# 『多價命題計算學に就て』

ジャン・ルカシェウイッツ

近藤洋逸譯

目　次



## 第一節　樣相陳述(modale Aussagen)

三價命題計算學は、其成立を、所謂「樣相陳述」及び之と密接に結び付いた可能性と必然性の概念に就て私が與へた研究に負ふてゐる。

樣相陳述とは、次の四箇の表示の一に從つて作られてゐる陳述のことである。——

(1) $p$が可能である。　記號では $Mp$

(2) $p$が可能でない。　記號では $NMp$

(3) 非$p$が可能である。　記號では $MNp$

(4) 非$p$は可能でない。　記號では $NMNp$

文字“$p$”は此處では任意の陳述を表し、“$N$”は否定の記號(„$Np$“=„nicht-$p$“)であり、“$M$”は「…が可能である」(„es ist möglich, dass “)との言葉に對應する。「非$p$が可能でない」(„es ist nicht möglich, dass nicht-$p$“)と言ふ代りに、「$p$が必然的である」(„es ist notwendig dass $p$“)といふ語法を用ひることも出來る。①

①此等の研究に就ては私は一九二〇年六月五日、Lwów のポーランド哲學協會で報告した。之の本質的內容はポーランド雜誌„Ruch Filozoficzny“ Jahrg. V., Nr. 9, S. 169 u. 170. Lwów 1920. で發表されてゐる。

此處に擧げた表示はカントの意味の「問題的」(problematisch)及び「定言的」(apodiktisch) 判斷とは同じではない。其等表示には寧ろアリストテレスに始まる中世論理學の樣相陳述が照應する。此等は次の四箇の「樣相」(Modus)——可能 „possibile“ (例へば „Socratem currere est possibile“)、不可能 „impossibile“ 偶然„contingens“ 及び必然 „necessarium“——を用ひて作られた。今述べた四箇の樣相の他になほ中世論理學者に依つて一般に他の二箇の樣相、卽ち眞 „verum“ 及び僞 „falsum“ が擧げられた。然し此樣相はそれ以上には顧慮されなかつた。此等に照應する樣相陳述「$p$が眞である」(„es ist wahr, dass $p$“)及び「$p$が僞である」(„es ist falsch, dass $p$“)を„$p$“ 及び „$Np$“ とエキバレントであると見たからである。②

② Prantl, *Geschichte der Logik in Abendlande.* Bd. III. S. 14, Anm. 42, S. 117, Anm. 542. 參照。



「…が可能なり」(„es ist möglich, dass“)の表示は此處では定義しない。其意味は樣相陳述に對して成立する諸命題から明瞭である。

## 第二節　樣相陳述に關する諸命題

論理學史に於て我々は樣相陳述に關する三群の諸命題に遭遇する。

第一群に私は、古典論理學から傳來され、之に依つて自明的眞理として無證明のまゝおかれてゐた周知の諸命題を算へる。——

(a) Ab oportere ad esse valet consequentia.
(必然から存在へと推理が成立する。)

(b) Ab esse ad posse valet consequentia.
(存在から可能へと推理が成立する。)

——

轉位(Kontraposition)に依り(b)から第三命題を得る。

(c) Ab non poses ad non esse valet consequentia.

最後の命題の意味は——「不可能存在から非存在へと推理が成立する」(„Vom Nichtmöglichsein auf Nichtsein ist die Folgerung gültig.")である。例――素數は4で可分であることは不可能である。故に如何なる素數も4で可分ではない。此例は自明的である。そして第一群の命題の代表としようとする次の一般命題も自明的である。――

I.　$p$が可能でないときは非$p$である。

(Wenn es nicht möglich ist, dass $p$, so nicht-$p$.)

次の第二群の命題はさして知られてはゐないが同じく直觀的であるだらう。之はライプニッツに依つてTheodicée のうちに引用される。③――

(d)　Unumquodque, quando est, oportet esse.

「それが在る時には常にそれが何であらうと必然的である。」(„Was auch immer, wann es ist, ist notwendig.")この命題はアリストテレスにまでさかのぼる。彼に依れば、凡ての存在物(Seiende)が必然的であるのではなく、また凡ての非存在物(Nichtseiende)が不可能であるのではない。併しいつでも存在物が在るときにはそれは必然的でもあり、そして非存在物が存在しないときには常にそれは不可能でもある。④

③　Phil. Schriften, hrsg. v. Gerhardt, Bd. VI, S. 131.

④　De interpr. 9. 19a 23.

いま擧げた諸命題を解釋するのは容易ではない。さしあたり次に例をあげる。――

私が今晩家に居ることは必然的ではないが、然し私が既に今晩家に居るときには、この前提のもとに於ては、私が今晩家に居ることは必然的である。第二例――私が懷中無一文のことは稀にはある。然し私が(或時刻tに於て)懷中無一文であるときには、この前提のもとに於ては私が(同じ時刻tに於て)懷中に金錢を持つことは可能ではない。

此等の例に於ては二つのことを注目すべきである。――第一、陳述「私が今晩家にゐる」及び「私は(時刻tに於て)懷中無一文である」は眞なりと前提され、この前提のもとに於て夫々必然性と不可能性が推論される。第二、(d)の中の言葉 „quando" 及びアリストテレスにてそれに對應する „ὅταν" は條件的なものではなく、時間的不變詞(temporale Partikel)である。然し乍ら時間的に結合された陳述に於て時間の規定が陳述の内容に

含まれるときには、時間的なるものは條件的なるものに移行する。

なほ上記の諸例は、我々が第二群の命題の代表と考へようとする次の一般的命題を基礎付けるにも充分に明瞭である。――

**II.** 非$p$が前提されると、(此前提のもとに於ては) $p$は可能ではない (Wird vorausgesetzt, dass nicht-$p$, so ist es (unter dieser Voraussetzung) nicht möglich, dass $p$.)

第三群は唯一箇の命題から成る。之はアリストテレスの兩側可能性 (beiderseitige Möglichkeit) の概念にもとづいてゐる。兩側面に向つて可能であるところのもの、故にあり得るが然しあらねばならぬのではないところのものがアリストテレスに依ると多々ある。例へば、此着物が切裂かれることは可能ではあるが、また切裂れぬことも可能である。⑤我々はまた斯うも言ふ。――此病人が死ぬることは可能ではあるが、併し健康となり、從つて死なないことも可能である。この兩側可能性の概念は日常の思惟や言葉のうちに深く根ざしてゐる。從つて我々が再び注意しようと欲する次の命題は、前の兩命題と同様に、自明的であるやうに思はれる。――

**III.** 或$p$に對しては$p$も可能であるし、且非$p$も可能である。(Für ein gewisses $p$: es ist möglich, dass $p$, und est ist möglich, dass nicht-$p$.)

⑤ De interpr. 9. 19a. 9.

## 第三節　様相陳述に關する最初の二命題からの諸結果

上述の命題I及びIIから若干の結果をこれから引出してみよう。この目的のために上記の命題を命題計算學の記號で表はすであらう。

„$C_{pq}$“ を含意關係 (Implikation) ――「$p$ならば$q$なり」(wenn $p$, so $q$) ――の記號とする。但し、$p$及び$q$は任意の陳述を表示する。命題Iが含意關係の形式で表されることは直ちに明かである。之を私は「テーゼ」1 (These 1)と記す。⑥――

1　$CNM_pN_p$

之は「$p$が可能でないときは非$p$である」(„Wenn es

nicht möglich ist, dass $p$, so nicht-$p$.")を意味する。

⑥ テーゼのもとに私はレズニエウスキイ(Leśniewski)氏の例に從つて演繹體系の公理及び定理を考へる。

命題IIが1の逆の含意關係で表示されることはそれほど明瞭ではないが、然し證明されることが出來る。卽ち、前提"α"のもとで陳述"β"が成立すれば、これは"α"が眞であるときに"β"が眞であることにほかならぬのである。故に含意關係「αならばβなり」(„wenn α, so β")は"α"が眞なるときに成立する。ところで此含意關係は"α"が僞であるときにも成立せねばならぬから、從つてそれはいづれの場合にも成立する。斯くして次のテーゼを得る。——

2　$CN_pNM_p$

卽ち——「非$p$ならば$p$は可能ではない」(„Wenn nicht $p$, so ist es nicht möglich, dass $p$.") 他の仕方では命題IIは二價命題計算學では表示され得ない。

此等のテーゼに基いて、通常の命題計算學を基礎に置いて、若干の定理を證明しよう。次のすべての證明は嚴密に形式化されて居り、二箇の推理法則、代入(Einsetzung)と分離(Abtrennung)を用ゐて行はれる。此等の周知の推理法則に就ては此處では立入つて論じない。たゞ、形式化された證明が、私に依つて導入された記號で如何に表示されるかを明かにしたい。

各證明さるべきテーゼ——これには凡て番號が附けられてテーゼであることが知られる——の前には番號の無い列がある。之を私は證明列 Beweiszeile と呼ぶ。各證明列は記號×で分たれた二部分から成る。分離記號×の前と後の記號は同じ表示を異つた仕方で表示してゐるに過ぎない。分離記號の前では代入が與へられてゐる。之はすべて既出のテーゼに施されるのである。例へば、第一の證明列に於ては表示 „$3q/M_p$" は、3の"$q$"に"$M_p$"が代入されることを意味してゐる。此代入に依つて生ずるテーゼは證明過程では簡單のために省略されてゐる。このテーゼは次の如くである。——

3'　$CCNM_pN_pC_pM_p$

分離記號の後の表示 „C1—7" は同じテーゼ3'の構成を示す。しかも3'に分離法則が適用され得ることを明白ならしめる如き仕方で表してゐる。テーゼ3'はテーゼ

3の代入として我々の手續のうちで承認されてゐる。然しそれが含意關係であり、また之の前肢命題 Vordersatz がテーゼ1として承認されてゐるから、之から後肢命題 Nachsatz が分離されて、テーゼ7として承認され得るのである。第二の證明列の數字8は代入 „$p/N_p$" に依り7から生じたテーゼを示す。テーゼ10に屬する證明列では分離法則が二回適用される。これだけ說明すれば次の證明を理解することは讀者に何等の困難をも與へないであらうと私は信ずる。

公理として現れる兩テーゼ1及び2のほかに、なほ證明過程中には通常の命題計算學の四箇の周知の補助テーゼが出て來る。しかもそれは番號3—5で表されてゐる三箇の轉位法則 Transpositionsgesetz 及びテーゼ6なる三段論法である。すべて此等のテーゼを私は前提として證明過程の冒頭におく。

1 $CNM_pN_p$

2 $CN_pNM_p$

3 $CCN_qN_pC_{pq}$

4 $CCN_{pq}CN_{qp}$

5 $CC_pN_qC_qN_p$

6 $CC_{pq}CC_{qr}C_{pr}$

*

$3q/M_p \times C\,1-7$

7 $C_pM_p$

$7p/N_p \times 8$

8 $CN_pMN_p$

$4q/MN_p \times C8-9$

9 $CNMN_{pp}$

$6p/NMN_p,\ q/r,\ r/M_p \times C9-C7-10$

10 $CNMN_pM_p$

$4p/MN_p,\ q/M_p \times C10-11$

11 $CNM_pMN_p$

*

$3q/p,\ p/M_p \times C\,2-12$

12 $CM_pp$

$12_p/N_p \times 13$

13 $CMN_pN_p$

$5p/MN_p,\ q/p-C13-14$

14 $C_pNMN_p$

$6\,p/M_p,\ q/p,\ r/NMN_p \times C12—C14—15$

15 $CM_pNMN_p$

$5\,p/M_p,\ q/MN_p \times C15—16$

16 $CMN_pNM_p$

テーゼ7—11は1の結果であり、12—16は2から生ずる。言葉で云へば、7の語るところは——「$p$ならば$p$は可能である」(„Wenn $q$, so ist es möglich, dass $p$.")。テーゼ9の述べるところのものは——「非$p$が可能でないときは$p$である」(„Wenn es nicht möglich ist, dass nicht-$p$, so $p$.")。後のテーゼは上述の古典論理學の命題(a)に、前のテーゼは命題(b)に對應する。兩者は自明的である。一般に第一群のすべてのテーゼ7—11は自明的である。

第二群のテーゼ12—16はそれほど自明的ではない。テーゼは言ふ——「$p$が可能であるときは$p$なり」(„Wenn es möglich ist, dass $p$, so $p$.")。此テーゼを基礎とすると次のことが推論される。——病人が死ぬることは可能である、故に死ぬる。此推論を承認するものは可能存在と存在との間の差別をわきまへぬ者のみである。一般に第二群のテーゼ12—16は第一群のテーゼ7——11の夫々の逆である。兩群のテーゼを承認する者は、次の陳述$p$、「$p$が可能である」(„es ist möglich, dass $p$")及び「非$p$は可能でない」(„es ist nicht möglich, dass nicht-$p$")或は「$p$は必然的なり」(„es ist notwendig, dass $p$")とは相互にエキバレントであることを承認せねばならない。同じく、陳述非$p$、「非$p$は可能である」(„es ist möglich, dass nicht-$p$")及び「$p$は可能ではない」(„es ist nicht möglich, dass $p$")はエキバレントと見られねばならない。然し之に依つて可能性と必然性の概念は無用となる。この不都合に、我々が用ゐた命題IIの記號的定式化は導いて行く。此命題IIは言葉で云へば自明的のものであり、何等の心配もなく眞として認められ得るものである。然し命題IIを、二價命題計算學の記號の言葉にては、テーゼ1の逆を示す簡單な含意關係の形態に於て以外には表すことは私には不可能に思はれる。

## 第四節　樣相陳述に關する第三命題からの結果

第三命題の記號的定式化はいま一の不都合に導いて行く。

命題IIIは擴張された命題計算學の記號を用ゐてのみ表され得る。„Σ“を特殊量記號（„partikularer Quantifikator)〔ヒルベルトの所謂 Allzeichen（・）に相當する…譯者〕とし、„$\Sigma_p$“は「或 $p$ に對して」(„für ein gewisses $p$“) の言葉を表すとする。更に „$K_{pq}$“ を接合關係 (Konjunktion)、「$p$ 及び $q$」(„$p$ und $q$“) の記號とする。但し $p$ と $q$ とは任意の陳述を示す。すると命題IIIは次の如くに記號化される。——

17　$\Sigma_p KM_p MN_p$

之が言葉に於て意味するところのものは——「或 $p$ に對して $p$ が可能であり、及び非 $p$ が可能である」(„Für ein gewisses $p$: es ist möglich, dass $p$, und es ist möglich, dass nicht-$p$.“)。

特殊量記號 „Σ“は普遍量記號 „Π“に依つて表され得る。„$\Pi_p$“は「各 $p$ に對して」(„für ein jedes $p$“) なる文句を表し、„$\alpha(p)$“が $p$ を含む或陳述を表すとすると、次の定義は明瞭である。——

D 1　$\Sigma_{p}\alpha(p) = N\Pi_p N\alpha(p)$

D1 の意味するところのものは卽ち——表示「或 $p$ に對して $\alpha(p)$ が成立する」(„für ein gewisses $p$ (gilt) $\alpha(p)$“) が「各 $p$ に對して非 $\alpha(p)$ が成立することは眞でない」(„es ist nicht wahr, dass für ein jedes $p$ nicht-$\alpha(p)$ (gilt)“) と同意味であること、である。斯くてテーゼ17は次のテーゼに移行する。——

18　$N\Pi_p NKM_p MN_p$

扨、擴張された命題計算學のほかに、レズニエウスキイ氏に依り作られ、彼に依つてプロトテティク „Prototethetik“ と呼ばれた更に一般的な論理體系がある。⑦ しかもプロトテティクが擴張された命題計算學と特に相違するところのものは、プロトテティクでは一定のフンクトール (Funktor) 以外に可變的なるフンクトールが現れることである。

⑦ S. Leśniewski, Grundzüge eines neuen Systems der

Grundlagen der Mathematik. Einleitung und §§ I–II. Fund. Math., Bd. XIV. Warszawa 1929.

⑧ 函數 „$C_{pq}$" にて „$C$" をフンクトール (Funktor) と云ひ、$p$ と $q$ とはアーグメント (Argument) である。フンクトールの語はコタルビンスキイ (Kotarbinski) 氏に始まる。

唯一箇の陳述がアーグメントとして屬する可變フンクトールを „$\varphi$" で表す、次の命題はプロトテティクで證明することが可能である。——

$CK_{\varphi p\varphi}N_{p\varphi q}$

卽ち言葉で云へば——「$p$ に就て $\varphi$ が成立し、及び非 $p$ に就て $\varphi$ が成立すれば $\varphi$ は $q$ に就て成立する。」(„Wenn $\varphi$ von $p$ und $\varphi$ von nicht-$p$, so $\varphi$ von $q$.")

此命題は一箇のアーグメントを持つすべてのフンクトールに對して成立するから、それはフンクトール „$M$" に對しても成立する。斯くて我々は次のものを得る。——

19 $CKM_pMN_pM_q$

テーゼ18と19、及び通常の命題計算學からの二箇の補助テーゼ、卽ち既に述べた轉位法則4と、いま一つの轉位法則たるテーゼ20とは、以下に形式化された證明の前提である。此證明に於ては代入と分離の推理法則のほかに量記號の添加 (Hinzufügung des Quantifikators) なる推理法則が使用される。此推理法則は次の如くである。——一箇の是認された含意關係の後肢命題のうちに自由命題變項 (freie Aussagenvariable) があり、之が自由變項としてこの含意關係の前肢命題に含まれないならば、此含意關係の後肢命題の前に記號 „$\Pi_p$" を置くことが出來る。此推理法則は以下に於ては „$+\Pi$" を以て表す。

今、我々が行はうとする證明は前提をも合せて次の如くである。——

18 $N\Pi_pNKM_pMN_p$

19 $CKM_pMN_pM_q$

20 $CC_{pq}CN_qN_p$

*

$20p/KM_pMN_q,\ q/M_q \times C19-21$

21 $CNM_qNKM_pMN_p$

$21+\Pi\times 22$

22 $CNM_q\Pi_pNKM_pMN_p$

$4p/M_p,\ q/\Pi_pNKM_pMN_p \times C22q/p-C18-23$

23　$M_p$

目的の結果テーゼ23は眞なりと承認されねばならない。このテーゼは言葉で表せば「$p$が可能である」(„es ist möglich, dass $p$")であるが、これが任意の$p$に對して成立するのである。斯くして我々は陳述「2が素數であることは可能である」及び陳述「2が素數でないことも可能である」をも眞なりと承認しなければならない。ざつくばらんに云へば、命題IIIを基礎とすると我々はすべてのことを可能なりと承認しなければならなくなるのである。然しすべてのものが可能であれば、不可能なものはなく、必然的なものもない。何となれば、陳述„$M_p$"が承認されると、これから代入に依り陳述„$NM_p$"を得るからである。そして表示„$NM_p$"及び„$NMN_p$"は上記のものの否定として排棄されねばならなくなるからである。

　これらはすべて我々の直觀に矛盾する結果である。然し乍らこれに對して私は命題III を擴張された命題計算學の記號を用ゐてテーゼ17及び18の形態より以外に於て表示する可能性を見ないのである。



## 第五節　二價命題計算學に於ける樣相陳述に關する諸命題の矛盾

命題II とIII とを個別的に考へても既に不都合を生じたのであるから、此兩命題を一緒に考へるならば、此不都合は更にひどいものとなる。

　實際に於て、命題IIの記號化から生ずるテーゼ12をテーゼ23と結び付けると――

12　$CM_pp$

23　$M_p$

之から直ちに次のものを得る。――

12　$\times C23-24$

24　$p$

故にテーゼ12と23とが成立すれば、任意の陳述$p$も亦成立する。斯くして我々はすべての陳述から成るところの矛盾に充ちた體系を得るのである。命題IIとIIIとはテーゼ2及びテーゼ18として記號化すると合一不可能なのである。

　プロトテティクの命題を前提するテーゼ19を用ゐな

くても我々は同じ結果に到達することが出來る。以下の證明に於ては我々はたゞテーゼ12、13、20、及び通常の命題計算學の補助テーゼにのみ基礎を置いてゐる。——

25 $C_pC_{qp}$

26 $NK_pN_p$

27 $CC_{pq}CC_{rs}CK_{pr}K_{qs}$

*

$27p/M_p$ $q/p$, $r/MN_p$, $s/N_p\times C12-C13-28$

28 $CKM_pMN_pK_pN_p$

$20p/KM_pMN_p$, $q/K_pN_p\times C28-C26-29$

29 $NKM_pMN_p$

$25p/NKM_pMN\times C29-30$

30 $C_qNKM_pMN_p$

$30+\Pi\times 31$

31 $C_q\Pi_pNKM_pMN_p$

$31q/C_p$ $C_{qp}\times C25-32$

32 $\Pi_pNKM_pMN_p$

テーゼ18と32とは相互に矛盾する。

上記の證明を少し嚴密を缺くが次の如くに判り易く



することも出來よう。——命題IIIに依つて或陳述„α"に對しては表示„Mα"と„MNα"とが同時に眞であるならば、テーゼ12及び13に從つて陳述„α"及び„Nα"も同時に眞でなければならない。ところで然しこれは不可能である。何となれば、„α"と„Nα"とは互ひに矛盾するから。

此事情を考慮すると、二價の命題計算學を基礎に置けば、樣相陳述の問題を二樣の仕方で解くことが出來るであらう。——命題I及びこれと關聯してゐる第一群のテーゼ（テーゼ1及びテーゼ7—11）が無條件に是認される。それらは一度だつて問題とされなかつたのだ。命題IIとIIIとから一つのみを選び得る。命題II及びこれと關聯する第二群のテーゼ（テーゼ2及びテーゼ12—16）を採るときめると、すべての樣相陳述は非樣相陳述とエキバレントとなる。この結果、樣相陳述を論理學に導入することは甲斐なきこととなるのである。且また兩側可能性なる非常に直觀的な概念も矛盾に充ちたものとして拒否されねばならない。これに反して命題IIIを採るときめると、すべてのものが可能なりとのパラドキシカルな結果を承認することを餘儀なくされ、此條件のもとでは

陳述樣相を論理學に導入することは再び無意味である。かつまた矛盾を回避するためには自明的な命題IIをも否定しなければならない。此等のいづれの解決も充分なものではあり得ない。

他の結果を期待することは出來なかつた。このことは二價の命題計算學の體系を所謂マトリックスの方法で定義するときは、特に明かとなる。この方法を基礎としてすべての命題變項 Aussagenvariable〔命題乃至陳述を可變的と考へたものである……譯者〕はたゞ二つの一定の値を、卽ち„0“又は「僞」及び„1“又は「眞」を採り得ることが前提される。更に $C00=C01=C11=1$, $C10=0$, $N0=1$, $N1=0$ ときめられる。これらの方程式は次の目錄に記載してある。この目錄は„$C$“と„$N$“との上に築かれた二價の命題計算學のマトリックス Matrix を表す。

| $C$ | 0 | 1 | $N$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |

二價の體系に於ては一變項の相異る函數はたゞ四箇しか作られ得ない。しかも、„$\varphi$“がたゞ一箇の陳述がアーグメントとして屬するフンクトールを表示するとすれば、次の場合があらはれ得る。——(1) $\varphi0=0$ 及び $\varphi1=0$. 之を „$F_p$“ („falsum von $p$“… $p$ の僞なること)で示す。(2) $\varphi0=0$ 及び $\varphi1=1$. $\varphi p$ は $p$ とエキバレントである。(3) $\varphi0=1$ 及び $\varphi1=0$. これは $p$ の否定、„$N_p$“である。(4) $\varphi0=1$ 及び $\varphi1=1$. この函數を „$V_p$“ („verum von $p$“… $p$ の眞なること)を以て表示する。

„$M_p$“はこれらの四箇の場合の一つと同一でなければならない。ところでテーゼ1、2及び18の各々は或場合を除外する。次の諸關係があることは、„0“と„1“を用ゐて直接に檢證することに依つて容易に確信することが出來る。——

(A)

1 $CNM_pN_p$ の成立するは $M_p=p$ 又は $M_p=V_p$ に對してのみ

2 $CN_pNM_p$ の成立するは $M_p=p$ 又は $M_p=F_p$ に對してのみ

18 $N\Pi_pNKM_pMN_p$ の成立するは $M_p=V_p$ に對してのみ

次のこと——$\Pi_{p\alpha(p)} = K_{\alpha(0)\alpha(1)}$——を基礎にしてテーゼ18を檢證する。すると次のことを得る。——

$N\Pi_p NKM_p MN_p$

$= NKNKM0MN0NKM1MN1$

$= NKNKM0M1NKM1M0$

$= NKNKM0M1NKM0M1$

$= NNKM0M1 = KM0M1$

$= M1 = 1$

最後に與へられた接合關係 Konjunktion は條件 $M0 = M1 = 1$ のもとに於てのみ成立する。

比較表(A)から直ちに、テーゼ1と2が單に $M_p = p$ に對してのみ同時に成立すること、及び同じくテーゼ1と18とがたゞ $M_p = V_p$ に對してのみ成立することが判る。テーゼ2と18とは相互に融和しない。何となれば、兩テーゼを同時に眞ならしめる如き$M_p$に對する函數が存在しないからである。

## 第六節　樣相陳述と三價の命題計算學

私が一九二〇年、樣相陳述に關する在來の諸命題の相互の矛盾を知つた⑨とき丁度、私は通常の「二價の」命題計算學の體系をマトリックスの方法を用ゐて築きあげることに従事してゐた。⑩ 私はそのとき、通常の命題計算學のすべてのテーゼは、その中に含まれてゐる命題變項が二箇の値、卽ち„0“又は「僞」、及び„1“又は「眞」を採つてもいゝことを前提すれば、證明され得ることを確信した。

ところで此前提には、各陳述は眞なるか然らざれば僞であるとの原理が對應する。私はこの原理を簡單に「二價性原理」(Zweiwertigkeitssatz)と呼びたい。實際はこの原理は屢々拒中律として特色付けられる。然し、二箇の相對立する陳述は同時には僞たり得ぬと云ふ古典論理學の周知の原理のために、この後の名稱〔拒中律…譯者〕を保存しておくのがいゝと私は思ふ。

⑨ 註①で引用した報告の中で、陳述「$p$は可能なり」(„es ist möglich, dass $p$“) 及び「非$p$は可能なり」(„es ist möglich, dass nicht-$p$“) は同時に成立せねばならぬと假定することに依り、兩側可能性の概念を更に鋭く考へた。このことは最初の二群の命題と結び付けられて多樣の矛盾に導かれる。私はそのときアリストテレスの「純粹」可能性 „reine“ Möglichkeit の概念を眼中に置いた。卽ち

アリストテレスは可能性の二箇の本質的に相異つた種類を區別したやうである。即ち、本來の意味の可能性又は純粹可能性、之に依ると或ものは必然的でないときには可能である。及び非本來的意味の可能性、之は必然性と結合されて、之から（吾々のテーゼ10に依り）生ずる。參照、H. Maier, Die Syllogistik des Aristoteles, L. 1. Tübingen 1896, S. 180, 181.

⑩ 此研究の結果は私の論文 „Logika dwuwartościowa“（二價論理學）に含まれて居り、此論文はポーランドの哲學雜誌 „Przegląd Filozoficzny. Jahrg. 23（トワルドウスキイ Twardowski 教授祝賀記念號） Lwów 1921, S. 189-205 にある。

二價性の原理は深刻な、然し既に古代に於ても劇しく論爭されたところの我々の全論理學の基礎である。アリストテレスに依つて知られ、然し未來の偶然な事件に關係する陳述に對しては成立を疑問視され、エピキュール學徒に依つて確定的に拒否されて、二價性原理は始めて完全に尖鋭にクリシッポス Chrysippos 及びストイック學徒に現れたのである。しかも古代の命題計算學を代表するところの彼等の辯證論（Dialektik）の原理としてである。⑪二價性原理をめぐる論爭は哲學的背景を持つてゐる。——此命題の信奉者は徹底した決定論者であり、之に反してこの命題の反對者は不決定論的世界觀に傾いてゐる。⑫斯くて再び我々は可能性と必然性との概念の圏内に入込んでゐる。

⑪ 參照、附錄「二價性原理の歷史」（この飜譯では省略した…譯者）

⑫ 一九二二年私がワルシャウ大學の總長として行つた卒業記念講演の中で、不決定論的世界觀の問題を三價の論理學の基礎の上で解かうと試みた。この講演に加筆したものはポーランド語で印刷されて間もなく發表される。

然しこの論理學の深い原理はどうみても完全に自明であるのではないやうである。アリストテレスにまでさかのぼる古い貴重な例に基きながら、私は次の如き思惟過程に心をひそめて、二價性原理を克服しようと試みたのである。——

私が來年の一定の時に、例へば十二月二十一日の晝、ワルシャウに居ることは、現在では肯定的意味に於ても否定的意味に於ても、決定されてゐないと云ふことを、私は何等の矛盾もなく承認し得る。故に私が今述べた時刻にワルシャウに居るであらうことは可能ではあるが、

必然的ではない。この前提のもとでは、「私は來年の十二月二十一日の晝にワルシャウに居るであらう」との陳述は現在では眞でも僞でもあり得ない。何となれば、若しそれが現在に於て眞であれば、私がワルシャウに未來に於て居ることが必然的でなければならない。このことは前提に矛盾する。そしてそれが現在に於て僞であるならば、私が未來にワルシャウに居ることは不可能でなければならず、このことも同様に前提と矛盾する。故にいま考へた命題は現在では眞でも僞でもなく、„0“又は僞、及び„1“又は眞とも異つた値を持たねばならない。此値を私は$^1/_2$で表示することが出來る。「僞」及び「眞」と並んで第三の値として現れるものはまさしく「可能なるもの」である。

この思想過程に三價命題計算學はその成立を負ふてゐる。いまや論理學の新しい體系を定義し得る如き基礎となるべきマトリックスを與へなければならなつた。私が未來に於てワルシャウに居ることに關する陳述が$^1/_2$なる値を持つときには、それの否定も同じ値$^1/_2$を持つことは私には直ちに明かであつた。斯くて私は方程式$N{}^1/_2={}^1/_2$を得た。値$^1/_2$が現れる含意關係に對する五箇の方程式、卽ち $C0{}^1/_2$, $C{}^1/_2 0$, $C{}^1/_2{}^1/_2$, $C{}^1/_2 1$, $C1{}^1/_2$ がなほ規定されねばならなかつた。値$^1/_2$が現れぬ方程式を私はすべて二價の命題計算學の體系から採つて來た。同じく $N0$ 及び $N1$ に對する値も、私にとつては多かれ少かれ自明的であつたところの詳細な考察を基礎として、私は求める方程式を得た。斯樣にして、私は次に記したマトリックスに依つて定義されてゐる命題計算學の三價の體系の形成にまで遂に到達した。この體系は一九二〇年に始まる。⑬

| $C$ | $0$ | $^1/_2$ | $1$ | $N$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $1$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $^1/_2$ | $^1/_2$ | $1$ | $1$ | $^1/_2$ |
| $1$ | $0$ | $^1/_2$ | $1$ | $0$ |

⑬ この體系に就ては私は一九二〇年六月十九日のLwówのポーランド哲學協會で報告した。この報告の本質的內容は„Ruch Filozoficzny.“ Jahrg. V, Nr. 9, S. 170, Lwów 1920. にある。

## 第七節　可能性概念の定義

それから私は、此體系を基礎として、様相陳述に對して傳へられた總ての直觀的な命題を基礎付けることを可能ならしめる如き可能性概念の定義を構成しようと試みた。私はその際に、「純粹」可能性の概念を考慮に容れ、そして間もなく私を滿足させた定義を發見した。[14] 然し後に至つて、私は、純粹可能性なる狹い概念よりも可能性一般なる更に普遍的な概念を選ぶべきであるとの確信に到達した。故に前に命題Ⅰ—Ⅲに於て持ち出された諸要求に完全に照應する如き後の概念〔可能性一般…譯者〕の定義を次に述べるであらう。

⑭ 發見された定義はかなり複雜であつて次の如くであつた

D*1　$M_p = AE_pN_p\Pi_qNC_pK_qN_q$

即ち表示「$p$が可能なり」(„es ist möglich, dass $p$“)は次のことだけを意味する。——「$p$と非$p$とが相互にエキバレントであるか、然らざれば$p$から相對立する一對の陳述は如何なるものも生じない」(„Entweder sind $p$ und nicht-$p$ einander äquivalent oder es gibt kein Paar kontradiktorischer Aussagen, die aus $p$ sich ergeben.“)。

ジャン・ルカシェウイッツ『多價命題計算學に就て』„$A$“は二者擇一關係 Alternative〔ヒルベルトの所謂 Disjunktion である……譯者〕の記號、$E$はエキバレントの記號である。三價の論理學では次の定義が成立する。——

D*2　$A_{pq} = CC_{pq}q$

D*3　$K_{pq} = NAN_pN_q$

D*4　$E_{pq} = KC_{pq}C_{qp}$

「不可能性」の定義は更に明瞭である。——

D*5　$NM_p = KNE_pN_pE_qC_pK_qN_q$

即ち「$p$が不可能なり」(„es ist nicht möglich, dass $p$“)は「$p$と非$p$とは相互にエキバレントでなく、且、$p$から一對の相對立する命題が生ずる」と云ふことを意味する。

D*1から„$M$“に對して次の方程式を得る。——$M0 = 0$, $M½ = 1$, $M1 = ½$。此方程式及び三價命題計算學のマトリックスを基礎として容易に次のテーゼが立證され得る

—

(1)　$C_pC_pNMN_p$

(2)　$CN_pCN_pNM_p$

(3)　$CM_pCM_pMN_p$

(4)　$CMN_pCMN_pM_p$

(5)　$CNM_pCNM_pN_p$

(6)　$CNMN_pCNMN_{pp}$

テーゼ(5)は、承認された陳述「$\alpha$が可能でない」(„$NM\alpha$“)を基礎として命題Ⅰに從つて陳述「非$\alpha$」(„$N\alpha$“)を二

回の分離に依つて獲得させる。逆にテーゼ(2)及び命題IIに從つて、承認された陳述「非 $\alpha$」(„$N\alpha$“)を基礎として二回の分離に依り陳述「$\alpha$ は可能でない」(„$NM\alpha$“)を得る。更に、陳述「$\alpha$ が可能である」(„$M\alpha$“)及び「非 $\alpha$ が可能である」(„$MN\alpha$“) の一つが承認されると、これらの陳述の他のものもテーゼ(3)と(4)とに依つて是認されてゐなければならない。承認された陳述「$\alpha$」及び「$\alpha$ は必然的なり」からは陳述「$\alpha$ は可能なり」は推論されることは出來ない。何となれば、我々は此處では必然性と合一され得ない「純粹なる」可能性を論じてゐるからである。

此處で述べられる定義はタルスキィ (Tarski) 氏が一九二一年彼が未だワルシャウ大學の學生として私のゼミナールに參加してゐたときに發見した。タルスキィ氏の定義は次の如くである。——

D 2　$M_p = CN_{pp}$

言葉で云へば、卽ち「$p$ が可能である」(„es ist möglich, dass $p$“) は「非 $p$ ならば $p$ なり」(„wenn nicht-$p$, so $p$“) とのことだけを意味する。此定義の直觀的意味に心を移入せねばならない。表示 „$CN_{pp}$“ は、三價のマトリックスを基礎として、„$p$“が僞であるときにのみ限つて僞である。然らざれば „$CN_{pp}$“ は眞である。斯くて我々は次の方程式を得る。——



$M0=0,\qquad M{}^1\!/_2=1,\qquad M1=1$

故に或陳述 „$\alpha$“が僞であるときは、陳述「$\alpha$ が可能である」(„es ist möglich, dass $p$“)も僞である。然し „$\alpha$“が眞、又は第三の値「可能なるもの」を持つときは、陳述「$\alpha$ は可能なり」(„es ist möglich, dass $\alpha$“)は眞である。これは我々の直觀に完全によく合致する。

二價の論理學に於ては、表示 „$CN_{pp}$“ は表示 „$p$“とエキバレントである。だが三價の命題計算學では然らず。しかも二價の命題計算學に於て成立するテーゼ „$CCN_{ppp}$“ —— これは通常の命題計算學の私の體系では公理として現れる⑮ ——は三價の體系に於ては $p={}^1\!/_2$ に對しては成立しない。テーゼ „$CCN_{ppp}$“ に於てはヴァイラティ Vailati が興味深いモノグラフィを著した。⑯ これに依ると、既にユークリッドはこのテーゼを、明瞭に定式化はしてゐないが、彼の定理の證明に用ゐた。十六世紀後半のユークリッドの註釋家であり、エスイット敎團の一メンバーであり、グレゴリア暦の編者であるクラヴィウス (Clavius) が始めて上記のテーゼに彼の注意を

向けた。⑱ このとき以來、このテーゼは、教養あるエスイットの連中のなかで„consequentia mirabilis“の名稱のもとに確かな通俗性を得たものゝやうである。⑲特にテーゼ„$CCN_{ppp}$“に對して有名なエスイットであるゼロラモ・サッケリ Gerolamo Saccheri はひどく氣をひかれたので、彼はこのテーゼを基礎としてユークリッドの平行線の公準を證明しようと試みた。證明は不成功ではあつたが、サッケリは非ユークリッド幾何學の先驅者の名を得た。⑳

⑮ 參照„Elementy logiki matematycznej“(「數學的論理學の要素」私の一九二八――二九年秋期のワルシャウ大學での講義の石版印刷、M・プレスブルゲル M. Presburger 編)ワルシャウ、一九二九年、四五頁。

⑯ Seritti di G. Vailati, Leipzig-Firenze 1911. CXV. A proposito d'un passo del Teeteto e di una dimonstrazione di Euclide, S. 516-527.

⑰ 參照 Vailati, l. c. S. 518ff. ヴァイラティは上記のテーゼが純粹の形に於てゞはないが既にストイック學派に知られてゐたことを見逃してゐるやうである。

⑱ 參照 Vailati, l. c. S. 521.

⑲ 上記のテーゼに對する名稱„consequentia mirabilis“は



ポーランドのエスイットの著作中にも見える。

⑳ 參照 Vailati, l. c. CIX. Di un'opera dimentica del P. Gerolamo Saccheri („Logica demonstrativa“ 1697). S. 477-484.

テーゼ„$CCN_{ppp}$“に依ると、或陳述を„α“と呼ぶと、含意關係„$CN_{\alpha\alpha}$“が成立するときは、„α“も成立する。含意關係「非αならばαなり」(„wenn nicht-α, so α“)は表示「非αからαが歸結される」(„aus nicht-α folgt α“)と同一のことを意味しはしないが、然し含意關係なる更に普遍的な概念は、歸結する(Folgen)と云ふ更に特殊的な場合を含んでゐる。故に陳述「非α」から陳述「α」が歸結され得るならば、「α」は眞である。然しサッケリと共に「非αからαが歸結する」との事實が陳述「α」に第一眞理„prima veritas“の刻印を押すことを承認するのは正當でなからう。㉑ 反對に、テーゼ„$CCN_{ppp}$“は我々にはまさしくパラドックスの印象を與へる。このことを、その名稱„consequentia mirabilis“も暗示するやうである。たゞ一つのことが確かである。――或陳述が、それの反對物から推論され得るならば、それは確かに僞でなく、

また不可能ではない。それはまさしく可能である。このことは恰もタルスキィ氏の定義が確認してゐるところのものである。この定義は、必然性の概念の上に適用されるときは、恐らくもつと明瞭に了解されるやうになるであらう。即ちD2と相調和して次のものを得る——。

**D3** $NMN_p = NC_pN_p$

即ち——「pは必然なり」(„es ist notwendig, dass p")の意味するところのものは、「pなるときは非pであることは眞ではない」„es ist nicht wahr, dass wenn p, so nicht-p" である。故にざつくばらんに云へば、陳述„α"に就て、それが必然的であると主張され得るのは、その陳述自身の否定が自分の中に含まれてゐない ときに限るのである。

なほ上に與へた定義の直觀的性質を強く主張しなくとも、我々はとにかく、かの定義が命題I—IIIのなかで提出されたすべての要求に照應すること、しかもタルスキィ氏が證明した如くに、三價の體系に於て、かの諸條件を滿足するたゞ一つの可能なる定義であること、を承認しなければならないだらう。これから此最後の命題の



證明にとりかゝる。

## 第八節　可能性概念の定義の諸結果

定義D2を基礎として第一群のすべてのテーゼ、即ち命題Iに對應するテーゼ1、及びテーゼ7—11が證明されてゐることが先づ判る。三價の命題計算學に於ては即ち次のテーゼが成立する。——

**T 1** $C_pC_{qp}$

故に我々は次のものを得る。——

T 1 $q/N_p \times$ T2

**T 2** $C_pCN_{pp}$

T2·D2×T3

**T 3** $C_pM_p$

T2に屬する證明列に於ては、定義の右邊を左邊で代表させることを許す推理法則が用ゐられてゐる。三價の命題計算學に於ては、すべての轉位法則も三段論法の原理も正しいのであるから、我々はT3から第一群の他のすべてのテーゼを得る。すべてこれらのテーゼは完全に自明的である。

第二群のテーゼは立證されてゐない。その上に、此等のテーゼの全部が自明のものではない。然しこれ等のうち二箇——その一は命題IIに照應する——は、單純な含意關係としてゞはないが、或意味に於て成立する。卽ちD2を基礎として三價の命題計算學では次の命題——

$CpCpNMNp$ 及び $CN\,CApNMp$

が成立する。然し

$CpNMNp$ 及び $CNpNMp$

なる表示は成立しないのであるが。故に三價の命題計算學に於ては、テーゼ „$CCpCpqCpq$“ が成立せず、而してそれ故表示 „$C\alpha C\alpha\beta$“ と „$C\alpha\beta$“ とは通常の二價の命題計算學に於ての如くに相互にエキバレントであるのではないことゝなる。上述の諸命題は三價の命題計算學に於ても正しいところの次の如き補助テーゼを基礎として證明されることが出來る。——

**T 4** $CpCCpqr$

**T 5** $CpCCNNpqq$

**T 6** $CCpCpqCpCNrNq$

**T 7** $CCpCqNrCpCrNq$

*

T6$p/Np$, $q/CNpp$, $r/p\times CT4p/Np$, $q/p-T8$

**T 8** $CNpCNpNCNpp$

T8·D×T9

**T 9** $CNpCNpNMp$

T7$q/CNNpNp$, $r/p\times CT5q/Np-$T10

**T10** $CpCpNCNNpNp$

T10·D2$p/Np\times$T 11

**T11** $CpCpNMNp$

扨、陳述「非α」が承認されてゐると、これからテーゼT9に從つて二回分離を用ひることに依つて、陳述「αは可能ではない」(„es ist nicht möglich, dass α“)が生ずる。そして陳述„α“が承認されてゐるときは、これからテーゼT11に從つて同様に二回分離を用ひて陳述「非αは可能でない」(„es ist nicht möglich, dass nicht-α“)が得られる。これは「αは必然的である」(„es ist notwendig, dass α“)と云ふことである。故に次の如くに推論することが出來る。——「私は懷中無一文である。故に私が懷中に金錢を持つことは不可能である。」又は——

「私は今晩は家にゐる。故に私が今晩家にゐることは必然的である。」自明的な命題IIは妥當なものであることが證明され、しかもすべての存在物 (Seiende) が必然的であると云ふのではなく、そしてすべての非存在物 (Nichtseiende) が不可能であるのではないと云ふアリストテレスの言葉が保存される如き仕方に於てゞある。何となれば、表示 „$\alpha$“ と „$NMN\alpha$“、及び „$N\alpha$“ と „$NM\alpha$“ とは相互にエキバレントでないからである。又、可能存在から存在へと推論されることは出來ない。何となれば „$M_p$“ が „$CN_{pp}$“ と同じことを意味する限りに於ては、„$CM_{pp}$“ も、„$CM_pCM_{pp}$“ も、三價命題計算學に於て成立しないからである。

最後に、命題IIIが次のテーゼの形態に於て立證されてゐる。——即ち

T12 $\Sigma_p KM_pMN_p$

或は

T13 $N\Pi_p NKM_pMN_p$

この際、次の定義が假定される。——

D 4 $A_{pq}=CC_{pqq}$

D 5 $K_{pq}=NAN_pN_q$

テーゼ T12 及びT13 とは、三價の命題計算學のマトリックスと、前節に述べた „$M$“ の方程式とを補助にすれば最も容易に立證される。即ち $p={}^1/_2$ に對して

$$KM^1/_2MN^1/_2=K1M^1/_2=K11=1$$

を得る。故に表示 „$KM_pMN_p$“ が眞である如き $p$ の値が存在する。

上述の諸結果の總括として、今や次の命題を提出することが出來る。——

定義 „$M_p=CN_{pp}$“ を基礎に置けば、樣相陳述に對して傳へられて來たすべての命題が、三價の命題計算學に於て矛盾なく立證されてゐる。

この結果は私には非常に注目に値するやうに思はれる。可能性と必然性の概念に結び付けられた我々の直觀が、二價性の原理の上に基礎付けられた通常の論理學とは根本的に異つた論理體系を指示するかの如き樣子があるからである。

タルスキイ氏の與へた定義が、三價の命題計算學に於て、命題I—IIIにて提出された諸要求を滿足する唯一の

ものであることが未だ證明されずに殘されてゐる。この證明は容易に次の如くして行ふことが出來る。――命題Iに依り陳述 „$N M\alpha$" から陳述 „$N\alpha$" が從ふから、轉位法則を基礎として、„$\alpha$" から陳述 „$M\alpha$" も從はねばならない。故に、$\alpha=1$ であれば $M\alpha=M1=1$ である。斯くして方程式 $M1=1$ を得る。他方に於て、命題IIに從つて、陳述 „$N\alpha$" から陳述 „$N M\alpha$" が推論される。それから $\alpha=0$ 又は $N\alpha=1$ であれば、$N M\alpha=N M0=1$ である。ところで $N M0$ は此等の條件のもとでは $M0=0$ であるときのみ1に等しい。故に、第二の方程式 $M0=0$ を得る。最後に、命題IIIに依り „$\Sigma_p K M_p M N_p$" が眞でなければならない。$p=0$ 及び $p=1$ に對してはそれは眞ではない。何となれば、いづれの場合にも接合關係 Konjunktion の項の一が僞であり、從つて接合關係自身も僞でなければならぬからである。故に、$M^1/_2=1$ と假定せねばならない。何となれば、その時にのみ接合關係 „$K M_p M N_p$" が $p={}^1/_2$ に對して1に等しいからである。これで以て函數 „$M_p$" は三價の命題計算學に於て完全に規定されて居り、而して „$C N_{pp}$" 或は „$C N_{pp}$" とエキバレントな他の表示に依つてのみ定義され得るのである。

## 第九節　多價の命題計算學の體系の哲學的意味

三價の命題計算學の體系のほかに、私は一九二二年、相互に密接に結び付けられた體系の完全な組を發見した。これを私はマトリックスの方法に依つて次の如く定義した。――

„$p$"と„$q$"がインターヴァル(0―1)の或數を表すと、

$p \leqq q$ に對しては $C_{pq}=1$

$p > q$ に對しては $C_{pq}=1-p+q$

$N_q=1-p$

である。

數のインターヴァル(0―1)から端の値0と1のみが選ばれると、上記の定義は通常の二價の命題計算學のマトリックスを表示する。更に、數$^1/_2$が添加されると、三價の體系のマトリックスを得る。同樣に、3、4、5……$n$値の體系が作られ得る。

すべての多價の體系のうちで、二箇のみが哲學的意味を要求することが出來ると云ふことは、私には最初から明瞭であつた。卽ち三價及び無限價の體系である。何となれば、„0“及び„1“とから異つた値は「可能なるもの」と考へられるから、立派な理由からして、たゞ二つの場合のみが區別され得るのである。――卽ち、可能なるものが度合の差別を示さぬと假定すると、そのときは三價の體系を得る。然らざれば、度合の差別ありと假定すると、最も自然的に、確率計算に於けると同樣にして、可能なるものには無限多の度合の差別が成立することが是認され得る。これは無限價の命題計算學に導く。私は、この後の體系が他のものよりも優れてゐると、信ずる。殘念乍らこの體系は未だに精密に研究されてはゐない。特に、無限價の體系の確率計算との關係も未だに明かにされてゐないのである。㉓

㉒ 私が獨逸語で書いた小著「確率計算の論理的基礎」„Die logischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.“ Krakau 1913. Akad. d. Wiss. は確率性の概念を全く他の概念の上に基礎付けようと試みてゐる。



無限價の體系に於て、タルスキィ氏の提出した可能性の定義が假定されると、これから、三價の體系に於けると同樣に、前節に擧げられた凡てのテーゼが出て來る。故に自明的な命題I—IIIもまた無限價の命題計算學に於て立證されてゐる。

三價の體系は二價の體系の眞部分であり、同じく無限價の體系は三價の體系の眞部分である。卽ち、(量記號を持たぬ)三價及び無限價の體系のすべてのテーゼは二價の體系で成立してゐる。然し、二價の命題計算學では成立してゐるが三價の體系では成立してゐないテーゼがある。そして無限價の體系で成立しない三價の體系のテーゼがある。だが、命題計算の最もよく知られたテーゼが問題であれば、例へば„Principia mathematica“に集められてゐるテーゼを考へるならば、三價の命題計算學と無限價の命題計算學との差別は微少である。かの著作の中では私は、無限價の體系では成立してゐないで、三價の體系で成立する如き唯一箇のテーゼをも見出さぬからである。

三價及び無限價の體系で成立しない二價の命題計算

學の最も重要なテーゼは間接證明の推理法に關係する。この推理法は以前から疑はれてゐた。例へば多價の體系で成立しない次の如きテーゼを舉げていゝだらう。——„$CCN_{ppp}$", „$CC_pN_pN_p$", „$CC_{pq}CC_pN_qN_p$", „$CC_pK_qN_qN_p$", „$CC_pE_qN_qN_p$" これ等のテーゼのうち第一のものは以前に述べた。第一のものが第二のものと異るのは否定を置き換へたことだけである。その次の二箇のテーゼは、陳述 „$N\alpha$" を、これの反對物たる „$\alpha$" から相互に矛盾する陳述が導出可能であるときには、眞であるとする權利を我々に與へる。最後のテーゼに依ると、二箇の相對立する陳述のエキバレンツが從ふところの陳述は正しくないのである。 數學の中には、斯る命題計算學の三價及び無限價の體系に於ては承認されないテーゼの上に立つ推理法が存在する。 就中、所謂、集合論の「對角線の方法」はその一である。 對角線の方法に基礎付けられてゐる數學の諸定理が、命題計算學の斯るテーゼ無しにも、證明され得るか否かを研究することは興味があるだらう。

三價の命題計算學の體系は通常の命題計算學の斷片ではあるが、これらの諸體系が普遍量記號の添加に依つて擴張されるときは、事情は完全に變化する。 擴張された多價の命題計算學の體系の中には、二價の體系では成立してゐないテーゼがある。T13 は斯るテーゼの例として役立つことが出來る。T13 に於て表示 „$M_p$" を D2 に從つて „$CN_{pp}$" に依り、„$MN_p$" を „$CNN_pN_p$" に依つて置きかへると次のテーゼを得る。

T14 $N\Pi_pNKCN_{pp}CNN_pN_p$

これは二價の命題計算學では僞である。量記號を持つ命題計算學の三價の體系——これはタルスキイ及びワユスベルク Wajsberg 兩氏の研究のおかげで公理的方法に依つても表示されることが出來る——は、非ユークリッド幾何學の或體系がユークリッドのそれから相異すると同樣に、命題計算學の通常の二價の體系から相異するところの無矛盾な論理的體系の最も簡單な例である。

上述の體系は、通常の命題計算學と相異する體系であつて、直觀的な基礎を示し得る最初のものであるとの主張を私は提出してもいゝと信ずる。この報告の主要目的は、この直觀的基礎は、樣相陳述に對して成立する自明

的な命題I—IIIの中に成立してゐることの證明、を與へるところにこそあつたのである。これ等の命題は通常の論理學では矛盾なしには統一され得ないのである。ポスト(Post)氏は既に命題計算學の多價の體系を純粹に形式的な觀點から研究したが、しかも彼はそれを論理的に解釋することが出來なかつた。㉔拒中律の普遍妥當性を論駁し、其他通常の命題計算學の種々のテーゼを拒否するブロウワー(Brouwer)氏の試みは、これまでには直觀的に基礎付けられた體系にまで到達してゐない。それは未だ、その構成と意味とが全く不明瞭なまゝの體系の斷片にすぎない。㉕

私に依つて提出された命題計算學の多價の體系を「非アリストテレス的」論理學と呼ぶのは恐らく正當でなからう。アリストテレスこそまさしく二價性原理は或陳述に對しては成立し得ないであらうと言ふ思想を始めて把握したのである。この新しく生れた論理學は寧ろ非「クリシッポス的」と特色付け得るであらう。即ちクリシッポス"Chrysippos"は、各陳述は眞であるか然らざれば僞であるとの命題を充分なる意識を以て提出し、頑固に擁護をした最初の論理學者であつたやうである。そしてこのクリシッポスの命題は今日に至るまで我々の全論理學の最も深い基礎を形成してゐる。

論理學の非クリシッポス的體系の成立が如何なる影響を哲學的思索に及ぼすであらうかを豫見するは容易でない。併し、此處に示された論理學の體系の哲學的意義は、少くとも、幾何學の非ユークリッド的體系の意義と同じほど大きいものであつていゝと私には思はれるのである。



㉔ 參照 E. L. Post, Introduction to a general theory of elementary propositions. Am. Journ. of Math., Vol. XLIII, 1921. 一八二頁——「最高次元の直觀的な命題空間は2である。」

㉕ 參照 L. F. J. Brouwer, Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe. Jahresber. d. deutsch. Math.-Vereinigung, Bd. 33, 1925, S. 251ff. Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik. I. Math. Ann. Bd. 93, 1935, S. 244 ff.

追記 本稿は Jan Lukasiewicz, Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls, Comptes rendus des science de la société des sciences et des lettres de Varsovie. Clase III. XXIII. 1930. p. 51-77 の飜譯である。