量子力學に於ける觀測に就て

アインシュタイン其他

武谷三男 譯

序

現代物理學の特色は、觀測と云ふ事が特別に重要な意味を持つ事だと云ひ得るであらう。相對性原理に於て左様であつた。量子力學に於ても特にハイゼンベルグの不確定關係の發見後、觀測問題は著しい注目をひき、物理學外に於ても種々な論爭の中心になり、屢々當惑を感ずる迄に騒がれたり誤解を生んだりしたのは周知の事である。此の問題を扱つたのに次の二著がある、之等はよく引用され讀まれてゐる。

N. Bohr, Atomtheorie und Naturbeschreibung. 1931.

W. Heisenberg, The Physical Principles of the Quantum Theory. 1930.

もつとつき進んで此の問題を扱つたのに次の二著がある。

W. Pauli, Handbuch der Physik 24/1. 1933.

J. v. Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. 1932.

パウリーの著書は甚だ興味多いものであるが多少あらけづりである。ノイマンの著書は、觀測問題を論ずる者の必讀の書であり最もつき込んで扱つたものである。極めて精緻な數學的取扱により、量子力學の確率の性格、觀測の意味が論じられてゐる。前半はその爲に使用するヒルベルト空間の數學が述べてあるので數學の不得手な讀者は途中で放棄する恐れが充分あるが、第一部があまり解らなくても第二部にさして差支へないから、數學的部分に眩惑されずに意味を讀まれればよいであらう。

一昨一九三五年五月十五日の The Physical Review 誌に「物理的實在の量子力學的記述は完全と考へられ得るか?」Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? . . . A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen. と云ふ論文が載つた。此の論文にて此等の筆者達は一つの「實在の規準」を考へ、之によつて量子力學を檢討し、彼等の提出した一つの興味多い例に於て、量子力學が不完全な理論である事を結論した。その後之に直接又は間接に關聯した論文が數箇現

はれた。次に主なものを示す。

N. Bohr, Phys. Rev. 48, 696 (1935).
E. Schrödinger, Proc. Camb. Phil. Soc. 31, 555 (1935).
Naturwiss. 23, 807—812, 823—828, 844—849 (1935).
W. H. Furry, Phys. Rev. 49, 393 (1936).

それぞれ非常に興味あるものであるが、ファーリのものはノイマンの方法に從つてアインシュタイン等の問題を分析し、明瞭な解答を與へて居る。又ノイマンの方法の簡單な紹介としても役立つものである。

併し觀測問題は量子論の消極的面であつて、理論の性格を知る爲のものであらう。量子力學はその範圍に於てコンシステントなものである事は、ニュートン力學がその範圍に於てコンシステントである事と一般である。故にその範圍の中に止つてゐる觀測問題に於て如何に精緻を極めたにしてもアインシュタイン等の望む樣に新理論への飛躍は不可能であらう。

一、物理的實在の量子力學的記述は完全と考へられ得るか？

アインシュタイン、ポドルスキー、ローゼン

1.

物理學の理論に就ての考察は、それがシリアスなものなら如何なるものであつても、客觀的實在卽ち如何なる理論からも獨立してゐるもの、と理論が取扱ふ物理的諸概念、との間の區別を考へに入れなければならない。之等の諸概念は客觀的實在に對應する樣に企てられてあり、之等諸概念を用ひて吾々は吾々自身に此の實在を寫すのである。

一つの物理學理論が成功してゐるか否かを裁斷する爲に審問を行ふ事が出來る、(1)「理論は正しいか？」及び(2)「理論によつて與へられた記述は完全（complete）であるか？」。此の二つの問ひの兩方に對して肯定の答が與へられた場合にのみその理論の諸概念が滿足であると云はれる事が出來る。理論の正しさは、理論からの結論と人間の經驗との間の一致の程度によつて裁斷される。此の經驗は——之のみが我々に實在に付ての推理を行ふ事を得しめるものであるが——物理學に於ては實驗と測定と云ふ形を取る。此處で我々が量子力學に適用して考察しやうと欲するのは第二の問ひである。

完全と云ふ言葉に歸せられる意味が何であらうとも、完全な理論に對する次の要求は必要なものと思はれる、

物理的實在の總ての要素は物理學理論に對應物を持たねばならない。我々は之を完全性の條件と呼ばう。第二の問はかくて、何が物理的實在の諸要素であるかを決める事が出來次第容易に答へられる。

物理的實在の諸要素はアプリオリな哲學的考察から決める事は出來ない、かへつて實驗や測定の結果に訴へる事によつて見出さねばならない。包括的な實在の定義は併しながら吾々の目的に取つて必要ではない。我々が合理的だと考へる次の準據（criterion）は滿足的であらう。若し、一つの系を如何なる仕方に於ても擾亂する事なしに、物理的量の値を確實に(卽ち確率1で)豫測する事が出來るなら、その場合、此の物理的量に對應した物理的實在の一つの要素が存在する。此の準據は、物理的實在を認識する總ての可能な方法を盡すと云ふ事からは程遠いとしても、少くとも、かゝる方法の一つを供する樣に思へる、――それに付て設けられた諸條件が存在する場合ならいつでも。たとへ實在の必要條件でなく、單に充分條件であるとしても、此の準據は實在の古典的考へ方のみならず、量子力學的考へ方と一致するものである。

量子力學に含まれてゐる實在に付ての諸考察を説明するために一つの自由度を持つてゐる粒子の行動の量子力學的記述を考へて見やう。此の理論の基本的概念は狀態の概念である、此れは波動函數ψによつて完全に特性付けられると考へられてゐる、ψは粒子の行動を記述する樣に選ばれた變數の函數である。各物理的に可觀測な量Aに對應して一つの演算子（operator）が存在する、之は小文字で表はす。

今、ψがオペレーターAの固有函數（eigenfunction）であるなら、卽ち、若し

$$\psi' \equiv A\psi = a\psi, \qquad (1)$$

――こゝにaは一つの數である――である場合には、物理的量Aは、粒子がψで與へられる狀態にある時はいつでも、確に値aを取る。我々の實在の準據に從へば、式(1)が成立するψによつて與へられる狀態にある粒子に對しては、物理的量Aに對應する物理的實在の一要素がある事になる。例へば

$$\psi = e^{(2\pi i/h)p_0 x} \qquad (2)$$

此處にhはプランク常數、p_0は或常數、xは獨立變數、の場合である。粒子の運動量に對應するオペレターは

$$p=(h/2\pi i)\partial/\partial x \qquad (3)$$

であるから、次を得る

$$\psi'=p\psi=(h/2\pi i)\partial\psi/\partial x=p_0\psi \qquad (4)$$

卽ち、式(2)によつて與へられる狀態に於て運動量は確實にp_0なる値を持つ。かくて、式(2)で與へられる狀態にある粒子の運動量は實在であると云ふ事になる。

他面、若し式(1)が成立しないならば、も早或特定の値を持つ物理的量Aに就て云々する事は出來ない。之は、例へば、粒子の坐標に就ての場合である。之に對應するオペレター(qとする)は獨立變數を乘ずるオペレターである。卽ち、

$$q\psi=x\psi\neq a\psi \qquad (5)$$

量子力學に從へば相對的確率(relative probability)だけが意味があるので、坐標の測定に於て結果がaとbの間にある確率は、

$$P(a,b)=\int_a^b\bar{\psi}\psi\,dx=\int_a^b dx=b-a \qquad (6)$$

である。此の確立はaと無關係で、唯差$b-a$にのみ關してゐる事から、坐標の總ての値は同等に確らしい(プロバブル)事がわかる。

かくて、式(2)で與へられた狀態にある粒子に對しては、坐標の確定した値は豫測する事は出來なく、唯直接の測定によつて得られるのみである。かゝる測定は然るに粒子を擾亂し、かくしてその狀態を更へる。坐標が決定した後は、粒子はも早式(2)で與へられる狀態にはゐない。量子力學に於て此の事からの通常の結論は、粒子の運動量が知られてゐる時、その坐標は物理的實在性を持たない、である。

もつと一般的に云つて、量子力學に於て次の事が示される、二つの物理的量に各對應したオペレターA及びBが可換でない(註)。卽ち$AB\neq BA$ならば、その中の一つに就ての正確な知識は他に就てのかゝる知識を阻む事である。尚ほ又、後者を實驗的に決めやうとする如何なる試みも、前者に就ての知識を破壞する樣に系の狀態を更へることである。

此の事から次の何れかが從ふ、(1)波動函數によつて與

へられる實在の量子力學的記述は完全ではない、又は(2)二つの物理的量にそれぞれ對應する二つのオペレーターが可換でない時、此等の量は同時的に實在性を持ち得ない。何故なら、若しそれ等の兩方共が同時に實在性を持つなら——即ち確定値を——此等の値は、完全性の條件に從つて、完全な記述の中に入つて來る筈である。若しもかくの如く波動函數が實在のかゝる完全な記述を備へてゐるなら、それは之等の値を含んでゐる筈である。實際は左樣ではない、それで我々は上の何れかをとらねばならぬ事になる。

量子力學に於ては通常、波動函數がそれに對應する狀態に於ける系の物理的實在の完全な記述を含んでゐる事が假定されてゐる。一見すれば此の假定は全く合理的である、何故なら波動函數から得る事の出來る知識は系の狀態を更へる事なしに測定し得るものに正確に對應してゐる樣に見えるから。我々は、然し乍ら、此の假定が上述の準據に矛盾する事を示さう。

（譯註） 即ち位置坐標と運動量のその方向の成分のオペレーターは

$$pq\psi - qp\psi = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\cdot x\cdot\psi - x\cdot\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\psi$$
$$= \frac{h}{2\pi i}\psi$$

故に

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$$

なる交換關係を得 $pq \neq qp$ である。

2

此の目的のために今、二つの系I及IIを考へやう、此の二つの系は時刻 $t=0$ から $t=T$ まで相互作用をする事が許されてゐて、時刻 T 以後は此の二つの部分の間にも早如何なる相互作用もないと考へる。なほ此の二系の $t=0$ 以前の狀態は知られてゐるものとする。然らば吾々はシュレディンガー(Schrödinger)の式の助けによつて、結合系 I+II の狀態をその後(結合後)の如何なる時刻のものでも計算する事が出來る、特に如何なる $t>T$ に於ても。之を、それに對應する波動函數 Ψ を以て表はさう。然し乍ら、交互作用の後に於て二つの系の何れか一方が如何なる狀態にあるかを計算する事は出來ない。

之は、量子力學に從へば、それ以上の測定によつてのみ知る事が出來る、卽ち波束のレダクション reduction of the wave packet として知られてゐる過程を通してである。此の過程の本質を考へてみやう。

今、$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$が系Iに關する或物理的量$A$の固有値 eigenvalues とし、$u_1(x_1), u_2(x_2), u_3(x_3), \ldots\ldots$をそれに對應した固有函數とする、此處に$x_1$は第一の系を記述するのに使用される諸變數を代表するものとする。然らば、Ψは、x_1の函數と考へれば、次の樣に表はす事が出來る。

$$\Psi(x_1, x_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x_2)u_n(x_1), \qquad (7)$$

但しx_2は第二の系を記述するのに使用される諸變數を代表する。此處の$\psi_n(x)$はΨを直交(オーソゴナル)函數$u_n(x)$の級數に展開した時の係數を表はすだけのものと做るべきものである。今、量Aが測定されそれが値a_kを持つ事が見出されたとする。その時、第一の系は測定の後波動函數$u_k(x_1)$で與へられる狀態に殘され、第二の系は波動函數$\psi_k(x_2)$で與へられる狀態に殘される事が結論される。之が波束のレダクションの過程である、無限級數(7)で與へられてゐた波束が單獨の項$\psi_k(x_2)u_k(x_1)$にレデュースされるのである。

函數$u_n(x_1)$の組は物理的量Aの選擇によつて決定される。若し此の量の代りに他の量、例へばB、を選んだとすれば、——その固有値は$b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots$及びその固有函數は$v_1(x_1), v_2(x_1), v_3(x_1), \ldots\ldots$。——式(7)の代りに次の展開を得る事となる。

$$\Psi(x_1, x_2)=\sum_{s=1}^{\infty}\varphi_s(x_2)v_s(x_1) \qquad (8)$$

此處に各φ_sは新しい係數である。若し今、量Bが測定され値b_rを持つ事が見出されたとすれば、測定の後に第一の系は$v_r(x_1)$によつて與へられる狀態に殘され、第二の系は$\varphi_r(x_2)$によつて與へられる狀態に殘されると結論する。

それ故に、第一の系に就て行はれた二つの異つた測定の結果として第二の系は二つの異つた波動函數を持つ二つの狀態に殘され得る事がわかる。他面に於て、測定の時刻には二系はも早相互作用を行つてゐない故に、第

一の系に如何なる事を行はうとも、その結果として第二の系に實在的な變化が起り得る筈がない。此の事は、勿論、二つの系の間に交互作用がないと云ふ事の意味を陳述したに過ぎない。かくて、同一の實在（第一の系と交互作用を行つた後の第二系）に對し二つの異つた波動函數（我々の例では ψ_k と φ_r）を歸する事が可能である。

所が、二つの波動函數 ψ_k 及 φ_r が、或物理的量 P 及 Q にそれぞれ對應する二つの不可換なオペレターの固有函數である事が起り得る。之が實際に起り得る事は、一つの例によつて最もよく示す事が出來る。今二つの系が二つの粒子である場合を考へやう。そして次式の場合であるとする。

$$\Psi(x_1, x_2)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x_1-x_2+x_0)p}\,dp, \quad (9)$$

此處に x_0 は或常數である。A を第一の粒子の運動量とする、然らば式(4)でわかる樣に固有値 p に對應するその固有函數は次式で與へられることになる。

$$u_p(x_1)=e^{(2\pi i/h)px_1} \quad (10)$$

此の場合は連續スペクトルの場合であるから、式(7)は次式で與へられる。

$$\Psi(x_1, x_2)=\int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x_2)u_p(x_1)\,dp \quad (11)$$

此處に

$$\psi_p(x_2)=e^{-(2\pi i/h)(x_2-x_0)p} \quad (12)$$

此の ψ_p は然し乍ら、オペレター

$$P=(h/2\pi i)\,\partial/\partial x_2 \quad (13)$$

の固有函數で、第二の粒子の運動量の固有値 $-p$ に對應するものである。他面に於て、若し B が第一の粒子の坐標の場合には、之はその固有値 x に對應する固有函數

$$v_x(x_1)=\delta(x_1-x) \quad (14)$$

を持つてゐる。此處に $\delta(x_1-x)$ はディラックのデルタ函數 Dirac delta-function として知られてゐる函數である。式(8)は此の場合には次の樣になる、

$$\Psi(x_1, x_2)=\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(x_2)v_x(x_1)\,dx \quad (15)$$

此處に

$$\varphi_x(x_2)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x-x_2+x_0)p}\,dp$$
$$=h\delta(x-x_2+x_0) \quad (16)$$

此の φ_x は、然し乍ら、オペレター

$$Q = x_2 \qquad (17)$$

の固有函數で、第二の粒子の坐標の固有値 $x+x_0$ に對應するものである。所が

$$PQ-QP=h/2\pi i \qquad (18)$$

であるから、ψ_k 及 φ_r が、物理的量に對應した二つの不可換なオペレターの固有函數である事の一般的な可能性を示したことになる。

さて式(7)及(8)に於て考へた一般的な場合に戾つて、ψ_k 及 φ_r を、或不可換なオペレターPの及Qの固有函數でそれぞれ p_k 及 q_r に對應するものとする。かくすれば、A 又は B の何れか一方を測定する事によつて、第二の系を何ら擾亂する事なしに、量 P の値(卽ち p_k)又は量 Q の値(卽ち q_r)の一方を確實さを以て豫測し得る事になる。我々の實在の準據に從つて、第一の場合には量 P を實在の一つの要素と考へねばならない、第二の場合には、量 Q を實在の一つの要素と考へねばならない。併し、吾々が見て來た樣に、兩波動函數 ψ_k 及 φ_k は同一實在に屬してゐる。

さきに我々は次の何れか一方である事を證明した、(1)波動函數で與へられる量子力學の記述は完全でない、又は(2)二つの物理的量に對應するオペレターが不可換ならば、その二つの量は同時的に實在性を待ち得ない。それで、波動函數が物理的實在の完全な記述を與へるものであると云ふ假定から出發すれば、不可換なオペレターを持つ二つの物理的量は、同時的に實在性を持ち得ると云ふ結論に到達する。卽ち、(1)の否定は、他の唯一の掛替である(2)の否定に導く。我々はかくて波動函數による物理的實在の量子力學的記述は完全ではないと結論する事を强ひられる。

人は此の結論に對し、我々の實在の準據は充分に限定的でないと云ふ根據から反駁出來たかも知れない。勿論、二つ又はそれ以上の物理的量は、それ等が同時に測定され得る又は豫測され得る場合にのみ、實在の同時的要素と看做され得ると云ふ事を主張するならば、我々の結論には到達しない事になる。此の觀點に於ては、量 P 及 Q の何れか一方のみが豫測出來るのであつて、兩方同時にではないから、之等は同時的に實在的ではない。此の事は P 及び Q の實在性を第一の系に行つた測定の過

程に依存せしめる事になる、所が此の測定たるや第二の系を如何なる意味に於てでも擾亂しない筈のものである。かゝる事を許容する如何なる合理的な實在の定義も期待する事は出來ないであらう。

以上我々は波動函數が物理的實在の完全な記述を與へるものでない事を示した。そして、それに不拘我々はかゝる記述が存在するか否かの問題は省みなかつた。我々は、然し乍ら、かゝる理論は可能であると信ずる。

二、測定の量子力學的理論に就て

ファーリ

(I) 緒　言

しばらく前 Einstein, Podolsky 及 Rosen[1] の「物理的實在の量子力學的記述は完全と見做し得るか」と云ふ論文が現はれた。之等の筆者達は、此の問に否定的な結論を與へた。その理由は、量子力學は二つの不可換な變數の同時的な測定を禁ずる、たとへ「全く系を擾亂する事なしに」その何れをも測定出來ると云ふ意味で兩變數が同時に「物理的實在性」を持つ時でさへも、と云ふのである。最近 Bohr[2] は同時測定制限が特性上及び測定裝置使用上如何に固有のものかを示して、自然の量子力學的記述は完全と見做し得ると云ふ意見を支持した。之等の測定裝置はそこから我々の經驗が引き出される物理的なもの the physical situation の一部として常に含ませられなければならない、かくて量子力學は完全なそしてそれに固有な經驗に就ての解釋を持つて居る事が理解出來るのである。

ボーアは此の事に明瞭に注意を呼び起さしめた、そして或系が他の系と力學的に交互作用をする事を止めたからと云つて簡單にその系が「實在的な」屬性をもつた獨立した座位 independent seat だと考へない樣に注意せねばならぬ事を示した。アインシュタイン、ポドルスキー及ローゼンの論文は量子力學の此の性格が特に顯著な現れ方をする場合を示したものである。之は通常行はれて居る測定理論[3]の擴張を指示して居る。此の論文に於て測定問題をより包括的に要約し、猶進んで問題の點を具體的な物理上の言葉で説明して見やう。

我々は器械による測定の理論に就ての Neumann の[3]嚴密なそして詳細な議論に於て示された概念や結果を用ひねばならない。ノイマンの仕事の數學的用語は一般物理學者間に行きわたつて居ないから、之等諸概念の意味をより普通な用語で説明する事が望まれる。此處に用ふる重要な諸結果の證明も簡單の爲に省略して結果のみを擧げるに止めた。

註① A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, Phys. Rev. 47, 777 (1935).
今後此の事をＥＰＲ説と呼ぶ。

② N. Bohr, Phys. Rev. 48, 696 (1935).

③ W. Heisenberg, The Physical Principles of the Quantum Theory, 特に pp. 55 ff.
J. von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Chap. VI.
W. Pauli, Handbuch der Physik, Vol. 24, No. 1, pp. 143 ff., p. 165.

(II) 一つの系に就ての統計的知識の諸型

一つの系の統計的知識は總ての observable[4]（可觀測量又は觀測母量）の豫測値を與ふる事によつて常に得られる。或任意のオブザーバブル F の或狀態 state に對する豫測値は、その狀態の波動函數が φ である時次式で與へられる。

$$F=(\varphi, F\varphi). \qquad (1)$$

若し系の狀態が未知なる場合には、但し、その系が波動函數 φ_i なる狀態にある確率がそれぞれ w_i（但し $\sum_i w_i=1$）なる事を知つて居れば、F の豫測値として、各狀態[5] φ_i に對する F の豫測値の加重平均 weighted average をとらなければならない。卽ち

$$\bar{F}=\sum_i w_i(\varphi_i, F\varphi_i). \qquad (2)$$

此の F の式は今の系が多數の系の ensemble[6]（集合）の一つであつてそのアンサンブルの內、w_i に比例した數の系が狀態 φ_i にあると云ふ場合のものである。之を次の式のものと混同してはいけない。

$$\bar{F}=\Big(\sum_i (w_i)^{\frac{1}{2}}\varphi_i,\ F\sum_i (w_i)^{\frac{1}{2}}\varphi_i\Big),$$

此の式は一つの系の波動函數が φ_i の一次結合（卽ち $\sum_i (w_i)^{\frac{1}{2}}\varphi_i$）である場合のもので、此の式は(1)の型である

が(2)は之とは全く異つた型のものである。

統計的知識の表現のも一つの方法は、任意のオブザーバブルFを測定する時その固有値 eigenvalues の一つδが得られる確率を與へる事である。系が狀態φにある時此の確率は

$$|(\varphi, \chi_\delta)|^2 \qquad (1')$$

で與へられる。此處にχ_δとはFの固有値δに對する固有函數 eigenfunction である。今系が狀態φ_iにある確率がそれぞれw_iである事しか知らない場合には此の確率は次式で與へられる。

$$\sum_i w_i |(\varphi_i, \chi_\delta)|^2 \qquad (2')$$

式(2')は一般に(1')の如何なる特別な場合にも等しくない。卽ち(1')では

$$|(\sum_i (w_i)^{\frac{1}{2}} \varphi_i, \chi_\delta)|^2$$

であつて、(1')と(2')の相違は(1)と(2)の相違と同樣である。

(1)(1')の樣な式が成立する時系は「純粹狀態」"pure state" にあると呼び、その波動函數をφとする。式(2)(2')を各狀態φ_iなる系の加重w_iでの「混合」"mixture" と呼ぶ。系の統計的知識の最も一般的な型は混合によつて表される事を示す事が出來る⑦。純粹狀態は特別な場合で、或一つのw_iを除いて他が皆零である場合である。此の意味での混合が如何なる純粹狀態とも本質的に異る事はくれぐれも强調して置かねばならない。

註④ Neumann 註3、p. 163. 我々は discrete spectra の場合に限つた。(φ, ψ)はエルミット內積 Hermitian inner product $\int \varphi^* \psi \, d\tau$ の事である。A, B……の種の活字はオブザーバブル及それに相當するオペレーター Operator を表はす。

⑤ 便宜の爲屢々「波動函數ψなる狀態」と云ふ代りに「狀態ψ」と呼ぶ事にする。特に注意しない限り總て波動函數は normalized 卽ち $|\psi|^2=1$ とする。

⑥ 此の概念の有力な事は最近 Kemble によつて注目された。(Phys. Rev. 47, 973 (1935)).

⑦ Neumann 註3、pp. 167—168.

(III) 波束のレダクション

二つの系I及IIに對する波動函數を$\Psi(x_1, x_2)$とし、此の二つの系は或以前の時刻まで交互作用を行ひ、現在は交互作用を止めて居るとする。此の場合、一般に一義的な、次の樣な形での展開が常に存在する事を示す事が

出來る⑧。

$$\Psi(x_1,x_2)\left(=\sum_k (w_k)^{\frac{1}{2}}\varphi_{\lambda_k}(x_1)\xi_{\rho_k}(x_2)\right)\quad(3)$$

此處にφ_{λ_k}はオブザーバブルLの固有値λ_kに對する固有函數であり、ξ_{ρ_k}はオブザーバブルRの固有値ρ_kに對する固有函數である。各λ_kは總てお互に異り、各ρ_kも同樣である。系IIだけを注目するなら、(3)が結合系の波動函數なる時の統計的知識は各狀態ξ_{ρ_k}の加重w_kなる混合によつて表はされる事を示す事が出來る。⑨同樣な結果は勿論系Iに附ても成立する。全系に於けるL及Rの測定はLの値λ_iに對してRにρ_i以外の値は與へる事が出來ない。斯くてLの測定はRの値及系IIの狀態を豫知するに充分である、卽ちかゝる測定の後には系IIは常に純粹狀態ξ_{ρ_k}の何れかにある事になる。式(3)は、兩系の連結が、系Iを系IIのオブザーバブルRの測定に適合した測定裝置にする樣なものであつた事を示してゐる。卽ち量Lは「指針の讀み」の役目を果す事になる。

所で此等の理論展開の基礎に從つて引き出さるべき結論は、若し系IIが系Iと交互作用を止めた瞬間に系IIに「實在的」な性格を歸する場合に我々が豫期すべきまさにそのものである。此の事は後に明白な形で示さう。我々が研究せんとする矛盾は式(3)に關して與へた考察を超えて進む場合にのみ現れて來るものである。我々は展開(3)が一義的でない場合を探すか——例へばＥＰＲによつて與へられた例や(Ｖ)に於て與へる一つの例——又はもつと一般の型の展開式によつて進むかすればよい。

此の第二の場合は直接に我々を一般的な方法、「波束のレダクション reduction」の方法に導く。此の手續は一般によく知られて居り又物理學者間に受け入れられて居り、ＥＰＲに於ても使用されて居る、然し筆者は此の場合に適用された明白な形での記述を見出す事が出來なかつた。之を次に簡單に示して置かう。Ｍが系Ｉの任意のオブザーバブル、ψ_μはその固有値に對する固有函數とすれば$\Psi(x_1,x_2)$を直交函數$\psi_\mu(x_1)$の、x_2の函數を係數とする級數として次の樣に表はし得る。

$$\Psi(x_1,x_2)=\sum_\mu \psi_\mu(x_1)\zeta_\mu(x_2),\quad(4)$$

此處に、

$$\zeta_\mu(x_2)=\int\psi_\mu^*(x_1)\Psi(x_1,x_2)dx_1\quad(5)$$

系Iに於てMを測定して値μ'を得た後に系IIに就て持つであらう統計的知識は次の過程によつて得られる。波動函數が(4)の様になつて居る結合系 I+II になされた大數の測定を考へる。此の各測定は系Iに就てMの値を及び系IIに就て何か或オブザーバブルFの値を決定する事から成立して居る。此の時我々は、Mが或値μ'であつた測定のみをとつた場合のFに對して種々の値δが見出される相對的度數を得る事になる。此の相對的度數は定義から$|(\Psi(x_1, x_2), \varphi_{\mu'}(x_1)\chi_\delta(x_2))|^2$ (cf. Eq. (1))なる量に比例する。然して此の量は(5)式によつて丁度$|(\xi_{\mu'}, \chi_\delta)|^2$に等しい。此の事は總てのオブザーバブル$F$に對して正しいから、系Iの測定がMに對し値$\mu'$を與へた後、系IIは波動函數が——ノーマリゼーションを度外視して——(5)によつて與へられる純粹狀態にある事が解る。

註⑧ v. Neumann 註3、pp. 225ff. 以下「オブザーバブル」なる言葉を Dirac の本の「可換オブザーバブルの完全系 complete set of commuting observable」の意味で使用する。Dirac, Principles of Quantum Mechanics, §17 (1st edition). 同樣にかゝるオブザーバブルの組の固有値の組の事を「オブザーバブル」の「固有値」と呼ぶ事にする。

⑨ 直ぐ次を見よ。使用された波動函數は一般には波動方程式の定常解ではない。併し今の議論に於ては時間は抽象して置く事が出來る、何故なら或時刻に於ける一つの系に就ての統計的知識は、微分方程式によつて他の時刻のそれから計算する事が出來るから (v. Neumann 註3、p. 186).

⑩ ノーマライズされて居ない。そして一般にお互に直交して居ない。

(IV)　確率計算及その結果

此處に於て吾々は、力學的妨害から斷つて了つた系は獨立に實在的性質を持つと見做し得ると云ふ假設から豫期せられる結果と、量子力學の結果との間の一致や不一致の程度の詳細な議論をなす準備が出來た。何となれば我々は此の假說に明確な形を與へ得るし、また系IIを測定したとき、諸種の結果を得る確率に就てのあらゆる問に答へる一つの方法をそれを根據として與へ得るから。之を今「方法A」(Method A)と名付けやう。

假設及び方法A——二つの系が交互作用を行つて居

る間に各系は或決つた狀態に轉移したと假定する、そして現在は系Iは狀態 φ_{λ_k} の中の一つに、系IIは狀態 ξ_{ρ_k} の一つに在るとする。此等の轉移は因果的に決定して居るのでなく、適當な測定を行はない限りどの轉移が起つたかを見出す方法はない。測定を行はない場合には我々は單に諸種の轉移の確率が各 w_k であり、系Iが φ_{λ_i} にあるなら系IIは ξ_{ρ_i} にあるべき事を知るのみである。此れは確率のあらゆる必要な計算をする爲の充分な根據を提供する、その方法は普通の確率論の方法である。

方法B――方法Aの結果を量子力學の計算からの結果と、式(3)及(4)(5)と關聯して説明した諸事實を使つて、比較しやう。

解答が要求される四つの型の問がある。記號は前と同じとする、特に次の事を記憶されたい。オブザーバブル L 及 R は展開式(3)との關聯を通して特別の意味を持つて居るが、M 及 S は任意のオブザーバブルである。問及その答は次の如し。

（a）今 S の各固有値を σ 各固有函數を η_σ とする時、系Iに全然測定を行はずに、系IIに於て S を測定して結果 σ' を得る確率はいくらか？ 兩方法は同一の結果

$$\sum_k w_k |(\xi_{\rho_k}, \eta_{\sigma'})|^2, \tag{6}$$

を與へる事は明かである。（式(3)に續く説明を見よ）

（b）系Iに於て L が測定されて λ_i が得られた時系IIに於て S の値 σ' を得る確率如何？ 兩方法共直ちに次の結果を與ふる。

$$|(\xi_{\rho_i}, \eta_{\sigma'})|^2 \tag{7}$$

$S=R$ 及 $\sigma'=\rho'$ の場合には特に

$$|(\xi_{\rho_i}, \xi_{\rho'})|^2=\delta_{\rho_i\rho'} \tag{7'}$$

で、確定的な値を豫測する事が出來る。かゝる確定的豫知の可能性がEPRによつてオブザーバブル R の「物理的實在の準據」とされた。特に此の事が、假説 A が正しいと信ずる樣にする薄弱な根據である。

（C）系Iに於て M を測定して値 μ' を得た時に於て R の値 ρ_i を得る確率如何？ 少しく計算しなければならぬが省く、（d）に詳細に述べる計算に類似のものである。兩方法共次の結果を與へる。

$$w_i |(\varphi_{\lambda_i}, \psi_{\mu'})|^2 \Big/ \Big[\sum_k |(\varphi_{\lambda_k}, \psi_{\mu'})|^2\Big] \tag{8}$$

（d）系Iに於て M を測定し値 μ' を得た時IIに於て S

の値σ'を得る確率如何？

方法A――兩系の對を全く同一にしつらへたものを無數に作つて之に測定を行つて行くと、$\sum_k w_k|(\varphi_{\lambda_k}, \psi_{\mu'})|^2$なる割合で$M$に對して値$\mu'$を與へる。此の値を與へ、そして狀態$\xi_{\rho_k}$にある系IIを持つてゐるものは$w_k|(\varphi_{\lambda_k}, \psi_{\mu'})|^2$なる割合である。然らば$M$に對し値$\mu'$を$S$に對し$\sigma'$を與へるものは$\sum_k w_k|(\varphi_{\lambda_k}, \psi_{\mu'})|^2 \times |(\xi_{\rho_k}, \eta_{\sigma'})|^2$なる割合である。此の値を$M$が値$\mu'$を取る場合の割合で割れば求むるアポステリオリの確率を得る。

$$\left[\sum_k w_k|(\varphi_{\lambda_k}, \psi_{\mu'})|^2|(\xi_{\rho_k}, \eta_{\sigma'})|^2\right] \Big/ \left[\sum_k w_k|(\varphi_{\lambda_k}, \psi_{\mu'})|^2\right] \qquad (9A)$$

方法B――(5)(3)に據つて此の場合の波動函數は次の樣である、之から確率を計算しなければならない。

$$\int \psi_{\mu'}^*(x_1)\Psi(x_1, x_2)dx_1 = \sum_k (w_k)^{\frac{1}{2}}(\psi_{\mu'}, \varphi_{\lambda_k})\xi_{\rho_k}(x_2)$$

此の函數をノーマライズしてζ_σとの內積の平法を取れば求むる確率を得る。

$$\left[\left|\sum_k (w_k)^{\frac{1}{2}}(\varphi_{\lambda_k}, \psi_{\mu'})(\xi_{\rho_k}, \eta_{\sigma'})\right|^2\right] \Big/ \left[\sum_k w_k|(\varphi_{\lambda_k}, \psi_{\mu'})|^2\right] \qquad (9B)$$

此の分母はノーマリゼーションから來たのである。

(9A)と(9B)との間の不一致は諸確率振幅 probability amplitude) の間に起る有名な現象「干涉」に起因して居る。(a)の場合にはかゝる效果が現れない事が通常强調されて居る。それは測定裝置を單に附加することによつて系の行動に一般に如何なる效果を持つかのみを示したものであるからである。(d)の場合は普通述べられて居ないから、讀者に、理論は假說[11]Aと兩立すると云ふ印象を與へる可能性がある。

(9A)と(9B)の間の形式的相違は次の原因による、(4)及(5)に續いて述べた事によつて、系Iに於てMを測定して了つた後に系IIは純粹狀態卽ちξ_{ρ_k}で表はされる狀態の一つにある。しからばも早、ξ_{ρ_k}の一つ以外の他のどの純粹狀態を混合する事によつてもw_kを操縱する事は出來ない。かくて、方法Aが方法Bと兩立しないだけでなく、方法Aを如何に修正しても、方法Aと方法Bの間の辻褄を合はす事も出來ない事となる。

此處に示した矛盾は、量子力學と古典の因果性の信條との間の矛盾と同樣に單にメカニズムの個々の部分の

變革でなく、概念の根本的な變革を意味して居る。維持出來ないと思はれる考へは大ざつぱに云へば、二つの物が獨立して存在すると云ふ考へである、卽ち系IIと、系IIに就ての知識、卽ち系Iの測定によつてのみ得られるもの。量子論は之は主觀と客觀の間の十分な概念ではないと云ふ事を示す。

註⑪ Pauli 註3、p. 89. 其處に述べてある言葉は全く正しい、併し不注意な讀者には假說Aに對する偏愛に誤導されやすい。同樣な事は v. Neumann 註3 p. 232, 及び Heisenberg 註3 pp. 59—62 に述べてある言に就ても云ひ得る。

(V) 物理的例

量子力學と、假說Aにその明確な表式を見出す觀點とが兩立しない事が數學的に證明された。具體的な物理的例に於て實際に之を示し得るかどうかを猶尋ねられるであらう。何となれば正當な形式的要求[12]にも不拘、總ての數學的オペレター（演算子）が實驗的に測定出來る量に必ずしも對應するとは限らないと我々は確に考へ得るからである。

一つの例がEPRによつて數學的形式に於て示された。ボーアが注意した樣に、そして數學的に明かである樣に此の例を物理的に實際に示す事は色々の困難を含んで居る、特に實際には許されない仕方で時間を全く抽象して了ふ事が必要なのである。吾々は今、一つの例を物理的な言葉で、それに含まれて居る諸量の時間的關聯をも考へに入れて示さう。

問題の點に關する物理的例を與へる爲には次の事を充して居る場合であればそれがどんなものであつても充分であらう。卽ち、一つの系(I)は他の系(II)を觀測する測定裝置として使用される事、及兩系間の交互作用が終つた後、測定器の指針として使用されるオブザーバブル以外に、何か他のオブザーバブルが系Iに於て測定され得る事である。系IIに就て結果する諸論結は、要點に於て場合(d)のものにならう。卽ち、量子力學と假說Aの間の矛盾が明かな場合である。[13]かゝる例は疑ひもなく色々と與へる事が出來るであらう。併しながら、特に巧妙で顯著な特別な型の例がある、卽ちEPRが示した例である、そして此處に吾々が示さうと思ふ例も此の型

のものである。之を詳細に亙つて記す前に、此の種の例の性質を示し、此の例と前説の理論との關係を示さう。か丶る例の特性的な形狀（キャラクタリスティック・フィーチュアー）は、展開式(3)が一義的[11]でない場合を選ぶ事によつて得られる。假說Aの樣な形をもつた假說を、(3)の型の二つの展開式の各に對應して定める事が出來る。之等の假說の各は(6)(7)(8)又特に(7′)の形の量子力學の諸結果と兩立するものである。かくてそれ等の兩方共が、假說Aの下に橫つて居る一般的な態度に從つて、正しいとして受容れられる。それで、各假說Aは、系IIが或一定の(未知ではあるが)狀態に轉移したと主張し、又その狀態では或オブザーバブルが決定した値を取るものであると主張する。上に例として選ばれた場合に於て、系IIに對して斯くの如く課せられた二つの要求は量子力學に於ける如何なる狀態に於ても、不確定性原理による制限の故に、同時に充たされる事は出來ない。假說Aに於て表現せられた觀點は、それ故に量子力學と矛盾する事になる。

此の論議を心に置いて、例題の詳細な議論に進まう。之に於ては、數學的形式の言葉よりも實驗物理の言葉の方を使ふ事にしやう。

質量Mの重粒子、例へば陽子、の位置を「顯微鏡」で決定する場合を考へる。此の顯微鏡はγ線を使ふのでなくて、質量mの輕荷電粒子例へば電子を使ふ樣に作られてあるとする。此の顯微鏡の「筒」の壁からソフトな(卽ちエネルギーの小さい)光を照らして、「レンズ」に向つて進みつ丶ある電子によつて散亂させれば、電子の運動量[15]の橫の成分を散亂光のドップラー效果によつて計算する事が出來る。適當な事情の下では、之によつて陽子の運動量[15]を極めて正確に知り得る事になる。他面に於て、陽子の之に對應する坐標[15]を正確に知る爲には、電子の運動を途中で攪亂しない樣にして、寫眞の乾板に當てる樣にすればよい。第一の實驗に對應する「假說A」は次の如し、電子と陽子が衝突して居る間に陽子は或一定の運動量を持つて居る一つの狀態に轉移する、此の狀態は電子に測定を加へる事によつて決定する事が出來る。第二の實驗に對應するものとしては、「假說A」を、「運動量」と云ふ言葉を「坐標」と云ふ言葉に置換へて讀めば第一の場合のまゝでよい事になる。電子が顯微鏡の中

に散亂され陽子との交互作用が止んだ後に於ては、どちらの實驗を行はうと我々の自由であるから、之等の假說の基礎になつて居る觀點を承認するならば、兩假說は同時に正しくなければならない。然るに、兩方が同時に正しいと云ふ事は不確定原理と矛盾する事がわかる。

此の二つの豫測――二者選一的な――に對する不確定性の實際的表現を導き出す前に、今主として此れ等の物理的な起因を考へて見やう。原理的に云つてドップラー效果の實驗は任意の正確さに於て行ふ事が出來る。(註16の後の部分參照)。それ故に不確定 Δp は粒子の運動量に於ける初めからの不確定によつて決つてゐると見做してよい、之を小さくするには豫め左樣なる樣に準備して置かねばならぬ。所がかくの如く準備された粒子を用ふれば、x の豫測の正確さが或程度の制限を受けることになる。これは、吾々が行はうと欲する豫測は或定つた時刻にレファーしなければならない事、所が、寫眞の乾板から讀み取る x の豫測は衝突の瞬間――此の時刻は正確に知る事は出來ない、何故なら此れ等の長い一連の波が衝突して通過し合ふまで或る有限の時間を要するからである。――にレファーしてゐる事、によつて或定つた時刻と云ふのを之等の一連の波がお互に通過し切つた瞬間に選んで、その時刻に於ける豫測をしやうとすれば、此の衝突してゐる間に陽子が或距離動く事になる。此の事は積 $\Delta p\Delta x$ に最小限がある事を敎ふる。併し小質量電子は陽子が存在してゐる場所を急速に通過する一方、衝突後の陽子の運動は比較的遲いので、此の $\Delta p\Delta x$ の最小限は(量子力學の時の樣に)h でなくして、約 $(m/M)h$ となる。

此の事を示す爲に、x の豫測に於ける不確定のよつて來る可能な源を論じやう。之等は次の三つである。(1) 顯微鏡の有限な分解力、(2) 焦點の不正確、(3) 衝突の瞬間と、豫測がレファーする瞬間の間に於ける陽子の運動の可能。

(1) 有限な分解力、之は次の不確定を與へる

$$\Delta x \sim (\lambda/\varepsilon) \sim (h/p\varepsilon), \qquad (10)$$

此處に ε は顯微鏡の穴の口徑であり、λ 及 p は電子の波長及び運動量である。

(2) 焦點の不正確。電子[17]を幅 s の細隙を通して入らし

める。視野の遠い例では廻折のために、電子線の幅は$(s/2)+(D\lambda/2s)$となる、此處にLは視野の廣さである。sを適當に選ぶと、此れは最小値$(\lambda L)^{\frac{1}{2}}$を取る。所で$L$は$(h/\Delta p)$卽ち此の一連の波の全體の長さに等しくなければならない、然らざれば、視野の制限によつて、散亂された波の廻折が大きくなつて、行はんとしたドップラー效果の實驗の意味をぶちこわして了ふ樣になる。かくて、此の原因によるxの不確定に對し次を得る。

$$\Delta_2 x\sim\varepsilon(\lambda h/\Delta p)^{\frac{1}{2}}=\varepsilon h/(p\Delta p)^{\frac{1}{2}} \qquad (11)$$

(3)陽子の運動の許容。次の程度の時間に於ける陽子の運動を考へに入れればよい。

$$\Delta t\sim(h/\Delta p)/(p/m),$$

卽ち、電子がその波の連りの一番長い部分の長さを以て通過する時間である。衝突後の陽子の速度を出來るだけ小さくする爲には、視野の中に二つの等しい大きさで逆向きの運動量を持つた粒子を送り込めばよい。さうすれば、電子が直角の方向に散亂された場合、陽子の速度の成分は零となる。併し孔の大きさが有限だから大體に於て次の大きさを見て置かねばならない。

$$v'_x\sim\varepsilon(p/M).$$

それで次の式を得る。

$$\Delta_3 x\sim v'_x\Delta t\sim\varepsilon(m/M)(h/\Delta p) \qquad (12)$$

以上の事から次の結果に達する。

$$\Delta p\Delta x\sim\Delta p(\Delta_1 x+\Delta_2 x+\Delta_3 x)$$
$$\sim h\{(\Delta p/\varepsilon p)+\varepsilon(\Delta p/p)^{\frac{1}{2}}+\varepsilon(m/M)\} \qquad (13)$$

Δpをpに比して甚だ小さくすれば、次の樣にする事が出來る。

$$\Delta p\Delta x\sim(m/M)h \qquad (14)$$

此の際εをも小くする事によつて原理的に云つて$\Delta p\Delta x$を任意に小さくする事が出來る。卽ち此等二粒子の質量の差異を使はなくても之を原理的に任意に小さくし得る事になる。

例に於て豫備的に論じた以上の說明に於て、(14)の如き結果を不確定原理に比較する事によつて、假說Aが量子力學と兩立しない事がわかる。

結　論

數學的論證と思考實驗の論議との兩方によつて、他の系との力學的交互作用から離れた一つの系が獨立した實在的性質を持つと云ふ假說が量子力學と矛盾するものである事がわかる。此の結論は、一つの系とそれを觀測する手段とが、古典理論で考へられてゐたより、もつと微妙にそして密接に關係してゐる事を看過してはならぬ事を意味してゐる。此の事は決して、量子力學が經驗を取扱つたり記述したりする爲の充分な方法と看做さるべきでないと云ふ事を意味するものではないのである。之は、ボーアによつて屢〻注目された主觀と客觀の間の區別の問題に固有な困難の內容を說明するものである。

註⑫ v. Neumann 註3 pp. 75 ff.

⑬ 例へば以下論議する例も此の方法で述べる事が出來たであらう。併し、かゝる例を造つたり論議したりする場合、次の事によつて困難が起つて來る、實際の實驗の場合に使用される諸オブザーバブルは殆ど常に不完全(註⑧)である事、そして不完全オブザーバブルの測定の理論は全く曖昧さをまぬかれるわけにいかない事である (cf. v. Neumann 註3 pp. 184—185)。此の理由によつて、以下使用した方法による事が、此の例——之はそれ自身不完全オブザーバブルの使用を含んでゐる——を扱ふ爲の遙に容易であり、より滿足な方法である。

⑭ 此の爲の條件は w_k が總ては異つてゐない事である (cf. v. Neumann 註3 p. 232 and p. 175)。EPRの例に於ては w_k は全部等しく、そして系Ⅱの全狀態が含まれてゐる。之は、(2)の形の種々の展開が無限にある事、及び任意な測定を行ふ場合、或結果も他の如何なる結果も同等に可能だと云ふ事を意味する。量子力學に於ける測定は一般に二重の局面を持つてゐる。第一に測定をする以前に、その系の狀態の諸性質に就ての(統計的な)知識を與へる事である、第二に、測定の後に於ける系の狀態を豫測する事を得しめる事である。第一の目的に適する爲には對象と測定裝置の結合を適當に選ぶ樣に注意しなければならぬ。EPRの例に於ては結合が烈しすぎるので、系Ⅱの最初の狀態は全然あとに影響を殘してゐない。それで「豫測」と云ふ言葉は系Ⅱに就ての結論に適用されてのみ正しい事になる。

⑮ 卽ち顯微鏡の軸に對して橫(直角)のものである。運動量の此の成分の事を簡單に「運動量」と呼び、之に相等する坐標の事を「坐標」x と呼ぶ事にしやう。

⑯ 勿論電子は必ずしも顯微鏡の中に散亂される必要はない。併し都合のよい場合のみ我々は實驗に就て行ひ得る、即ち顯微鏡の中に散亂される事を希望するのである。實驗は失敗する事もあり得る、或場合に或選擇によつて成功したからと云つて、量子力學は上の場合に他の選擇をすれば成功しただらうと云ふ推論を勿論與へはしない。併し特殊の諸事情の下に、假說Aの見地からかゝる推論が從ふ。要求される諸事情とは次である、即ちドップラー效果の實驗に於て「電子が筒中にある場合には」確實に光子の數個が充分小さな立體角の中に散亂される爲に充分な多くの光子を送り込む事である。光子の非常に多くを散亂しても此の電子の運動量が餘り變らない爲に送り込む光子は極端に軟い(エネルギーの低い)ものでなければならない、そして此等の光子のエネルギーは非常に正確に測定されればならぬ。此の事は、電子が長時間筒の中に居る事を意味する。從て次が結果する、式(14)で表はされた正確さを護る爲には、顯微鏡の長さは $(M/m)^{11/3}\Delta x$ より大でなければならぬ、そして又、光源と光のアナライザーの距離は $(M/m)^{11/3}\Delta x$ より遙かに大でなければならない。之等の要求は、原理的に困難をもたらさない。

⑰ 一つの線だけが狹ければよい。(3)に於て電子と陽子の波長を最初に等しくして置けば便利な事がわかる。左樣すれば $\Delta_2 x$ はどちらの線を制限した場合も同じである。陽子をsより廣い細隙から入らしめることによつて、充分大きい角に散亂された電子以外は確實に逃がしてしまう事が出來る。かくして隙の效果が卓越するのを防止出來る。