行はれるのである。

⑥ レーヴェンハイム・スコーレム定理の紹介は Th. Skolem, Über einige Grundlagenfragen der Mathematik. (1929) Oslo. に依る。
⑦ Skolem, Einige Bemerkungen zur axiomatische Begründung der Mengenlehre, (Math. Kongressen i Helsingbors (1922)
⑧ Fraenkel, Mengenlehre. 3. Aufl. S. 333.
⑨ Carnap, Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik. (Monatshefte für Mathematik und Physik. Bd. 41, Ht. 2. 1934)
⑩ Weyl, Das Kontinuum, 1918. ⑪ これに就ては既述の拙稿に於て論及した。 ⑫ Skolem, Über einige Grundlagenfragen usw. § 3.

以上でこの拙い小稿を終るが、次の機會にゲーデルの無矛盾證明不可能論、及び束縛記號が命題函數に及び高階の論理計算(之に依つて始めて可附番以上の領域が把握される)の問題を考へてみたい。しかも此兩問題は密接な關係があることが豫想される。又、これにはエルブランの定理がからまつて來るのではないかとも思はれる。

最後に本稿の成立に多大の示唆を與へられた藤原先生及び同教室の方々、特にスコレームの論文を惠與下さつた泉先生、三宅先生、又親しく討論の機會を與へられた淡中氏に厚く謝意を表します。

——一九三六、二、九——