超數學の本質に就て

Quelques Points essentiels de la Métamathématique. Par P. Bernays (Zürich)

ベルナイス
三田博雄 譯

(一) エルブランの基本定理の公理論への適用

一般に公理論は算術を前提してそれに依存し、一方その算術は言はば論理學に屬するものと看做されてゐる。

幾何學或は物理學の公理系が無矛盾であることを證明するに際し、吾々は次の事實、卽ち幾何學或は物理學の公理系が矛盾するならば算術の矛盾も惹起すると云ふ事實を利用した。

公理系の無矛盾の證明が既に算術のそれに還元されたので、ヒルベルトはその證明論に於て彼の所謂有限的觀點から、算術の無矛盾を證明しようと努力して來た。

然し、今日に至るまでこの問題は解決されてゐない。

そこで公理系、殊に初等幾何學の公理系にとつて、算術——解析學の意味に於て、或は少くとも整數の公理論の意味に於て——の無矛盾を證明することが不可缺であるか否か、と云ふ問題が提出される。

ユークリッド幾何學の算術に於ける模型は、代數的數の理論の範圍で與へられるから、或は少くとも初等幾何學に於ては不用な連續性の第二公理を除外した範圍で與へられるから、疑問はそれだけに當然起るべきである。或は更に模型を與へる理論の範圍を制限して、初等的四則演算と正數の平方根を求める演算を用ひて出來る數に限ることも出來る。

算術のこの制限された部分の取扱は、直接に有限的觀點の要求を滿足するものである。

以上述べた事實を信用すれば、初等幾何學の公理系の無矛盾の問題は既に解決されたのではないか、と考へがちである。と云ふのは、この幾何學の算術に於ける模型は直觀的數學に屬してゐるから。

然し、算術に於ける模型によつて幾何學の公理を直觀的に解釋出來たからと云つて、直に幾何學の證明が直觀的に解釋出來るものではない。實際、公理的幾何學に於て、證明は次の事實を假定して成立するのである。卽ち點(或は直線、或は平面)は完全閉集合を作ると云ふ假定——この假定をまつて初めて、或る性質の點(或は直線、或は平面)が存在すると云ふ確言に直接意味があり、又一般に排中律が有効となる。從て論理計算として形式化された傳統論理學の推理も適用出來るのである。

この全體性の假定、卽ち公理的幾何學の對象領域は完全閉集合であると云ふ假定は、算術の模型或は直觀的解釋には含まれてゐないものである。同様にこの解釋が公理的幾何學の證明を悉く明證するものでもなく、又それによつて公理的幾何學の無矛盾を直接に確認させるものでもない。

この難關は然し論理計算に關するエルブランの定理によつて克服出來る。

その方法を簡單に說明するために、幾何學の公理の代りに、唯一の對象領域に關係し、唯一の二變項命題函數 Φ に關する公理系を考へる。公理は次のものである。

1) 如何なる x に對しても $\Phi(x,x)$ は成立しない。

2) $\Phi(x,y)$ 及び $\Phi(y,z)$ が同時に成立する時 $\Phi(x,z)$ が成立する。

3) 任意の x に對して $\Phi(x,y)$ を滿足する y が少くとも一個存在する。

先づこれ等の公理は有限の對象領域に對しては滿足されないことがわかる。他方、整數の領域に於て、$\Phi(x,y)$ に對して命題函數 $x<y$ を置けば、公理の解釋が得られる。これは一の直觀的解釋である。特に存在の確言は、凡ての x に對して成立つ不等式 $x<x+1$ を置けば明確にされる。

この解釋からは直接に、傳統論理學の推理を用ひて右の三公理から矛盾が起らないことはわからない。この不可能、少くとも第一階の論理學に對しては矛盾の不可能

なことを、上述のエルブランの定理から如何に結論するかを述べよう。（註二）

そのために次の論理記號を入れる。

$\&$　「及び」　合接記號

$-$　「でない」　否定記號

$\rightarrow$　「もし……ならば……である」　含意記號

$\vee$　「或は」　離接記號

(x)　「任意の x に對して……である」　全稱記號

(Ex)　「或る x に對して……である」　存在記號

この記號を用ひて上記の三公理を次式で表す。

1)　$(x)\overline{\Phi(x,x)}$

2)　$(x)(y)(z)\{\Phi(x,y)\ \&\ \Phi(y,z)\rightarrow\Phi(x,z)\}$.

3)　$(x)(Ey)\Phi(x,y)$

この三式を合接記號で結合して、公理1)2)3)を表す唯一の式 $\mathfrak{A}(\Phi)$ にまとめる。

もしこの公理系から、論理計算としての傳統論理學の推理によつて矛盾を生ずるならば、$\mathfrak{A}(\Phi)$の否定式$\overline{\mathfrak{A}(\Phi)}$が外に公理を用ひずに論理計算によつて導出されねばならない。同様の理由で、Φの代りに任意の二變項命題函數を表す二變項命題變函數Pを置いた式$\overline{\mathfrak{A}(P)}$が導出出來る。

然るに$\mathfrak{A}(P)$は

$$(x)\overline{P(x,x)}\ \&\ (x)(y)(z)\{P(x,y)\ \&\ P(y,z)\rightarrow P(x,z)\}\ \&\ (x)(Ey)P(x,y)$$

であるから、否定式 $\overline{\mathfrak{A}(P)}$ は論理計算の規則を用ひて次式に變形される。

$$(Ex)P(x,x)\vee(Ex)(Ey)(Ez)\{P(x,y)\&P(y,z)\ \&\ \overline{P(x,z)}\}\vee(Ex)(y)\overline{P(x,y)}$$

更に變形して

$$(Ex)(Ey)(Ez)(u)\left[P(x,x)\vee\{P(x,y)\ \&P(y,z)\ \&\overline{P(x,z)}\}\vee\overline{P(x,u)}\right]$$

この式を簡單に

$$(Ex)(Ey)(Ez)(u)\mathfrak{B}(x,y,z,u)$$

を以て表す。もし公理1)2)3)から矛盾が起り得るならば論理計算によつてその式が出て來ねばならぬ。

この結果にエルブランの定理を適用するのであるが、その定理によれば（こゝに述べる程重要でない或手續に

よつて)

$$(Ex)(Ey)(Ez)(u)\mathfrak{B}(x, y, z, u)$$

から、次の離接式が出る。卽ち

$$\mathfrak{B}(a_1, b_1, c_1, d_1)\vee\mathfrak{B}(a_2, b_2, c_2, d_2)\vee\cdots\cdots\vee\mathfrak{B}(a_r, b_r, c_r, d_r).$$

これは次の性質をもつ。

1、$a_1, b_1, c_1, d_1, \cdots\cdots, a_r, b_r, c_r, d_r$ は變項を表し、その間に等しいものがあつてもよいが d_i は a_i, b_i, c_i とは異り、又 $h\wedge i$ なる h に對しては a_h, b_h, c_h, d_h とは異る。

2、(合接、離接、否定の諸記號で結合して) 上式を構成してゐる種々の式 $P(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ をその「成分」と名付けるならば、各成分に對して全く任意に眞理値 v (眞) 及び f (僞) の何れかを與へる。更に

v には値 f を、$\overline{f}$ には値 v を

$v \& f,\ f \& v,\ f \& f$ には値 f を、$v \& v$ には値 v を

$f \vee f$ には値 f を、$v \vee v, v \vee f, f \vee v$ には値 v を

與へるとき、上式は論理値 v を得る。

然るにかゝる離接式は存し得ない。この事實は上述の直觀的模型からわかる。實際、上述の性質1、2、をもつ式

$$\mathfrak{B}(a_1, b_1, c_1, d_1)\vee\cdots\cdots\vee\mathfrak{B}(a_r, b_r, c_r, d_r)$$

が與へられてゐるとき、その凡ての變項

$$a_1, b_1, c_1, d_1, \cdots\cdots, a_r, b_r, c_r, d_r$$

を、相當關係はそのまゝに保存して、次の數卽ち、($i=1, 2, 3, \cdots\cdots, r$ に對して) a_i, d_i を相隣れる數で置換へる (このことは性質1、によつて可能である)。次にかく變形された各成分 $P(k, l)$ に眞理値を與へるのであるが、$k\wedge l$ に對しては値 v を、$\overline{l\wedge k}$ に對しては値 f を附與する。そのとき離接式の各項は――容易にわかる樣に――値 f をとり、離接式の全體を矢張り値 f をもつ。

かくして吾々は式 $\overline{\mathfrak{A}(P)}$ は論理計算に依て導出されないこと、從て公理1)2)3)から傳統論理學の推理に依ては矛盾が起り得ないことを知つた。

こゝに述べた方法は任意の公理系に適用出來るものである。但し、その公理系が「本來の」公理、卽ち理論の根底に考へた對象領域以外の對象に關する全稱命題或は存在命題を含まぬ公理から成立つと云ふ制限を附して。

從てかゝる公理系に對して、その無矛盾の證明をする場合、數の直觀的理論から模型(モデル)をとる方法は、そのために算術の無矛盾を證明せずとも一般に妥當であることがわかつた。

同樣の理由で、特に連續性の公理を除いた公理的幾何學の無矛盾がわかる――その凡ての公理は本來の公理であるから。(アルキメデスの公理は整數の存在の確言であるが、その整數は公理的幾何學の對象領域には屬しないから、本來の公理ではない)。同樣に亦、この方法は非ユークリッド幾何學にも適用される。

然し、無矛盾の問題のかゝる取扱は普通の論理計算によつて表はされたる推理、卽ち第一階の論理學の推理に關してのみ許されるのであつて、この論理學には任意數の、或は任意函數の、或は任意の集合の全體と云ふ概念は入つてゐない。從て、この方法で無矛盾が證明されると云つても、上述の制限を附してのことである。

(註一) こゝでは唯例として述べてゐるこの簡單な場合にはもつと直接の方法によつて同じ結果が出る。

(二) ε-公理の無矛盾の證明

算術の無矛盾を證明する研究は段階的になされ、その第一目標は算術の形式化、卽ち整數の公理論を形式的に表すことである。

この形式系は次のものから成立つ。卽ち

1° 普通の論理計算

2° 等號及びその公理

$$a=a$$

$$a=b\to\{A(a)\to A(b)\};$$

3° 記號0、及び或數から次數へ移行を示す記號′に對して、ペアノの公理が成立つ。

$$a'\neq 0,$$

$$a'=b'\to a=b,$$

$$A(0)\&(x)\{A(x)\to A(x')\}\to A(a);$$

後の式は完全歸納法を表す。

4° 和及び積の記號+、・、及び歸納的等式

$$a+0=a \qquad a\cdot 0=0$$

$$a+b'=(a+b)' \qquad a\cdot b'=a\cdot b+a$$

以上列舉したことに次の注意を附記しよう。

α) 公理

$$a=b\to\{A(a)\to A(b)\}$$

はより特殊な次の公理

$$a=b\to(a=c\to b=c)$$

$$a=b\to a'=b'$$

で置換へてよい。

β) 完全歸納法は次の圖式

$$\frac{\mathfrak{A}(0) \qquad \mathfrak{A}(n)\to\mathfrak{A}(n')}{\mathfrak{A}(a)}$$

によつても形式化される。

γ) 一般に變命題及び命題變函數は、それを含む凡ての始源式を相當する式によつて置換へ、その變記號を除去出來る。例へば式

$$a=b\to\{A(a)\to A(b)\}$$

は次式卽ち

$$a=b\to\{\mathfrak{A}(a)\to\mathfrak{A}(b)\}$$

によつて置換へられ、これは或る定つた形の式で、始源式として用ひられる。（註二）

δ) 公理に於て、a b の如き對象自由變項の代りに、全稱記號で束縛した變項を置換へ得る。例へば式

$$a=a$$

は次式

$$(x)(x=x)$$

で置換へ得る。

ε) 歸納的等式は普通に歸納的定義と呼ばれてゐるが、命名的定義とは異ることを注意せねばならぬ。

上述の形式系は整數の理論を表現し、その關係を推論するには充分であるが、次の缺點がある。卽ち算術函數を直接に表現出來ないため、それに相當する命題函數を用ひると云ふ廻道をしなければならぬ。例へば、a b の最大公約數（二變項算術函數）を表す函數の代りに、それに相當する命題函數「a b の最大公約數は c に等し」（三變項命題函數）を以てせねばならぬ。

算術函數を表すためには、論理計算の記號に更に記號 $\iota_x\mathfrak{A}(x)$ を加へ、「ところのもの」と云ふ概念を表し、次の規則（ι-規則）に從ふものとする。

もし式 $\mathfrak{A}(c)$ に對して既に

$$(Ex)\mathfrak{A}(x) \qquad (1)$$

$$(x)(y)\{\mathfrak{A}(x)\&\mathfrak{A}(y)\rightarrow x=y\} \qquad (2)$$

が證明可能のとき、$\iota_x\mathfrak{A}(x)$ を導入出來(これは $\mathfrak{A}(\xi)$ であるところの唯一の對象 ξ を表す)、且つ、

$$\mathfrak{A}\{\iota_x\mathfrak{A}(x)\}$$

が成立する。

この規則は式 $\mathfrak{A}(c)$ が變項 c の外に、補助變項として他の變項を含む場合にも妥當し、その場合には記號 $\iota_x\mathfrak{A}(x)$ は補助變項に關する算術函數を表す。

ι-規則及び完全歸納法を用ひるならば、命名的定義により、命題變函數を含む記號 $\mu_x A(x)$ の導入に成功する。この記號は、もし $A(x)$ が眞なる場合には $A(n)$ の妥當する數 n の中最小數を表し、もしかゝる數 n の存しない場合には數 0 を表す。この記號を用ひると、算術函數を直接に表現出來る。

ι-規則を含んだ形式系に對する無矛盾の問題は、ι-規則導入以前の形式系の無矛盾の問題に還元出來る。即ち ι-規則を適用しなくとも同じ結果を得ることを

證明するならば、無矛盾の問題は以前の形式系のそれに歸せられることになる。この證明の出發點はラッセル及びホワイトヘッドが嘗て注意した次の事實にある。卽ち——式 $\mathfrak{A}(c)$ で表はされる命題が(1)(2)の條件を滿す場合に、$\mathfrak{B}\{\iota_x\mathfrak{A}(x)\}$【$\mathfrak{A}(\cdot)$ の妥當する對象は同時に $\mathfrak{B}(\cdot)$ も妥當せしむ】は次式

$$(x)\{\mathfrak{A}(x)\rightarrow\mathfrak{B}(x)\}$$

或は同樣に

$$(Ex)\{\mathfrak{A}(x)\&\mathfrak{B}(x)\}$$

によつて置換へられる——と云ふ事實。

次に問題になるのは、$\iota_x\mathfrak{A}(x)$ の形の式を除去するための上述の置換が、ι-規則の入らない或道程を加へて推論の樣式を變形するのみで、推論の妥當性はもとのまゝに保存されることを證明せねばならぬ。多少の困難はあるが、この證明は出來る。

【以上述べたことによつて、第一目標であつた數の公理論の形式化に成功し、無矛盾の問題の簡易化も達したのであるが】ヒルベルトは違つた仕方で始めた。卽ちヒルベルトは最初から記號 $\varepsilon_x\mathfrak{A}(x)$ を次の公理(ε-公理)

$$A(a) \to A\{\varepsilon_x A(x)\}$$

と共に入れた。これは先に、數の理論で初めて入れた記號 $\varepsilon_x A(x)$ を更に一般にしたものと言へよう。

　吾々の形式系に於て、如何にして ε-公理が ι-規則から出て來るか、を示さう。移行は二段になされ、先づ記號 $\iota_x \mathfrak{A}(x)$ を導入する ι-規則の條件(1)(2)の中(2)を略く。かく變樣された規則に於ては、少くとも一對象に妥當する各命題 $\mathfrak{A}(c)$ に對して、夫々「$\mathfrak{A}(x)$ の妥當する或 x」を表す記號を導入することが許される。その記號を $\eta_x \mathfrak{A}(x)$ とすれば、新規則は簡單に次の圖式

$$\frac{(Ex)\mathfrak{A}(x)}{\mathfrak{A}\{\eta_x \mathfrak{A}(x)\}}$$

で示される。

　今この圖式を特別に次式に適用する。卽ち $\mathfrak{A}(c)$ として特に

$$(Ey)A(y) \to A(c)$$

を選べば、圖式の $(Ex)\mathfrak{A}(x)$ は

$$(Ex)\{(Ey)A(y) \to A(x)\}$$

になる。

　この式は普通の論理計算によつて證明可能であるから、新規則によつて記號 $\eta_x\{(Ey)A(y) \to A(x)\}$ が導入出來、これを簡單に表すため、等式

$$\varepsilon_x A(x) = \eta_x\{(Ey)A(y) \to A(x)\}$$

で定義された $\varepsilon_x A(x)$ を用ふ。今の圖式に從て

$$(Ey)A(y) \to A\{\varepsilon_x A(x)\}$$

が得られる。これは論理計算によつて

$$A(a) \to A\{\varepsilon_x A(x)\}$$

と對等 (équivalente) である。これ卽ち ε-公理である。

　同樣な還元によつて式

$$(Ex)A(x) \rightleftarrows A\{\varepsilon_x A(x)\}$$

$$(x)A(x) \rightleftarrows A\{\varepsilon_x \overline{A(x)}\}$$

が得られる。(こゝに $\mathfrak{A} \rightleftarrows \mathfrak{B}$ は $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ の二式を同時に表す)。

　この式によつて、吾々のとは違つた形式化の出發點が暗示される。事實、上式を記號 ε を使用した場合の存在及び全稱の定義と看做すことも出來る。もしかゝる觀點を許すならば、更に全稱及び存在に關する凡ての計算は ε-公理と、對象變項に式 $\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$ を代入する規則との

適用によつて行はれる。

從て、(x), (Ex)の記號は凡て除去されて、次の"modus poncno"

$$\frac{\mathfrak{S} \qquad \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}$$

以外の如何なる圖式も必要としない。論理計算は、その外に始源式と反覆と代入とによつて遂行される。

(完全歸納公理に關しては、ε-記號を用ひた場合

$$\varepsilon_x A(x) = b' \to \overline{A(b)}$$

によつて置換へられる。この式の意味は、任意の命題$\mathfrak{A}(c)$に對して、$\varepsilon_x \mathfrak{A}(x)$で表される數が0に等しいか、或はそれが$\mathfrak{A}(b)$の妥當しない様な數$b$の次數である、ことを示す)。

ヒルベルト流に論理計算をかく取扱ふことは、實際の推論には不便であるが、超數學的考察に對しては甚だ簡便である。

ヒルベルトが無矛盾の證明を試みた形式系は、かく變様された數の公理論であつたが、その後、無矛盾の問題は二つの方法による形式系に對して取扱はれた。その方法と云ふのは、一つはアッケルマンが試みた方法である。(註三)一つはアッケルマン及びフォン・ノイマンが、他の一つはアッケルマンが試みた方法である。然しこの二方法で無矛盾の證明に成功したのは、形式系の限られた範圍に於てのみである。事實、(式で表されてゐようと、圖式で表されてゐようとに關らず)完全歸納公理に或制限を附加せねばならなかつた。無矛盾の證明に充分な制限と云ふのは、例へば(束縛變項を含まぬ)初等式にしか完全歸納法の適用を許さぬ、と云ふ如きである。

吾々の形式に於てε-公理を證明し、ヒルベルト流の形式系に移行して來たが、それがために整數の公理論の無矛盾の證明に成功するとまでは行かなかつた。

然し上述のヒルベルト流の第二の方法は、エルブランの定理を可成簡單で自然に證明するに役立つ。他方、エルブランが證明したのであるが、(註四)その定理から制限された形式系の無矛盾が出て來る。この無矛盾の證明される形式系と云ふのは、先程整數の公理論の形式系に制限を附するならば無矛盾が證明されると云つた、その場合

の形式系から導出されるものである。（この結果はその中にε-形式系を含まぬ點に於て、アッケルマン及びフォン・ノイマンのものとは異つてゐる）。

（註二） 文字 $\mathfrak{A}(\cdot)$ は問題になつてゐる形式系に屬する任意の一變項式を表はすが、 $\mathfrak{A}(\cdot)$ は矢張りその形式系に屬する命題變函數である。

（註三） フォン・ノイマンの證明した形式系はヒルベルト及びアッケルマンの取扱つたものより、その範圍に於て幾分廣いが、相違はとりたてゝ述べるに及ばぬ程である。亦その取扱方に於てもアッケルマンとフォン・ノイマンの間には幾分の開きがある。

（註四） 最近ゲンツェンはこの事を別に證明してゐる。

（三） 無矛盾の證明に關するゲーデルの定理

前講演の終りに、ε-公理の方法によつては（制限を附けなければ）整數の公理論の無矛盾の證明がうまく行かぬことを述べたが、もつと一般的に、單にε-公理の方法のみでなく如何なる方法によつても、それがヒルベルトの超數學の最初のプログラムに規定された組合論的初等的推論の範圍に止る限り、無矛盾の證明には到底成功しないことがわかつて來た。

吾々はかゝる事態に面してゐることがわかつたのは、勿論一發見には違ひない。然し逆に、無矛盾の證明の問題の前途には（既に述べた如く）本質的な障害が存してゐることをゲーデルの定理は明に示した。ゲーデルはリシャールの背理の出て來る方から思付いて、その定理を推論したのである。

リシャールの背理はその多くの變形と共にラッセル・ツェルメロの背理とは異る第二型の背理群を形作つてゐる。

この二種の背理には夫々對應する二種の哲學的思想がある。卽ちプラトンのイデーの世界とライプニッツの科學的普遍的言語とである。

一方に於て、ラッセル・ツェルメロの背理はプラトニズムの徹底を拒み、他方に於て、リシャールの背理はライプニッツの思想の完全な實現を拒んでゐる。その意味は大體次の如くである。卽ち、如何なる言語でも、それが正確な表現手段である限り、數學的考察の對象となり

得る。一方、言語の表現を形作る要素とその要素間の結合の形式とは可附番的形式系を形成するのであるが、他方、數學的思考はかゝる可附番的形式系の表現の彼岸にあるものである。此處に於て、言語に正確性と普遍性とを同時に要求するならば矛盾を生ずることとなる。然し普遍の言語は適當に使用される限り、二つの要求を同時に滿足する樣に見える。この點に背理を惹起する言語の性格が現れるのである。

この背理の原型に於て問題になるのはいつも定義の可能性である。リシャールの背理を變形して證明に關する背理にすることも出來るとフィンスラーは言つたが、この變形された背理に對しても、リシャールの原背理に於ける場合と同樣、多少は詭巧な反對論を提出することが出來る。と云ふのは、リシャールの背理に就て一般に行はれてゐる意見には、その背理は言語の不正確に依存するソフィズムの背理を言廻を變へたに過ぎぬとか、背理が現れない樣にするためには言語を正確にすればよい、とか云はれてゐる。(註五)

實際、言語を正確にすれば、リシャールの推論から出る矛盾を現れない樣にすることは出來るのであるが、その結果普遍的言語をその全體性に於て構成する可能性を制限されることとなる。リシャールの背理が既にそのことを大體意味してゐるのである。

その事實を更に明瞭にしたのが、これから述べようとするゲーデルの論證である。

ゲーデルの論證を述べるに當つて、先づリシャールの背理の前提を純粹數學的前提に置換へることから始めよう。

そのために普通の言語の代りに嚴密な形式系$\mathfrak{F}$を考へる。これは超數學の對象となる如きもの、卽ち數學の或領域に於ける推論を演繹と名付る式の系列で以て表現したもので、或規則に從つて作られてゐる。この形式系$\mathfrak{F}$の規則は演繹を機械的に取扱ふことの出來るものと考ふ。と云ふ意味は、式の系列が與へられてゐる場合その形を比較して一一驗證して行けば、形式系の規則に從ふ演繹であるか否か決定出來る樣な規則と假定するのである。

形式系$\mathfrak{F}$が表現する數學の領域は唯整數の理論を含

めばよい。もつと詳細に述べれば

1、$\mathfrak{F}$に於ては數の相等關係が表現される。從て正しい數等式及び數不等式は凡て$\mathfrak{F}$の中で演繹される。

2、函數に就ては（$\mathfrak{a}$及び$\mathfrak{b}$を以前に導入された式とするとき）[註六]次の圖式

$$\mathfrak{S}\begin{cases}\varphi(0)=\mathfrak{a} & \varphi(0,c)=\mathfrak{a}(c)\\ \varphi(n+1)=\mathfrak{b}\{n,\varphi(n)\} & \varphi(n+1,c)=\mathfrak{b}\{n,c,\varphi(n,c)\}\end{cases}$$

によつて歸納的に定義された $\varphi(n)$ 或は $\varphi(n,c)$ が$\mathfrak{F}$に於て表現される。その歸納的定義の表現は次の樣にしてなされる。ψが上述の構造をもつた圖式と代入によつて定義された函數とするとき、凡ての等式

$$\psi(a,b)$$

に對して、$\mathfrak{F}$に於ては式 $\mathfrak{B}(a,b)$ が對應し、變數 a に自然數$\mathfrak{f}$を表す記號と、b には $\psi(\mathfrak{f})$ の値を表す記號を代入するとき、その式は$\mathfrak{F}$に於て演繹可能の式となる。

2、$\mathfrak{F}$は（第一階の）普通論理計算を含む。[註七]

4、完全歸納法は、それが規則として、或は始源式として、或は演繹法則としてであるかに關らず、$\mathfrak{F}$に於て表現される。

以上の條件を簡單に述べれば、$\mathfrak{F}$は整數の理論を嚴確に且つ充分に形式的に表現したものでなければならぬ。

この性質から先づ結論として、形式系$\mathfrak{F}$に關する超數學的關係が$\mathfrak{F}$に於て式によつて表現されることがわかる。[註八]先づ記號及び變項に番號が附けられる。その番號附から次の樣にして式の番號附が得られる。卽ち順次に番號

$$n_1, n_2, \ldots\ldots, n_k$$

の附けられた記號及び變項の系列からなる式には番號mを附ける。但しmを素因數分解したものは（第n番目の素數をp_rで表すとき）

$$p_1^{\,n_1}\,p_2^{\,n_2}\ldots\ldots p_k^{\,n_k}$$

で與へられる。

式の番號附から同樣な方法で式の系列の番號附が出來る。[註九]

式に附けられた凡ての番號nに就て、番號nの式を$\mathfrak{A}_n$で、もしnが式の系列に附けられてゐるならば、番號nの式の系列を$\mathfrak{B}_n$で表す。

式の中で$\mathfrak{F}$の「式」となるものがあり、式の系列の或者

は$\mathfrak{F}$に含まれて$\mathfrak{F}$の演繹となつてゐる。

$\mathfrak{F}$は嚴確な形式系であるから、$\mathfrak{F}$に關する超數學的關係の叙は上述の番號附によつて初等算術の命題に移される。特に次の叙述卽ち「mは式の系列の番號であり、nは式の番號であり、$\mathfrak{A}_m$は終結式が$\mathfrak{A}_n$である樣な演繹である」と云ふ命題は等式

$$\varepsilon(m,n)=0$$

で表される。但し$\varepsilon(\cdot,\cdot)$は圖式（$\mathfrak{S}$）及び代入によつて歸納的に定義された算術函數である。

吾々の假定では形式系$\mathfrak{F}$は整數の理論を表現出來るのであるから、等式$\varepsilon(m,n)=0$に對して$\mathfrak{F}$に於ける式が對應し、それはm n以外に自由變項を持たぬ。この式が超數學的解釋（「$\mathfrak{A}_m$は$\mathfrak{A}_n$の演繹である」）であることを示すために$\mathrm{Déd}(m,n)$或は$\mathrm{Déd}_m(\mathfrak{A}_n)$を以てする。(註一〇)

今まで得られた結果に若干の事實を附加するだけでゲーデルの論證の中心點に入る。「$\mathfrak{A}_m$は演繹であつてその終結式は$\mathfrak{A}_n$から、その中に入つてゐる自由變項aに凡て番號nを表す數字を代入して得られた式である」と云ふ叙述を考へる。

先刻考へた叙述と同樣に、これは等式

$$\chi(m,n)=0$$

で表され、$\chi(m,n)$は$\varepsilon(m,n)$と同樣に初等的函數である。形式系$\mathfrak{F}$に於て等式$\chi(m,n)=0$に對應する式を$\mathrm{Déd}^*(m,n)$で表すことも前の場合と凡て同樣である。

與へられた數字$\mathfrak{m}$ $\mathfrak{n}$に對して$\chi(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$を計算出來、$\chi(\mathfrak{m},\mathfrak{n})=0$の眞僞の決定も出來る。

形式系$\mathfrak{F}$に就ての假定によつて、第一の場合卽ち$\chi(\mathfrak{m},\mathfrak{n})=0$が眞なる場合には式$\mathrm{Déd}^*(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$が、第二の場合卽ち$\chi(\mathfrak{m},\mathfrak{n})=0$が僞なる場合には否定式$\overline{\mathrm{Déd}^*(\mathfrak{m},\mathfrak{n})}$が、$\mathfrak{F}$によつて演繹可能である。第一の場合には更に式の系列$\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}}$を構成出來、それは式$\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}}$に於て變項$a$に凡て數字$\mathfrak{n}$を代入して得る式の（$\mathfrak{F}$に於ける）演繹である。

今式

$$(\mathfrak{x})\quad \overline{\mathrm{Déd}^*(x,a)}$$

の番號を$\mathfrak{r}$とする。（卽ちその式は$\mathfrak{A}_{\mathfrak{r}}$で表される。）

與へられた數字$\mathfrak{m}$に對して等式$\chi(\mathfrak{m},\mathfrak{r})=0$が眞であると、最初に假定して見る。その場合式$\mathrm{Déd}^*(\mathfrak{m},\mathfrak{r})$は$\mathfrak{F}$に於て演繹可能であるから、式の系列$\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}}$は（$\mathfrak{A}_{\mathfrak{r}}$に

於て a に凡て $\mathfrak{f}$ を代入して得られた)式 $(x)\overline{\mathrm{Déd}^*(x,\mathfrak{f})}$ の演繹である。この終結式から $\overline{\mathrm{Déd}^*(\mathfrak{m},\mathfrak{f})}$ が出て來るから $\mathfrak{F}$ に於て矛盾が起る。形式系 $\mathfrak{F}$ が矛盾を含まぬとすれば、凡ての数字 $\mathfrak{m}$ に對して等式 $\chi(\mathfrak{m},\mathfrak{f})=0$ は僞でなければならぬ。その場合式 $\overline{\mathrm{Déd}^*(\mathfrak{m},\mathfrak{f})}$ は $\mathfrak{F}$ に於て演繹可能である。

他方に於て、同じく $\mathfrak{F}$ は矛盾を含まぬものとして、式 $(x)\overline{\mathrm{Déd}^*(x,\mathfrak{f})}$ は $\mathfrak{F}$ に於て演繹出來ぬ。何となれば、それは $\mathfrak{A}_x$ に於て a に凡て $\mathfrak{f}$ を代入して得られた式であるから。(式 $(x)\overline{\mathrm{Déd}^*(x,\mathfrak{f})}$ の演繹出來ぬことから)、例へば番號 m(式の系列の番號)の演繹があつて、式 $\mathrm{Déd}^*(\mathfrak{m},\mathfrak{f})$ が演繹可能である，それは $\mathfrak{F}$ に矛盾が存することとなる。

以上のことから次の結果が出る。形式系 $\mathfrak{F}$ が無矛盾であることを明示出來るならば、證明可能の初等算術の命題があつて、それは $\mathfrak{F}$ に於て表現はされるが演繹されない。實際吾々は凡ての数字 $\mathfrak{m}$ に對して等式 $\chi(\mathfrak{m},\mathfrak{f})=0$ が僞であることを證明したが、この定理を形式系 $\mathfrak{F}$ に於て表現する式、卽ち $(x)\ \overline{\mathrm{Déd}^*(x,\mathfrak{f})}$ は $\mathfrak{F}$ に於て演繹されなかつた。

これは重要な注目すべき結果である。然しこの講演の始めに言及したゲーデルの論證ではない。ゲーデルの結果を得るためには、論理計算及び完全歸納法を形式系 $\mathfrak{F}$ が含むといふ假定を加へて、推理の道具を更に強力なものとしてかゝらねばならぬ。

推理の過程を簡短に示すだけで充分である。函數 $\psi(m,n)$ と $\chi(m,n)$ との關係から式

$$\mathrm{Déd}^*(m,\mathfrak{f}) \to \mathrm{Déd}_m\{(x)\overline{\mathrm{Déd}^*(x,\mathfrak{f})}\}$$

(m は變數である)が $\mathfrak{F}$ に於て演繹可能である。論理計算を用ひて次式が出る。

$$(Ex)\mathrm{Déd}^*(x,\mathfrak{f}) \to (Ey)\mathrm{Déd}_y\{(x)\overline{\mathrm{Déd}^*(x,\mathfrak{f})}\} \quad (1)$$

他方、函數 $\chi(m,n)$ は圖式 $(\mathfrak{S})$ で歸納的に定義されるから、$\mathfrak{F}$ に於て次式が演繹可能である。卽ち

$$\mathrm{Déd}^*(m,\mathfrak{f}) \to (Ey)\mathrm{Déd}\{y,\zeta(m)\}$$

但し m は前とは別の變數、$\zeta(m)$ は歸納的に定義される算術函數で、数字 $\mathfrak{a}$ が與へられれば $\zeta(\mathfrak{a})$ の値は式 $\mathrm{Déd}^*(\mathfrak{a},\mathfrak{f})$ の番號である。この式から次式が出る。

$$(Ex)\mathrm{Déd}^*(x,\mathfrak{f}) \to (Ey)\,\mathrm{Déd}_y\{(x)\overline{\mathrm{Déd}^*(x,\mathfrak{f})}\} \quad (2)$$

(1)(2)の二式から

$$(Ex)\mathrm{Déd}^*(x,\mathfrak{F}) \to (Ey)\mathrm{Déd}_y(0\neq0)$$

が導かれ、更にこれから論理計算によつて

$$(x)\overline{\mathrm{Déd}_x(0\neq0)} \to (x)\overline{\mathrm{Déd}^*(x,\mathfrak{F})}$$

が出る。

この式は$\mathfrak{F}$に於て演繹可能であるから、前項が成立すれば歸結も成立つ。この前項は、形式系$\mathfrak{F}$が無矛盾であることを表現し、歸結はたつた今、形式系$\mathfrak{F}$が無矛盾でなければ$\mathfrak{F}$によつて演繹されないことを知つたその式である。

此處で次の結論が得られる。形式系$\mathfrak{F}$が無矛盾であるとすれば、$\mathfrak{F}$の無矛盾を表現する式は同じ形式系に於て演繹出來ない。

整數の理論を嚴確に且つ充分に表現する形式系、卽ち先刻の條件1、2、3、4、を滿足する任意の形式系にこの結果を應用出來る。整數の公理論は上述の四性質をもつた形式系である。實際、その形式系に於て圖式$(\mathfrak{S})$による歸納的定義は實現出來るし(條件2)その他の條件も滿足することは明かである。

整數の公理論を含み得るもつと廣い形式系、例へば解析學、或は公理的集合論、或は(還元可能公理を含んだ)"Principia Mathematica" の形式系、或はそれを簡單にした(Ramsey)の形式系は、勿論吾々の假定を滿足する具體的な形式系である。

それ等の中何れの形式系に於ても、それが無矛盾である限り、その無矛盾を確言する超數學的命題に相當する算術の定理を導き出すことは出來ぬ。

特に、整數の公理論の無矛盾を證明する推論は、整數の公理論の中に表現することは出來ない。

この結果は、整數の公理論の無矛盾を證明しようとする如何なる試みも、初等的組合論的方法によつては決して成功しない、と云ふ驚くべき事實を示すものである。

この目的を達するためには、整數の公理論の中に形式的に表現されない樣な、初等的組合論的推理を發見せねばならぬのであるが、恐らくかゝる推理は存し得ないであらう。

概觀して言へば、ヒルベルトの所謂「有限的觀點」の意味する範圍は餘りに狹小で、到底その中に證明論の課

題を遂行出來る樣な方法を發見出來ぬだらう。從て今後の問題は、超數學の目的とするところ、卽ち無矛盾の證明と云ふ目標を放棄せずに、この範圍が擴大されるかどうかにある。事實、都合よくさうなることを次に述べよう。

（註五） 然し L. Chwistek の樣な少數の數學者は最初からリシャールの背理の重要性を認めようとしてゐた。

（註六） 多くの補助變項のある場合でも唯一の補助變項の函數に還元出來る。

（註七） この條件を弱めることも出來る。例へば普通の論理計算の代りに、（排中律を含まぬ）ハイティングの論理計算を$\mathfrak{F}$が含むとすることも出來る。

（註八） 形式系は種々の型の變項を含むことが出來る。又自由變項を束縛變項から區別することも出來る。

（註九） 必ずしも凡ての數が對應するとは限らぬが、式には凡て唯一の番號が屬してゐる。式の系列に就ても同じことが妥當する。

（註一〇） この後の型で書かれてゐる場合 $\mathfrak{A}_n$ は式の一部となつて $\mathrm{Déd}_n(\mathfrak{A}_n)$ を構成してゐるのではないことを了解せねばならぬ。

（四） 整數の公理論と直觀主義の算術との關係

無矛盾の證明に關するゲーデルの一般定理は、既に知つてゐる如く、特に整數の公理論に適用される。今簡單にするためにその公理論の形式系を$\mathfrak{N}$で表さう。

$\mathfrak{N}$の記號及び變項に番號を附け、次に$\mathfrak{N}$の式、又次に$\mathfrak{N}$の式の系列に番號附けて、（$\mathfrak{N}$に關する超數學的命題を$\mathfrak{N}$の命題に飜譯し）$\mathfrak{N}$は無矛盾であると云ふ命題を表現する算術の定理が形式系$\mathfrak{N}$によつては演繹出來ない、と云ふのが吾々の得た結果であつた。

他方、算術の定理の證明は凡て、（ヒルベルトの規定した）有限的觀點の要求を滿足してゐて、$\mathfrak{N}$に於て形式的に表現出來る、と云ふ事實は種々の驗證によつて信ずべきである。

從て超數學の方法に有限的觀點を要求する限り、差當り$\mathfrak{N}$の無矛盾の證明は成功しないだらう。

かくして、超數學の目的はそのまゝ保存し、方法の方を變へて「有限的觀點」から免れる術は無いかと考求するに到つた。

ヒルベルト自身は最初如何にしてこの觀點を導き入れたかを檢べて見よう。ヒルベルトはその超數學の基本思想を取扱つた著作に於て、多分に確實性をもつた方法、假定も公理も必要としない方法、無限概念に付纏ふ困難から開放された方法として、特に整數の初等的直觀的理論を選んだのであつた。

ヒルベルトはこの樣な方法で超數學の推理を取扱はうと考へ、しかもかゝる制限を附けて問題の解決が出來ると豫想したのは、嚴確な形式系の無矛盾の證明問題は初等的整數論の問題と同じ型である樣に思つたからである。

ヒルベルトはかくして有限的觀點を導き入れ、單なる一例によつて超數學の方法を示したのであるが、これは正確な規定でなかつた。事實、有限的方法の範圍は甚だ不確實なものであつた。

有限的觀點は數學者によつて種々に解釋されたのであるが、就中フォン・ノイマン、カールマル、エルブランは、それをブラウワーの直觀主義の方法と同じものであると看做した。この解釋、卽ち直觀主義の方法として規定したことは、正しく超數學の方法にとつて必要な制限であつた。と云ふのは、直觀主義の方法の特徵は先づ第一に、無限を有限の如く取扱つたり、特に整數の全體を假定することを避けてゐるからである。

それにも拘らず、超數學の證明に於ては初等的明證を心掛ける自然の傾向として、常に直觀主義の方法より遙に狹い範圍に止つてゐる。卽ち束縛變項を使用せずに形式化される推論の範圍に止つてゐる。

この制限ために吾々は上述の困難に落入つたのである。事實、算術の定理の凡ての證明は$\mathfrak{N}$に於て表現出來る、と云ふ吾々の論題は勿論有限的觀點に適合するものであるが、然し有限的觀點を狹い意味に解した場合にしか妥當しない。

$\mathfrak{N}$に於て形式的に表現出來ない直觀主義の證明の存することを示さう。かゝる證明を求めるために先づ次の事實を反省して見る。

ゲーデルの定理によつてわかつた如く、形式系$\mathfrak{N}$の無矛盾を$\mathfrak{N}$に於て表現する式は$\mathfrak{N}$に於て演繹出來ない。然し$\mathfrak{N}$に初等的でない或歸納的定義を附加した形式系$\mathfrak{N}^*$

を用ひると演繹可能であることがわかる。例へばかゝる歸納的定義として次の圖式がある。

$$\Psi(k,o) \rightleftarrows \mathfrak{B}(k)$$

$$\Psi(k,n+1) \rightleftarrows (Ex)\{\Psi(x,n)\,\&\,\mathfrak{B}(k,x,n)\}$$

但し $\Psi(k,n)$ は定義される命題函數で、$\mathfrak{B}(k)$ 及び $\mathfrak{B}(k,x,n)$ は既知の式である。(註一二)

先づこの種の歸納的定義は形式系$\mathfrak{N}$を越えたものである。他方、かゝる歸納的定義は順序型 $\lim_{n} \alpha_n$ の順序に適用された超限歸納法を形式的に演繹する場合にも入つて來る。但し

$$\alpha_0=1,\quad \alpha_{k+1}=\omega^{\alpha_k} \qquad (k=0,1,2\cdots\cdots)$$

この順序型は整數に對しては初等的歸納的に定義される順序 $a \prec b$ によつて實現することが出來る。この順序に對する超限歸納法は式

$$(x)\{(y)(y \prec x \to A(y)) \to A(x)\} \to (x)A(x)$$

によつて表される。但しこの式に於て $A(\cdot)$ に對して形式系$\mathfrak{N}$の任意の一變項式 $\mathfrak{A}(\cdot)$ を代入出來る。

この式を演繹するためには、形式系$\mathfrak{N}$の規則の他に前述の型の歸納的定義を使用すればよい。かゝる歸納的定義を避けるには、$\mathfrak{N}$の記號の範圍を擴張し、例へば束縛命題變函數を導入して第二階の論理計算に高めるより外に道が無い樣に思はれる。

然し他方、直觀主義の數學に於てはこの式で表された超限歸納法を證明出來る。

從てこの超限歸納法を表す式が直觀主義の方法によつては證明可能であるが、$\mathfrak{N}$に於ては演繹されない特別の例と見ることが出來さうである。

かくしてゲーデルの定理に馳背することなしに、形式系$\mathfrak{N}$の無矛盾を直觀主義的に證明出來て、その證明に於て$\mathfrak{N}$によつて表されないのは上述の超限歸納法の適用のみである、と云ふことになるだらう。

現在のところそれは單なる可能に過ぎないが、然し別樣には形式系$\mathfrak{N}$の無矛盾を直觀主義の觀點から證明出來てゐる。

この證明はグリヴェンコの指摘を一般化したことに根據を置いてゐる。卽ちグリヴェンコは普通の命題計算を直觀主義の論理に相當する命題計算と比較して次の關係を認めた。卽ち、もし式 $\mathfrak{A}$ が普通の命題計算によ

つて演繹可能ならば、$\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ は直觀主義の命題計算によつて演繹可能である。又 $\overline{\mathfrak{A}}$ が普通の命題計算から出る場合に直觀主義の方からも演繹可能である。

もしこのことを直接に全論理計算に擴張出來るならば、形式系$\mathfrak{N}$の無矛盾は直ちに直觀主義の觀點で證明出來ることとなる。然るにグリヴェンコの注意した事實は全稱及び存在に關係しない場合(命題計算)にしか妥當しない。

然しグリヴェンコの定理を多少變更して、ハイティングが形式化した如く、直觀主義の算術の全領域に擴張すればよい。事實ゲンツェンは次の定理を證明した。卽ち、$\mathfrak{A}$ を形式系$\mathfrak{N}$によつて演繹可能の式とし、更に $\mathfrak{A}$ を論理記號で結合して構成してゐる各部分及び $\mathfrak{A}$ 自身に二重否定を適用して $\mathfrak{A}$ から得られる式を $\mathfrak{A}^*$ とする。然るとき $\mathfrak{A}^*$ はハイティングの直觀主義的論理計算によつて演繹可能である。

それから容易にわかることは、形式系$\mathfrak{N}$の矛盾は直觀主義の數學に於ても矛盾を惹起することである。何となれば、もし或式 $\mathfrak{A}$ があつて $\mathfrak{A}$ 及び $\overline{\mathfrak{A}}$ が $\mathfrak{N}$ に於て演繹可能なりとすれば、今述べたことによつて、$\mathfrak{A}^*$ 及び$(\overline{\mathfrak{A}})^*$がハイティングの形式系に於て演繹可能となる。然るに$(\overline{\mathfrak{A}})^*$ は卽ち$\overline{\overline{\overline{\mathfrak{A}^*}}}$で、$\overline{\overline{\overline{\mathfrak{A}^*}}}$から$\overline{\mathfrak{A}^*}$がハイティングの形式系で出て來る。従て直觀主義の論理計算に於ても矛盾が生ずることとなる。

ゲンツェンの證明に關し、何回もの否定($\mathfrak{A}^*$ の中に入つて來る)は必要がないことを注意して置く。二重否定を除去して變形すれば次の結果、卽ちゲーデルが最近到達した定理になる。卽ち

形式系$\mathfrak{N}$に於て式 $\mathfrak{A}$ の演繹が與へられてゐる。但し $\mathfrak{A}$ は次のものを全然含まぬ。

1'　命題變函數

2'　離接記號 $\vee$

3'　存在記號(Ex)

然るとき直觀主義の論理計算に於ても $\mathfrak{A}$ を演繹出來る。

事實、演繹が與へられてゐる場合、三條件に從ふ樣に命題變函數、離接記號、存在記號を除去出來る。それは夫々次の樣にすればよい。

a)　命題變函數に代入される命題定函數を豫め始源

式に代入することによつて

b) $\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}$ を $\overline{\overline{\mathfrak{B}}\,\&\,\overline{\mathfrak{C}}}$ で置換へることによつて

c) $(Ex)\mathfrak{B}(x)$ を $\overline{(x)\,\overline{\mathfrak{B}(x)}}$ で置換へることによつて

他方、形式系$\mathfrak{R}$がハイティングの形式系より多く含む式は

$$\overline{\overline{A}} \to A$$

なる論理式のみである。

與へられた演繹に於て、この式の用ひられてゐる處は凡て、演算a) b) c)によつて命題變函數も記號く及び(Ex)も含まぬ式 $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}\to\mathfrak{A}$ で置換へる。この式に於ける $\mathfrak{A}$ は凡て演算 $\&$, $\to$, $\overline{}$, (x) によつて結合された初等的等式から成立つてゐる。かゝる構造の $\mathfrak{A}$ に對しては $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}\to\mathfrak{A}$ を直觀主義の論理計算によつて演繹出來るのである、次にそれを示す。

先づ

$$\overline{\overline{\overline{a=b}}} \to a=b$$

及び一般に

$$\overline{\overline{\overline{\mathfrak{B}}}} \to \overline{\mathfrak{B}}$$

が成立する(ハイティングの形式系に於て)。

次に二式

$$\overline{\overline{\mathfrak{B}}} \to \mathfrak{B}\text{、}\ \overline{\overline{\mathfrak{C}}} \to \mathfrak{C}$$

が同時に成立するならば

$$\overline{\overline{\mathfrak{B}\&\mathfrak{C}}}\to\mathfrak{B}\&\mathfrak{C},\ \overline{\overline{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}}\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{C})$$

が演繹される。又式

$$\overline{\overline{\mathfrak{B}(a)}} \to \mathfrak{B}(a)$$

から式

$$\overline{\overline{(x)\mathfrak{B}(x)}} \to (x)\mathfrak{B}(x)$$

が出る。

これ等の演繹には

$$\mathfrak{B}\to\overline{\overline{\mathfrak{B}}},\ (\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}) \to \overline{(\overline{\mathfrak{C}}\to\overline{\mathfrak{B}})}$$

なる關係を使用して證明したのであるが、この二式は直觀主義の論理計算に於て一般に成立するものである。

これで直觀主義の論理計算に於ても式 $\mathfrak{A}$ が演繹出來ることの證明が終つた。

この定理を次の型に變へることが出來る。命題變函數を含まぬ$\mathfrak{R}$の任意の式 $\mathfrak{A}$ に、式 $\mathfrak{A}$ 即ち $\mathfrak{A}$ に於て $\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}$ の形のものは凡て $\overline{\overline{\mathfrak{B}}\,\&\,\overline{\mathfrak{C}}}$ で、$(Ex)\mathfrak{B}(x)$ の形のものは凡て $\overline{(x)\overline{\mathfrak{B}(x)}}$ で置換へた式 $\mathfrak{A}'$ を對應させて見る。

この式 $\mathfrak{A}'$ は整數の公理論に於ては式 $\mathfrak{A}'$ に對當である。何となれば形式系$\mathfrak{N}$に於て

$$\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}' \quad 及び \quad \mathfrak{A}'\to\mathfrak{A}$$

が演繹出來るから。

他方、$\mathfrak{A}'$ は上述の定理の假定に滿足してゐる。從てこの式が$\mathfrak{N}$で演繹可能ならばそれは亦直觀主義の論理計算に於ても演繹可能である。

結局、命題變函數を含まぬ式 $\mathfrak{A}$ が形式系$\mathfrak{N}$ に於て演繹可能ならば、對應する式 $\mathfrak{A}'$ が直觀主義の論理計算に於て演繹可能である。

從て、命題を單に別樣に解釋することによつて、整數の公理論から直觀主義數學の一部に移行することが出來る。

特に直觀主義の無矛盾は整數の公理論の無矛盾を示すことになる。

かくして、整數の公理論の無矛盾を證明する問題は、形式系$\mathfrak{N}$の範圍では形式的に解決されないが、又初等的組合論的方法の威力の及ぶ範圍を脱してゐる如く見えるが、もし直觀主義の或推理を添加して超數學の方法を擴張するならば、可成簡單に解決されるのである。

上述の解釋の仕方を一般化して解析學の無矛盾の證明に成功することは殆ど望まれないが、形式系$\mathfrak{N}$の無矛盾を證明したその特別な方法以外に、吾々が今考察した樣に超數學の觀點を擴張することは出來るのである。

最後にこの論文の草稿の校正を引受られたワーヴル教授及びゴンセ教授の御厚意に深甚の感謝を捧げる。

（註一一）こゝで歸納的等式でなく歸納的對等式を使用してゐるが、それは重要な點ではない。一般に歸納的等式は歸納的對等式で置換へることが出來、逆にこの場合の $\mathfrak{F}(k,n)$ を定義する歸納的對等式は、記號 & $\mathfrak{A}(x)$ 用ひて k 及び n の算術函數を定義する歸納的等式に還元出來るのである。

附言。 現世紀の初頭集合論に對して提出された種々の背理が動機となつて、數學を絶對確實な基礎の上に置かうと云ふ試みがなされたが、ヒルベルトの超數學はその一つである。先づ數學の推理を凡て形式化して所謂論理計算（命題計算、狹い意味の命題函數計算、を普通論理計算或は第一階の論理計算と呼び、それに廣い意味の命題函數計算を加へたものが第二階の論理計算である）が出來る。これに數學固有の概念

及び公理を加へて形式的數學が成立する。その數學を研究對象とするのが所謂超數學である。エルブランの言葉を借りれば、一方は數學的推理を取扱ふ (faire) のであり、他方はそれに就て語る (parler) のである。他方、ヒルベルトは先に幾何學の無矛盾を證明するに當つて、算術の無矛盾を假定してゐた。從て超數學の第一の課題は、最も初等的な整數の公理論無矛盾を證明することから始めねばならぬ。然るにこの無矛盾の證明は、ヒルベルト、アッケルマン、フォン・ノイマン、エルブラン等の種々の方法によつて追求されたが成功しなかつた。そこへ否定的豫想を含んだゲーデルの定理が提出されたのである。

こゝに譯出したベルナイスの講演はその後の研究の方向を暗示するものとして興味あるものである。これは一昨年六月ジュネーブの大學で催された國際數學會議に於ける講演で、聊か古い嫌はあるが今日まで研究發表がされてゐないから、數學基礎論の現狀と看做すことが出來よう。尚、昨年出版されたヒルベルト全集第三卷に含まれてゐる、ベルナイスの紹介論文「ヒルベルトの算術の基礎に關する研究」は、別な觀點から且つ稍々專門的に、この講演と大體同じ內容を含んでゐる。

最後に重要な文献を擧げて置く。

論理計算に關しては

黒田成勝　數學基礎論(岩波數學講座)

D. Hilbert und W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, 1928.

D. Hilbert und P. Bernays, Grundlagen der Mathematik, I, 1930.

（一） に關しては

D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 7 Aufl., 1930.

J. Herbrand, Recherches sur la Théorie de la Démonstration, 1930.

この章の後半、エルブランの基本定理を適用して眞理値 v が出るが、模型によつては眞理値 f が出る。この過程によつて何故公理系の無矛盾が證明されてゐるか不分明の點があるがこれを理解するには Entscheidungsproblem の知識が必要である。そのためには特に

Hilbert und Bernays, a. a. O. S. 129—132, S. 143—146, S. 379—381, usw.

（二） に關しては、その前半は

Hilbert und Bernays, a. a. O. § 6, § 7, § 8.

の概要であり、無矛盾の證明に就ては次のヒルベルトの著書に含まれる諸論文及びその後の研究を參照されたい。

D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Anhang.

David Hilberts Gesammelte Abhandlungen, Bd. III.

W. Ackermann, Begründung des „ tertium non datur " mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit, (Math. Ann. Bd. 93, 1924.)

J. von Neumann, Zur Hilbertschen Beweistheorie. (Math. Zeitsch. Bd. 26, 1927.)

J. Herbrand, Sur la non-contradiction de l'Arithmétique. (J. f. Math. Bd. 166, 1931.)

G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schliessen. (Math. Zeitsch. Bd. 39. Heft 2 u. 3. 1934.)

（三）　に關して、一般に背理に就ては

A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre*, 1928, § 13.

ゲーデルの定理の紹介及び原論文は

黑田成勝　數學基礎論、第四章

K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. (Mh. Math. Phys. Bd. 38. 1931.)

（四）　に關して

V. Glivenko, Sur la logique de M. Brouwer. (Bull. Acad. Sci. Belg. 1928.)

V. Glivenko, Sur quelques points de la logique de M. Brouwer (Bull. Acad. Sci. Belg. 1929.)

A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. (Sitz. -Berichte preuss. Akad. Wiss. 1930.)

A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik. (S.-B. preuss. Akad. Wiss. 1930.)

G. Gentzen, a. a. O. Abschnitt V.

K. Gödel, Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie. (Erg. math. Kolloqu. 1933 Heft 4.)

K. Gödel, Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. (Erg. math. Kolloqu. 1933 Heft 4.)

（一九三六、五、一一、）

（追記）　原稿を送つて後 Gentzen の算術の無矛盾の證明が出た、大體 Bernays が此處に豫想して居た方法によつて完成して居る。何れ紹介したいと思つて居る。