自然數論の無矛盾性證明

——G・ゲンツェンの業績——

近藤洋逸

一

所謂「數學基礎論」はライプニッツの傳統をひき乍ら旣に十九世紀來、ブール Boole, フレーゲ Frege, ペアノ Peano 等の努力に依つて確立し、主として數學の基礎概念、推理の分析、公理系の樹立をその課題としたが、前世紀末から二十世紀初頭にかけて、ラッセル Russell, ブラリ・フォルティ Burali-Forti, リシャル Richard等に依つて、科學的嚴密のシンボルとも云ふべき數學の體系そのものの裡に（主として集合論のうちに）、奇怪にも多數のパラドックスが發見されたのは熟知のことであらう。それ以來、基礎論の中心的課題として新しく數學の公理系の無矛盾性の證明が提出され、基礎論は謂はば救世主的任務を負はされた。だが果して所謂「基礎論」がこの任に耐へ得るや否や。また、謂ふところのパラドックスとは何か。——これらの疑問を先づ考へるべきであらう。このパラドックス問題を契機として多くの流派が基礎論のうちに形成された。概念のタイプとオーダーの理論に依り數學の論理化を主張するラッセルの論理主義派、自然數列の直觀を出發點として構成的方法を墨守するブロウワー、ワイル等の直觀主義、それに、數學、論理の體系を完全に記號化して此記號そのものを對象としてかの體系の性質を論究する所謂「超數論」又は「證明論」(Metamathematik oder Beweistheorie)に據るヒルベルト學派がある。

ところで、ラッセルのタイプ・オーダーの理論は周知の如く數學の體系を分裂せしめ、體系の全般にわたる統一的方法の不可能に陷る困難があり、この困難を救ふためにのみ案出されたのが、かの不評の高い「還元可能の公理」である。この「公理」に關しては論理主義學派自身のうちにも意見の相違があり、若くして逝つたラムゼイ(R. P. Ramsay)の如きはこの公理を除去して、弱い意味のタイプの理論のみに據つて數學の體系を論究してゐる。然しこのために彼は實無限を要請せざるを得なかつた。

直觀主義の難點は、理論の發足點を自然數集合に、方法を純構成的方法にのみ制限するところから必然的に濃度(Mächtigkeit)の高い對象を扱ふ部門(例へば實數複素數を領域とする數學解析とか、超可附番の集合を論ずる集合論)の基礎付けに多大の、殆んど致命的とも云ふべき困難に逢着してゐるところにある。彼等の特色(或ひは缺陷とも云へる)の一つは、所謂 nichtprädikatives Verfahren (或集合のエレメントの存在乃至性質を、それの屬すべき集合をもつて規定する方法である。以下

簡單にNPVと記す。）の禁止である。このことに依つて、自然數の體系と實數の體系とのスムースな連結が人工的に絕ち切られるのである。だが果してNPVは、ブロウワーの云々する如くに、しかく危險なものであるかどうか。所謂パラドックスとこのNPVとの關係は愼重なる考察を要求する。この點に關しては多くの異說があり、且つ筆者も既に他の箇處で觸れたことがあるので、こゝではそれの論考はさし控へることとする。たゞNPVが基礎論の中心課題の一つであることを指摘しておくに止める。*

* K. Gödel, „Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie." Ergeb. math. Kolloq. Wien 1933. Heft 4 でゲーデルもNPVの禁止が直觀主義の特色であり、しかもこのNPVが實數理論の特質であること、從つて自然數論と直觀主義とはよく調和し得るも、實數理論と直觀主義の主張との統一の困難を暗示してゐる。ゲーデルに由ると、自然數論に於ける排中律の禁止（これは直觀主義の特色の一つである）は體系の本質的制限とはならず、まさしく、NPVの禁止が本質的制限を來たすことを示してゐる。興味深きヒントである。

ところで最後のヒルベルト學派であるが、この派は現在の基礎論研究の主流であるとさへ言はれ得る程の多くの信奉者を持つてゐる。この學派の主張は——所與の數學乃至論理學の體系の性質の研究のためには、先づペアノ、ラッセル等以來の記號論理の方法を用ゐて、かの體系に使用される基本概念、驅使される基本的推論を、簡潔にしかも殘りなく記號化する。そして此記號化された對象を、恰かも幾何學者が直觀的圖形を扱ふ如くに、研究の目的物とするのである。超數學がこゝに成立する。研究さるべき體系の性質の最も重要なるものの一つは、パラドックスの問題の解決が要求する如く、體系の無矛盾性である。卽ち、ヒルベルトは數學の體系の無矛盾性證明を以てパラドックス論議に結着を與へようとしたのである。彼の有名な論文『數學の新しい基礎付け』(,, Neubegründung der Mathematik," Abh. math. Sem. Hamburg Univ. 1922) に於て、これのプログラムが與へられ、こゝに超數學が進展を開始した。*

無矛盾性證明の要點は、前述の體系の記號化と、この記號化された體系から或一定の式、例へば 0≠0 の如き式が導出不可能であることを證明するところにある。(體系に矛盾があれば如何なる式でも任意に導出されることが證明されるからである。) このために、記號化された體系の各エレメントたる概念に「眞」又は「僞」の値を與へ、これに當該體系所屬の推論を適用するも常に眞の値が導出されることを證明し、他方に於て0≠0が「僞」であることから、當該體系からの0≠0の導出不可能を立證すると云ふ論法である。これ所謂 Wertung の方法であり、ヒルベルトに始まる。彼の門下P・ベルナイス、フォン・ノイマン等の研究* はヒルベルトのプラグラムに沿ふて發展したのである。

* ヒルベルト學派の研究の成果の報告がヒルベルト全集第三卷所載のベルナイスの論文の中で與へられてゐる。伊藤誠氏の邦譯(雜誌「數學」所載)がある。

* P. Bernays, Begründung des ,, Tertium non datur " mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit. Math. Ann. Bd. 93, 1924.
J. v. Neumann, Zur Hilbertschen Beweistheorie. Math. Zeit. Bd. 26, 1927.

これらの研究に依り、自然數論の體系の無矛盾性は、若干の制限を除けば、完全に證明された。(但しこの制限は相當に重大な制限である。卽ち、所謂束縛記號を有しない式にのみ完全歸納法が適用されるとした。然るに完全歸納法の自由な驅使こそ數論展開の基軸とさへも云ひ得るのだ。)そして此方法の自然的擴張に依り原理的困難なしに、自然數論の全體系、更に數學解析、集合論等の各々の無矛盾性證明が可能なりとさへ豫想されたのである。ところがこのプログラムの進行は有名なゲーデルの結果※に依り重大な困難にぶつかつた。彼の結果とは――「普通の論理計算と自然數論とを含む一つの矛盾のない形式的體系に就ては、其無矛盾性の證明を此形式的體系自身の中にて表現することは出來ない。詳しく云へば其處に現れる記號及び變數に一定の自然數を對應させ、更に又これらの記號及び變數から導かれる式、並びに有限個の式の系列にも適當に自然數を對應させることに依り、此形式的體系の無矛盾性の證明は一つの初等算術的定理に飜譯される。そしてこの定理は、その形式的體系内にては導き得ないことが斷言出來る。」

※ K. Gödel, „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Math. usw. I," Monatshefte für Math. u. Phys. Bd. 38, 1931.

ところで上記のヒルベルト、ベルナイス、フォン・ノイマン等の研究法、卽ちその Wertung の方法は全く有限個のエレメント(例へばこゝでは有限個の眞理値)を有限回組合せる操作に盡きる所謂コンビナトリッシュの方法、初等代數的方法だつたのであるから、斯樣な方法では、ゲーデルの結果に據れば、全自然數論の無矛盾性の證明さへも斷念せざるを得ないのである。方法の轉換が要求された。卽ち、自然數論の内部のみでは形式化され得ない樣な超限的方法、非コンビナトリッシュな方法が要求されたのである。※こゝに紹介せんとするG・ゲンツエンは、超限歸納法を用ゐて巧みにゲーデルの提出した難點を切抜けながら、美事に自然數論全體(勿論、完全歸納法に關する從來の制限を除去してである)の無矛盾性を證明した。※※かくしてゲンツェンに依つてヒルベルトのプログラムの第一段が完了したわけである。以下、ゲンツェンの業績を簡單に紹介する。

＊ これらに就てはP・ベルナイスの論文 (L'Enseignement mathematique, 1934 所載)を參照、三田氏の邦譯あり(哲研、一九三六年度)。

＊＊ G. Gentzen, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. Math. Ann. Bd. 112, Heft 4, 1936.

二

パラドックスと呼ばれるものは多數あるが、最も有名なのはラッセルのそれであらう。今、自己自身を要素として含む集合を第一種集合、自己を要素として含まぬ集合を第二種集合と呼ぶとき、第二種集合の全體を𝔐とすれば、この𝔐は果して第一種か、第二種か。若し𝔐を第一種とすると、𝔐は自己自身を含むから𝔐は第一種集合を含むこととなり、𝔐の定義に矛盾する。逆に、𝔐を第二種とするときは、𝔐は定義に依り第二種集合の全體であるから、自己自身を要素として含むこととなり、𝔐の定義に矛盾する。之が所謂ラッセルのパラドックスである。

ゲンツェンに據れば、このパラドックスの成立は、使用される論理的推理自身が誤つてゐることに因由すると。卽ち、第二種集合の全體𝔐が第二種か第一種かと問ふところに矛盾成立の原因がひそんでゐる。𝔐は全く新しい種類の對象であつて、かゝる𝔐をもとの諸集合と同一水準上に置いて、𝔐が第一種か第二種かと質問を提出することは許されない。この論法は許し難き循環 Zirkel を犯してゐると。循環論法とは、ある對象をそれの屬する全體 Gesamtheit に依り規定し、しかも此對象をこの全體に加へる論法である。今の場合では、𝔐は凡ての集合に對して定義され、しかる後に𝔐はこの全體に屬せしめられてゐる。

從つてパラドックスを避けるには、集合の定義を所與のエレメントから、例へば自然數から、純構成的にのみ與へる立場を固守すればよい。かくすれば必然的に循環論法が除去され、パラドックスは消失する。然し此處に困難が生ずる。循環論法の排除に依りパラドックスは除かれたものの、他方に於て數學の體系そのものが重大なる制限を受けざるを得ない。厭ふべき此循環論法は數學の重要なる一方法であるからである。例へば數學解析の一定理——「閉區間で連續な函數で且つ此區間の兩端で相異なる符號を持つ函數は區間に零點を持つ」——の證明には明かに循環論法が用ゐられてゐる。先づ閉區間の點

を兩種に分ち、第一種の點とは其點の右方へ端點まで函數値が同符號を持つ點として、然らざる點を第二種とする。此分類に依つて定まる限界點 Grenzpunkt が零點である。そして此零點自身は區間の點であるから、此處に明かに殘念乍ら循環論法が使用されてゐる。此非難に對してポアンカレ、フレンケル等は反對する。限界點は新しく作られたのではなく、それ自身に存在してゐたものが、或關係に依つて取り出されたに過ぎぬと。ところで、ゲンツェンに依れば、（そしてこれまで多くの論者が主張したことだが）、既述のパラドックスに現れる$\mathfrak{M}$もそれ自身に於て存在する集合とも考へられる。故にポアンカレ、フレンケル等の抗議は成立しないと。既に述べた如く、直觀主義者は循環論法を全部排除して矛盾の發生を防止しようとするが、これは必然的に數學の重要な部分を喪失することとなる。これに對して、ヒルベルト等の形式主義者、ラッセル等の論理學派は循環論法そのものの中に區分を設け、一部の循環論法のみを許すべきものとして、數學體系の保持に備へてゐる。併し、循環論法の區分の標準が彼等に於ては實に不明確であり、客觀的根據が稀薄である。以上の如く、循環論法をめぐる問題は未解決のまゝであり、それ故にこそ無矛盾性證明が一層切實に要求されるのである。

　併し、以上に於てゲンツェンが循環論法として一括的に論じてゐるもののうちにも區別（勿論ポアンカレ、フレンケル等のそれとは異つた意味での）がありはしないか。ラッセルのパラドックスでは第一種集合なる概念が使用されてゐるが、第一種集合とは集合自身がそのまゝ自己の要素となると考へられる集合である。これは

$$M=\{M, a, b, c, \ldots\} \cdots\cdots(\mathrm{A})$$

と圖示出來るだらう。茲にMは集合、a b c ……はその要素とす。然るに零點の存在定理では或要素（限界點）が集合全體に依り定義され規定されてゐる。卽ち、圖示すれば

$$M=\{a, b, c, \ldots\ldots, x, y, z, \ldots\ldots\} \cdots(\mathrm{B})$$

となる。但しx y z ……はMの全體に依り規定される要素を示すものとする。(A)(B)は明かに區別されねばならない。(B)は前に述べたNPVであり、數學解析、集合論等で有力な證明手段として、重要な概念構成法として驅使

されてゐる。故にラッセルのパラドックス及び其他の所謂論理的パラドックスの排除は、單に(A)型の循環論法の禁止で充分ではなからうか。*(リシャルのパラドックス等、所謂認識論的パラドックスは別箇の考察を要求するが、併し右記の(A)(B)分型のプリンシプルと矛盾しはしない。*)

* 此等に關しては筆者は他の箇處で觸れたことがある。

三

扨、以上の如く循環論法を(A)(B)に區分し、(A)の禁止に依り、及び其他の適當の手段を用ゐて(認識論的パラドックスに對して)、現在までに提出されたパラドックスをすべて排除し、しかも數學體系の狹小化を惹起せざる如くに處理し得るであらう。だが將來起り得るかも知れぬパラドックスそのものをも豫防することは不可能である。かくて所與の數學體系からは原則的にパラドックスが生じ得ないことを形式的に説明することが要求されて來る。所謂超數學又は證明論はこの課題に應ずるものであり、此處に紹介せんとするゲンツェンの勞作はこの課題解決の發展史に於ける劃期的のものと云へよう。

然らば無矛盾性證明は如何に遂行すべきか。これに就ては第一節で簡單に觸れ、また後に詳細に述べるつもりであるが、此處ではたゞ以下の事項を附記しておきたい。ヒルベルトの有名な研究*に依り幾何學の無矛盾性の問題は算術學のそれに歸着された。また複素數理論の無矛盾性證明は實數論のそれに簡單に還元せられる。故に殘された問題は自然數論、實數論、集合論の無矛盾性證明である。ゲンツェンは自然數論のそれに完全なる解決を與へたのである。

* Hilbert, Grundlagen der Geometrie.

更に茲に注意すべきは、自然數論の無矛盾性證明とは、決して公理で規定される自然數の集合それ自體の無矛盾性證明ではない。かゝる證明は自然數集合と本質的にエキバレントな集合を想定しない限り原則的に不可能である。故に自然數それ自身の無矛盾性證明は不必要である。問題は自然數の集合自身に適用される論理的推論である。パラドックスは常に論理の無制限な活躍から起るのだ。(實數論、集合論に關しても同樣である。)

證明論は一般的には、與へられた理論に於て可能な證明自身を對象とする理論と定義される。（その一例として射影幾何學の双對原理がある如く、ヒルベルトに依り突然として證明論が生れたわけではない）

我々の當面の證明論的課題は自然數論の無矛盾性證明である。これには先づ自然數論を完全に直觀的な記號に轉化し、斯く記號化された數論の證明自身が矛盾に導かぬことを立證するのである。ところで此立證の方法は一つの證明であり、これは前提されねばならない。故に絶對的意味に於ける無矛盾性證明は不可能であり、無矛盾性證明とは、要するに、ある推論の眞理性を他のより確實な推論の眞理性へと歸着させることにある。この歸着の方法は既述のゲーデルの結果に依つて、自然數論の内部に形式化されない超限的のものであり、しかもそれの眞理性が確實性あるものでなければならない。ゲンツェンは超限歸納法の眞理性の確實なりと考へられる特殊の場合に於ける適用に依つて無矛盾性證明に成功した。

四

自然數論の形式化から始める。

形式化とは命題乃至證明を直觀的な記號の系列を以て表示することにほかならぬ。これは超數學に始まるものではなく、既に通常の數學に於て此方法は高度に使用されてゐる。例へば「二數 a b の和と差の積は各數の自乘の差に等し」は

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

とあらはされてゐる。併し「$a=b$ ならば $b=a$ なり」は通常は形式化されてゐない。超數學は論理的關係（命題の結合關係）を表示する記號を新しく導入して、形式化の機能を極度にまで發揮せんとするのである。卽ち「命題$\mathfrak{A}$が成立すれば命題$\mathfrak{B}$が成立する」は

$$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$$

に依り、「命題$\mathfrak{A}$が成立し且つ命題$\mathfrak{B}$が成立する」は

$$\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}$$

を以て、「命題$\mathfrak{A}$が成立し、又は命題$\mathfrak{B}$が成立す」は

$$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$$

に依り、「命題$\mathfrak{A}$は成立しない」は

$$\neg\mathfrak{A}$$

を以て表示する。次に、$\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$を以て「$\mathfrak{x}$に就いて$\mathfrak{A}$が成

立する」の表示とすると、「命題 $\mathfrak{A}(x)$ はすべての x に就いて成立する」は

$$\forall x\mathfrak{A}(x)$$

に依り、「命題$\mathfrak{A}(x)$を成立せしめる x が存在する」は

$$\exists x\mathfrak{A}(x)$$

を用ゐて表示する。

斯くして例へばゴールドバッハの定理「各偶数は二箇の素数の和として表はされる」は

$$\forall x\{2|x \supset \exists y\exists z(y+z=x\&(\mathrm{Prim}\,y \,\&\, \mathrm{Prim}\,z))\}$$

となる。茲に Prim a は「aは素数なり」、「$a|b$」は「bはaで割り切れる」を表示する。而して變數 x y z はすべて自然數にのみ關係せしめられる。

記號$=$, Prim, $|$ を述語定記號 Prädikatzeichen と呼ぶ。斯かる記號のアーグメントの箇處に數を代入すると命題 Aussage を表はすのである。そして記號$+$は函數定記號 Funktionszeichen と云ひ、斯かる記號のアーグメントの箇處に數を代入すると、それは再び數を示す。

式 Formel とは命題を形式化したものにほかならぬ。(例へば上記の $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$)。

式の精密な定義を與へるために、式を組成するに用ゐられる記號 Zeichen の種類別を與へよう。——

一定の自然數に對する記號。　1, 2, 3,（數記號 Zahl-Zeichen）

自然數に對する變記號。束縛變記號（$\exists\forall$記號と關聯をもつ變記號である。例へば $\forall x\mathfrak{A}(x)$「$\mathfrak{A}$はすべての自然數 x に就て成立す」の x である。）と自由變記號（然らざるもの）の區別がある。

一定の函數に對する記號（函數定記號）……例、$+$、$\cdot$。

一定の述語に對する記號（述語定記號）……例、$=$、$<$、Prim、$|$。

命題の結合のための記號……$\&, \vee, \supset, \neg, \forall, \exists$。

次は項 Term の定義。——數記號及び自由變記號は項である。また s, t が項ならば $s+t$, $s\cdot t$ も項である。例へば $[(a+2)^3\cdot b]+4$ は項なり。卽ち項とは一定の又は不定の數を記號化せるものにほかならない。

以上の定義を用ひて式（フォーマル）の精密な定義を與へよう。——述語定記號のアーグメントの箇處を項で充したものは式である。

例　$(2+a)\cdot 4 \vee b$.

$\mathfrak{A}$が式ならば$\overline{\mathfrak{A}}$も式。$\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}$ が式ならば $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ はすべて式である。

式の中の自由變記號を束縛變記號、例へば x でおきかへ、更に $\forall x$ 又は $\exists x$ を式の前方に附記せるものは式である。故に $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ を式とすれば $\forall x\mathfrak{A}(x)$ は式である。右の定義に依り規定されるもののみを式と呼ぶ。故に式とは數論的命題の形式化せるものである。

我々は括弧記號を屢々使用するが、これは式の構造を明瞭ならしめるための補助記號である。式の內容的意味は以上の定義自身から明白であらう。自由變項を含む式は不定の命題を表示し、之はその自由變項を數記號でおきかへることに依つて初めて一定の命題を表はす。

扨、一箇の函數定記號をもつ項を最小項 Minimalterm (例1+3)、一箇の述語定記號をもつ式を最小式 Minimalformel(例4=4)と云ひ、記號∀又は∃を含む式を超限的 transfinit と呼ぶ。

ドイツ文字、ギリシャ文字は傳達記號 Mitteilungszeichen 即ち數論に關する超數學的考察自身の用ゐる變記號である。

以上の式概念に依つて自然數論の命題をすべて記號的に表示し得るのである。負數、分數は有限個の自然數自身の關係に依つて定義されるから(例へば $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ は $a\cdot d=c\cdot b$ に依つて)、上記の形式化は有限數の有限集合を扱ふ理論には殘りなく及ぶことが出來る。(自然數の無限集合を認めると我々は實數の理論、數學解析の段階にまで達する。これは當面の課題を越える。)

次は自然數論に用ゐる推論 Schlussweise の形式化。

$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\cdots\cdots\mathfrak{A}_\mu\ \mathfrak{B}$ を式とするとき

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}$$

を式列 Sequenz と定義し、その意味は「$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\cdots\cdots\mathfrak{A}_\mu$を假定すると$\mathfrak{B}$が成立する」である。而して$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\cdots\cdots\mathfrak{A}_\mu$を前式 Vorderformel、$\mathfrak{B}$を後式 Hinterformel と呼ぶ。假定の存在しないときは

$$\rightarrow \mathfrak{B}$$

とかく。(例へば公理の場合)。斯くしてすべての命題は式列に依つて完全に表示されるのである。

扨、式列の系列を考へ、それの各式列は基本式列（後

を見よ)であるか、或は先行する式列から構造變換(後を見よ)又は推理法則(後を見よ)に依り生ずる場合に、斯かる式列の系列を導來(Herleitung)と云ふ。導來は證明の形式化されたものにほかならない。そして導來の最後の式列は前式を含まぬ。この最後の式列の後式を導來の終結式(Endformel)と呼び、これは證明に依つて證明された命題の形式化せるものである。

$$\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$$

の形をもつ式列(但し$\mathfrak{D}$は式とす)を論理的基本式列 logische Grundsequenz と稱し、$\mathfrak{S}$を數論的公理(後を見よ)とするとき

$$\to \mathfrak{S}$$

の形の式列を數學的基本式列 mathematische (Grundsequenz と呼ぶ。兩者を一括して基本式列と云ふのである。

構造變換 Strukturänderung。——式列の構造にのみ關係して、式列を形成する個々の式の意味とは無關係であるところの式列の變形である。即ち——

(1) 前式相互の置換

(2) 他の前式と同じ前式の除去

(3) 前式への任意の式の添加

(4) 束縛變項を他の新しい束縛變項でおきかへる。

これらに依つては、明かに、式列の意味そのものは不變のまゝである。即ち、式列が眞であれば、構造變換に依つて生ずる式列も眞であることは容易に洞察し得る。例へば(3)を見よ。これに依ると或命題に任意の假定を前式として附加しても、かの命題は他の前提と共に、この新しい前提にも依存すると考へ得るのである。これは一見すると奇怪の樣であるが、併し或命題が眞であるときには、この命題は任意の假定を前提しても成立することは明かである。これに反して、若し命題の前提への依存性を事實に於て成立するもののみに制限するならば、假定が外觀的にしか使用されない證明を形式化し得なくなるのである。故に式列の形式化の力を普遍的ならしめる必要ある我々の場合には、式列に於ける前式への後式の依存は形式的のものとせざるを得ない場合をも含めしめる。重要なのは式列の後式であり、就中、導來の終結式の後式である。終結式が前式を含まずと限定したの

も、導來に依りひき出される終結式の後式が專ら眞なる命題ならしめるがため(卽ち出發點となる諸公理の一定のコンプレックスならしめるためだ)である。

次に推論 Schlussweise の形式化せるものを推論法則 Schlussregel と呼ぶ。今、$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$, $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ を任意の式とし、$\mathfrak{f}(\mathfrak{a})$ $\mathfrak{f}(\mathfrak{t})$ は $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ から $\mathfrak{x}$ を任意の自由變項 $\mathfrak{a}$ 又は任意の項 $\mathfrak{t}$ で置換して生じたものとする。また Γ Δ Θ は式の單なる系列を示す。推理法則としては以下のものが擧げられる。——

&導入(&-Einführung)。式列 $\Gamma\rightarrow\mathfrak{A}$ 及び $\Delta\rightarrow\mathfrak{B}$ から $\Gamma,\Delta\rightarrow\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$ が生ずる。

&除去(&-Beseitigung)。$\Gamma\rightarrow\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$ から夫々 $\Gamma\rightarrow\mathfrak{A}$ 及び $\Gamma\rightarrow\mathfrak{B}$ が生ずる。

∨導入。$\Gamma\rightarrow\mathfrak{A}$ から $\Gamma\rightarrow\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$, $\Gamma\rightarrow\mathfrak{B}\vee\mathfrak{A}$ が生ずる。

∨排除。$\Gamma\rightarrow\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ 及び $\mathfrak{A},\Delta\rightarrow\mathfrak{C}$ 及び $\mathfrak{B},\Theta\rightarrow\mathfrak{C}$ から $\Gamma,\Delta,\Theta\rightarrow\mathfrak{C}$ が生ずる。

∀導入。$\Gamma\rightarrow\mathfrak{f}(\mathfrak{a})$ から $\Gamma\rightarrow\forall\mathfrak{x}\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ が生ずる。茲に $\mathfrak{a}$ は Γ, $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ に含まれぬ。

∀排除。$\Gamma\rightarrow\forall\mathfrak{x}\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ から $\Gamma\rightarrow\mathfrak{f}(\mathfrak{t})$ を得る。

∃導入。$\Gamma\rightarrow\mathfrak{f}(\mathfrak{t})$ から $\Gamma\rightarrow\exists\mathfrak{x}\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ を得る。

∃排除。$\Gamma\rightarrow\exists\mathfrak{x}\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ 及び $\mathfrak{f}(\mathfrak{a}),\Delta\rightarrow\mathfrak{C}$ から $\Gamma,\Delta\rightarrow\mathfrak{C}$ が生ずる。但し Γ, Δ, $\mathfrak{C}$, $\exists\mathfrak{x}\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ は $\mathfrak{a}$ を含まぬ。

⊃導入。$\mathfrak{A},\Gamma\rightarrow\mathfrak{B}$ から $\Gamma\rightarrow\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ を得る。

⊃排除。$\Gamma\rightarrow\mathfrak{A}$ 及び $\Delta\rightarrow\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ から $\Gamma,\Delta\rightarrow\mathfrak{B}$ を得。

否定の推理法則(Schlussregel der Widerlegung)。……$\mathfrak{A},\Gamma\rightarrow\mathfrak{B}$ 及び $\mathfrak{A},\Delta\rightarrow\neg\mathfrak{B}$ から $\Gamma,\Delta\rightarrow\neg\mathfrak{A}$ を得る。

二重否定の排除。$\Gamma\rightarrow\neg\neg\mathfrak{A}$ から $\Gamma\rightarrow\mathfrak{A}$ を得る。

完全歸納法。$\Gamma\rightarrow\mathfrak{f}(1)$ 及び $\mathfrak{f}(\mathfrak{a}),\Delta\rightarrow\mathfrak{f}(\mathfrak{a}+1)$ から $\Gamma,\Delta\rightarrow\mathfrak{f}(\mathfrak{t})$ を得る。但し $\mathfrak{a}$ は Γ Δ $\mathfrak{f}(1)$ $\mathfrak{f}(\mathfrak{t})$ に含まれず。

以上が推理法則である。

既述の數學的基本式列 $\rightarrow\mathfrak{S}$ の $\mathfrak{S}$ は數論的公理であるが、公理とは、概念構成に出現する述語、函數に關する基本事實を云ひ表すものである。述語 =、函數 + に關する公理として次のものがある。——

$$\forall x(x=x)$$

$$\forall x\forall y(x=y\supset y=x)$$

$$\forall x\forall y\forall z[(x=y\ \&\ y=z)\supset x=z]$$

$$\forall x\neg(x+1=1)$$

$$\forall x \forall y (x+y=y+x)$$

$$\forall x \forall y \forall z [(x+y)+z=x+(y+z)]$$

函數×に關する公理は省略する。

五

數論に於ける確證的推論 unbedenkliche Schlussweise 及び非確證的なる推論 bedenkliche Schlussweise

既述の如く、無矛盾性證明は、信頼するに足る確證的推論を用ゐて、非確證的推論（概念構成、公理をも含める）を基礎付けるところにある。故に、數論に用ゐられる推論が確證的か否かを檢證するのは無矛盾性證明にとつて緊要であり、實際に於て兩者の區別が嚴密に一義的ではないだけに愼重なる考慮を要する。

先づ有限なる對象領域を扱ふ數學から考察を開始する。この數學に於ては對象は個別的に枚擧され aufzählen 各對象は一定の記號で表示される。函數、述語もそれのアーグメントの個々の箇處で個別的に定義される。即ち所謂「定義の表」Definitionstabelle で完全に規定されるのである。また所與の對象、函數、述語から命題結合の記號を用ゐて構成される一定の命題はすべて次に述べる規則に依つて、眞なるか僞なるかゞ算出される ausrechnen。命題は一定であるから、自由變項を含まぬ式で表示されてゐる。その中に記號∀が含まれるときは、式の當該部分

$$\forall x f(x)$$

を

$$[\cdots\cdots[f(g_1)\,\&\,f(g_2)\,\&\cdots\cdots]\,\&\,f(g_p)]$$

でおきかへる。茲に $g_1 \cdots g_p$ は所與の對象領或の對象の全體である。∃記號の場合は、右記の記號&の代りに記號∨を置けばいゝ。次に、斯くして得られた表示の中の各項を、それに含まれる函數の定義の表を基礎として算出する。即ち、それの値を示す對象記號で以ておきかへる。多數の函數記號が相互に含み合つてゐるときは、順次に内部から右の操作を施す。各最小式に就ては、それの含む述語の定義表を基礎として眞僞を決定する。更に命題結合の記號で任意に合成された式の部分も逐次に内部から次の規則を用ゐて眞僞を規定して行く。

——$\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ とが共に眞なるときに限つて眞、他は

僞。$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ は$\mathfrak{A}$と$\mathfrak{B}$とが共に僞なるときに限り僞、然らざれば眞。$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ は$\mathfrak{A}$が眞、且つ$\mathfrak{B}$が僞なる場合にのみ僞、他の場合はすべて眞。$\neg\mathfrak{A}$ は$\mathfrak{A}$が眞ならば僞、$\mathfrak{A}$が僞ならば眞である。

右の手續はすべて、形式的記號に我々が結び付けた事實上の意味に照應してゐることは明瞭である。ところで今の我々にとつて特に本質的なことは、以上からも明かな如く、有限對象領域の理論に於ては、各命題は決定可能 entscheidbar である、換言すると一定の操作に依つてそれの有限回の適用の後に其の眞僞が決定され得ることである。

扨、この理論に適用された既述の論理的推理法則が眞であること、卽ち「眞なる」數學的基本式列から出發して、右記の論理的推理法則を用ゐて導來される式列はすべて眞であることは實に容易に檢證される。尙其際、式列の眞の概念を其の內容的意味に照應して次の如くに規定する。——自由變項を持たぬ式列は、其の前式がすべて眞であり、且つ後式が僞なるときは僞である。然らざれば眞である。自由變項をもつ式列は、それに對象領域の任意の記號を代入するも眞であるときは眞である。

右の規定が可能であるのは、我々の形式的論理法則が命題結合の實際の內容的意味と合致する如くにあらかじめ選んだためにほかならぬのである。

次は無限對象領域で決定可能な概念構成と命題。

然らば右述の論法は無限對象領域、例へば自然數の理論に關してはどうなるであらうか。この場合には各對象を枚擧し、個別的に記號付けることは、對象の個數が無限であるから、不可能である。かゝる理論に於ては次の如き構成規則 Konstruktionsvorschrift が登場するのである。——「1は自然數である。更に 1+1, 1+1+1 は自然數である。一般に一自然數を表示する表示に+1を添加したものは自然數である。」以上の有限個の言葉を以て述べられた構成規則は同一の操作に從つて常に新しく進行して行く可能性を含んでゐるために、無限數列を造ることが出來るのである。(可無限 potentielle Unendlichkeit)

この場合には函數、述語の定義も個別的定義ではあり得ないから、その代りに計算規則 Berechnungsvorschrift を使用する。例へば函數 $2\cdot a$ に對しては、$2\cdot 1$ は 2であり、$2\cdot(b+1)$は$(2\cdot b)+2$である。この規則に依つて逐次に全自然數に對して其函數値が與へられる。

一般に、函數又は述語は、これに對する決定の規則 Entscheidungsvorschrift が與へられるとき決定可能的に定義される(entscheidbar definiert)。——卽ち、與へられた各自然數の系列に對して函數値が規則に依つて一義的に計算され、また與へられた數の組合せ(Zusammenstellung von Zahlen)に對して述語が成立するか否かゞ一義的に決定されることである。我々が實際に扱ふ多くの函數乃至述語の定義に對しては斯かる決定の規則が與へられてゐる。

次に、自然數の無限對象領域の理論に於ける命題を考察しよう。記號∀∃を含まぬ各一定の命題に就ては、有限領域に於けると全く同樣の方法で、それの眞僞を決定し得る。たゞ前者と相異するところは、項の値の決定や最小式の眞僞の決定が定義表に依つてゞはなく、當該函數、述語に對する決定規則に依つて行はれるところにある。また斯かる命題に對する論理的推理法則の適用の妥當性も有限領域に於けると全く同樣に檢證し得る。

記號∀∃が含まれる場合にも、それ等が有限個の數にのみ關係せしめられるときは、明かな如く、有限の場合と同樣に處理し得るのである。

超限的命題の超越的把握(an-sich-Auffassung)

問題は、∀∃が全自然數に關聯するところの本質的なる超限的命題のうちに存在する。此場合には全く新しき事態が生ずるのである。斯かる場合には、有限領域に適用され得る如き決定方法は不可能である。また任意の超限的命題に對して決定の方法が與へられ得るか否かは全く疑問である。若し與へられ得るとすれば、フェルマーの大定理も一定の方法で其眞僞が決定され得る筈であり、かゝることは全く望みなき夢であらう。然らば其の眞僞を檢證し得ない命題に對して如何なる意味を與へるべきであらうか。

從來の見解に依ると、超限的命題、例へばフェルマー大定理の眞僞は、それの決定の方法とは全く獨立に、それ自體に於て(an-sich)超越的にきまつてゐる(超越的把

握。）例へば記號∀を含む命題の意味は「無限個の自然數の各々に對して當該命題が成立する」である。記號∃を含む命題の意味は「自然數の無限領域の何處かに當該命題を成立せしめる數が存在する」であると考へられてきた。

この見解から、超限的命題に對しても有限の場合と全く同一の論理的推論が成立し得るとの考へが生じた。ところで集合論のパラドックスは斯かる無限を完結的にアン・ジッヒに存在するとする觀點から生じたものであるから、*超越的見解に對しては愼重なる批判が必要であるとゲンツェンは考へる。（この意見には疑問がなくはない。註*を見よ。）而してパラドックスを避けるには次の基本法則を守るべしと。——「無限の全體性はそれ自身に於て存在する完結的なるもの（實無限）と考へてはならぬ。それは、有限なるものから構成的に逐次に構成され得る或生成するもの（可無限）としてのみ考へよ。*」

* このゲンツェンの見解には些かの疑問なきを得ない。無限の超越的把握から必然的にパラドックスが生じて來るのではない。既述の如く循環論法に本質的に相異

する二つのタイプがあること、（A）型を適用するときに限りパラドックスが發生することを想起せよ。勿論可無限のみを採る立場からはパラドックスは消失する。併しこの代償として（B）型NPVが失はれ、かくて數學の重要なる部分がパラドックスと共に喪失する。元來、領域に含まれるエレメントの濃度の比較的に小さい、卽ち可附番個の集合のみを扱ふ自然數論の無矛盾性證明に於ては、斯かる可無限の立場から、論理的推論を確證的と否とに分ち、前者を根據として後者を基礎付け得るであらうが、一度び無矛盾性證明を實數論の段階に及ぼすときは、斯かる可無限の立場からは、その證明は原則的に拒否される恐れがある。實にゲンツェン自身が自己の方法が、實數理論に對しては完全に無力であることを告白してゐるのである。

更に今一つの疑問がある。ゲンツェンは自然數論の域內に於ても可無限の構成的立場からは解釋の困難な超限的命題を擧げ（後出）、それを bedenklich なりとして其基礎付けの必要、換言すれば無矛盾性證明の必要を唱へてゐるが、然らば斯かる種類の bedenkliche Schlussweise と、パラドックスに現れる bedenkliche Schlussweise とを區別する基準をゲンツェンは何處に求めてゐるのか。兩者はいづれもアン・ジッヒ的性格を帶びてゐる。恐らくゲンツェンは無矛盾性證明の成

否が區別の基準なりと云ふであらうが、成程、然りとも云へよう。だが何故に一方からは矛盾が生ぜず、他方からは生ずるのか。この結果を示すところに無矛盾性證明の效果があるのだが、一體この結果の由來するところは何か。この點に就てのゲンツェンの意見は甚だ不明瞭である。循環論法の論理的分析が缺げてゐる。(A)(B)タイプの相違が顧慮されてゐないのだ。パラドックスに現れる循環型は(A)であり、數論に現れるゲンツェンの謂ふ確證的ならざる推論は(B)型循環乃至は單に超限的であるが、決して(A)型ではない。だからとて後者に對する無矛盾性證明が不必要になるのではなく、後者の使用から前者(A)型循環が生じないことを示すところに、無矛盾性證明の意義がある。問題となる推論が(A)型ならば證明は當初から不要である。故に無矛盾性證明の豫備工作として問題となる命題乃至推論の論理的構造、循環タイプの吟味は必要であり、且つ有效であらう。問題が自然數論から更にオーダーの高い實數論へと進む場合には、特に必須となりはしないかと思つてゐる。併しゲンツェンの如くにパラドックスを單純に實無限に由來する立場からはパラドックスに見られるアン・ジッヒ性、超限性と、例へば實數集合全體に見られるアン・ジッヒ性、超越性(フェルマー大定理のアン・ジッヒ的把握でもいゝ)との本質的區別を永久に理解し得ないだらう。ゲンツェン的方法が彼自身の告白する如く、實數理論に對して無力なのは、偶然的なものではなく、彼の立場(可無限のみを許し、實無限がパラドックスの原因とする見地だ)そのものから本質的に由來すると云へよう。

最後に、實無限のアン・ジッヒ性と有限對象のアン・ジッヒ性との共通性から後者に成立する論理的法則がそのまゝ前者にも成立すると考へるのは全くの獨斷である。それは無限の有限化にほかならぬ。有限と質的に相違する無限に、有限對象に成立する法則を無批判に適用することから起るパラドックスは無限のアン・ジッヒ性の罪ではなく、全く無限の有限主義的理解(誤解だ)の責任である。この點に就てのゲンツェンの意見は明瞭を缺ぎ、贊成出來ぬところがある。

六

この原則を固守すれば、超限的命題の超越的把握は拒否されねばならなくなる。そしてかゝる命題に有限的意味を與へねばならない。卽ち、命題を、有限的に表示可能な事態に對する表示として解釋しなければならない。次に論理的推論をも、右の命題解釋と調和するか否かを吟味する必要があるのだ。

超限的命題に含まれる結合記號

$\forall$ & $\exists$ $\vee$ の有限的解釋。

$\forall$結合の場合。最も簡單な形の超限的命題$\forall x\mathfrak{f}(x)$から考察を始める。茲に$\mathfrak{f}$は記號$\forall$ $\exists$を含まず。故に$\mathfrak{f}(x)$の眞は、xに代入された各個の數に對して檢證される。例へば、

$$\forall x(2 \mid x \vee \neg 2 \mid x) \; ; \; \forall x(x=x)$$

この種類の命題が有意味 sinnvoll 且つ眞 richtig であることは疑を容れないであらう。而して斯かる記號$\forall$に就ては、完結した無限個の個別的命題の總體を考へる必要はなく、次の如く有限的に解釋し得る。――「1から始めて順次により大なる數をxに代入すると常に眞なる命題を得る」と。

この解釋を、$\mathfrak{f}$が既に有限的意味を持つ任意の命題であるが如き一般の場合にまで擴げることが出來る。卽ち、$\mathfrak{f}(x)$が其のxに逐次に代入された數に對して常に有意味且つ眞なる命題を表示するときは、$\forall x\mathfrak{f}(x)$は有意味たり得るのである。

$\forall$記號に關する推論($\forall$導入及び$\forall$排除)は此解釋と調和する。――$\forall$導入にては、或假定(Γ)(但し超限的假定はさしあたり無意味であるから、問題外におく)を前提するとき$\mathfrak{f}(a)$が眞であるならば、このことから同じ(Γ)を前提するときは$\forall x\mathfrak{f}(x)$の成立が歸結されるのである。以上を有限的に解釋し得る。何となれば、任意の數nが與へられるならば、これを證明全體のaに代入すると、$\mathfrak{f}(n)$に對する證明(無論同一の前提(Γ)のもとで。この(Γ)は$\forall$導入に對する變項の條件を基礎としてaを含まぬから右記の置換に依つて不變である)を得るから、$\forall$排除に就ても同樣。

通常の數論的公理(前を見よ)も、それの持つ記號$\forall$を右述と同樣に解釋し、且つ其の含む函數及び述語の定義の決定可能性を考慮すれば、容易に有限的に意味付け得る。說明不要であらう。

&結合。$\mathfrak{A}$&$\mathfrak{B}$の形の超限的命題は、$\mathfrak{A}$及び$\mathfrak{B}$が既に有意味且眞なりと認識された命題であるとき、有意味且つ眞である。この解釋は、&導入及び&排除の推理法則と調和することは全く明かである。但し假定(Γ, Δ)は超限的ではないとする。

$\exists$結合、$\exists x f(x)$ を超越的に把握すると「無限數列の何處かに性質 f を持つ數が存在する」であるが、この見解は無論、有限的解釋にとつては無有意である。然し一定の數 n に對する命題 $f(n)$ が有意味且つ眞なりと認識されるときは、明白にこれから $\exists x f(x)$ を導き出し得る($\exists$導入)。$\exists x f(x)$ は $f(n)$ よりも論理的に弱い意味しか示さぬからである。(卽ち、性質 f の數 n の存在することのみを示して、この數自身を與へぬから。)斯くて $\exists x f(x)$ は有限的意味をもつ。

更に $\exists$導入の場合に、$f(n)$ の n の代りに任意の項 t を持つ命題 $f(t)$ があらはれるときも、事情は本質的には前の場合と相違しない。t に含まれる自由變項に一定の數を代入すると、t は函數定義の決定可能性(かゝる函數のみを用ゐるのだ)を基礎として一定の數 n を與へる。かくて前と同樣の事態となる。また、$\exists$導入に超限的ならざる假定(Γ)の出現も何等の本質的變化をもたらさない。

ところが $\exists$排除に就ては些か困難が惹起する。$\exists x f(x)$ から $f(n)$ へ進むことは原則的には不可能であり、$\exists x f(x)$ のみからは f を滿足する一定の値 n の何たるかを知り得ないからである。だが次の如く考へ直してみる。$f(a)$ の a を自由變項とし、且つ數 n(これの一定の値を知ることは今の瞬間に於ては不必要なことに注意せよ)を代表すると考へれば、$\exists x f(x)$ から $f(a)$ が導き出せる。更に、これから a を含まぬ或命題 $\mathfrak{B}$ が導出され得るならば、$\mathfrak{B}$ は明かに眞である。斯くて $\exists$排除のシェマの有限的解釋が成立する。

この推理法則には始めて從屬的假定 zugehörige Annahme(この場合は $f(a)$)が姿を現はしてゐることに注意する必要がある。この假定は超限的であり得るからである。(これまでの假定はすべて既に證明されし命題として非超限的に考へ得られたのだが。)併しこれに對して斯う云ひ得るであらう。——$\exists x f(x)$ が證明され且つ有意味であるからには、$\exists x f(x)$ の證明を根據として、$f(n)$ を有意味且つ眞ならしめる數 n が既知であらねばならず、且つこの n は再構成し得なければならない。ところが假定 $f(a)$ は任意の假定ではなく、一定の眞なる命題 $f(n)$ なりと考へるならば、a は數 n 以外のものではあり得なくなる。かくて假定 $f(a)$ からの $\mathfrak{B}$ の證明はもはや假定的のものでは

なく、通常の直接證明となる。そしてまさしく之が其意味なのである。

∨結合は∃結合とアナロギッシュに處理する。――$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$の形の超限命題が有意味且つ眞であり得るのは、$\mathfrak{A}$及び$\mathfrak{B}$のいづれかゞ有意味且つ眞なりと認識されてゐるときである。∨導入はこの見解と完全に合致する。∨排除は以下の如く解釋する。――「$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$が與へられ、且つ假定$\mathfrak{A}$からも、假定$\mathfrak{B}$からも同一の$\mathfrak{C}$が歸結され得るならば、$\mathfrak{C}$は眞である。」元來$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$は自己自身のうちに、$\mathfrak{A}$又は$\mathfrak{B}$のいづれかゞ眞なるものとして認識されてゐることを、含意してゐるのである。故に∃排除のときと全く同樣に、$\mathfrak{A}$からの$\mathfrak{C}$に對する證明、又は$\mathfrak{B}$からの$\mathfrak{C}$に對する證明は、假定$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$から解放せられて、直接證明と考へられるから、上記の有限的解釋は妥當なりと是認し得るだらう。

完全歸納法も有限的に解釋される。――「$\mathfrak{f}(1)$を有意味且つ眞なる命題とする。結果$\mathfrak{f}(t)$の項tは、自己の含む自由變項に數を代入すれば一定の數nを表示することになる。次に$\mathfrak{f}(a)$からの$\mathfrak{f}(a+1)$の證明に於て、その中のaに對して數1 2 3……$n-1$を逐次に代入して、而してこれを用ゐて、眞なる命題$\mathfrak{f}(1)$から出發して$\mathfrak{f}(2)$ $\mathfrak{f}(3)$……と進んで最後に到達する直接證明を作り、かくして$\mathfrak{f}(n)$も有意味且つ眞なる命題となる。」此處で本質的な點は、最初に無意味であつた假定$\mathfrak{f}(a)$（それが超限的である限り）が、それに關する證明を直接證明に轉換し得ることに依り、意味を獲得するところにある。

扨、∃及び∨の右に與へた有限的解釋は、それの超越的把握から概念的にばかりでなく、實際的效果に於ても、異つたものをもたらす。例へば命題「フェルマーの大定理は眞なるか又は僞である」は、超越的把握に從へば眞である。併し∨の有限的解釋の立場では斯かる主張は不可能である。この立場では∨に依り結び付けられる兩命題のいづれか一方が眞なるものとして認識されてゐなければならぬからである。∃に就ても同樣である。

以上は、記號∀&∃∨の出現する超限的命題の最も簡單な例の解釋であるが、此等の記號が相互にからみ合つてゐる複雜な場合に就ての考察は省略する。そして基本の思想を明かにするに止める。

ところで、右の考察から出發して數論の上述の部分に對する無矛盾性證明を展開し得るのではないかとも考へられるが、併し斯樣な證明法は、證明自身のうちに、まさに我々の基礎付けんと欲する超限的命題及びこれに關する推論を利用せねばならぬから、多くの期待をもつことは出來ない。

六

超限的命題に於ける結合記號$\supset$[7]

$\supset$結合。記號$\supset$を持つ超限的命題を考察する。

$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$の意味するところのものは何か。いま、既に是認された推論を使用して、假定$\mathfrak{A}$から出發して命題$\mathfrak{B}$を導き出す證明が與へられたとすると、これから我々は$\supset$導入に依つて$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$を得る。實にこの命題の意味するところのものは、一度び命題$\mathfrak{A}$が證明されゝば之から更に命題$\mathfrak{B}$を證明することを可能ならしめるところの證明を使用したと云ふこと以外の何ものでもない。それは全く有限的確證性を示してゐる。$\supset$排除も亦右の見解と完全に調和する。$\supset$排除では、$\mathfrak{A}$及び$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$から$\mathfrak{B}$を導出するのであるが、このことは何等の非難すべきものをも持つてはゐない。何となれば、$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$は$\mathfrak{A}$が既證である限りに於て、$\mathfrak{B}$に對する證明の存在することを主張するのだから。

併し乍ら以上の$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$の解釋では、假定$\mathfrak{A}$からの$\mathfrak{B}$の證明は、既に是認されたる(zulässig erkannt)推論のみを含むと前提してゐた。だが、斯かる證明が再び$\supset$推論を含むこともあり得るから、從つて我々のこれまでの如き有限的解釋は拒否される。$\supset$推論を基礎付けるために再び$\supset$解釋を基礎とすることは全くの循環論であるから。[*] だから證明自身に含まれる$\supset$推論を先づ基礎付けねばならぬが、これも困難である。何となれば、假定$\mathfrak{A}$が$\mathfrak{C}\supset\mathfrak{D}$の形をもつときである。何となれば$\mathfrak{C}\supset\mathfrak{D}$に意味を與へしめるところの基礎ともなるべき「$\mathfrak{C}$からの$\mathfrak{D}$に對する證明」が與へられてゐないから。

以上の錯雜した困難を克服するには實に複雜な解釋の規則が必要となり、後に述べる無矛盾性證明の要求もこゝに胎胚するのである。

* 茲に云ふ循環論法は我々の述べた(A)型循環ではなく$\supset$推論の基礎付けが一回的に確立されず、更に基礎な

求めて逆行（レグレッシヨン）してゆくことではなからうか。この逆行が有限回の後に停止すること(逆行の有限性)の證明がゲンツェンの無矛盾性證明の企圖するところではなからうか。(A)型循環と、こゝに述べるコ推論にまつはる regress 的循環とは嚴密に區別すべきであらう。(A)型循環では全體とその要素との無媒介の直接的同一が主張され、其處から矛盾が生じたが、regress 的循環では regress されるコ推論はいづれもコ推論の一般的性質を持つてはゐるが、各コ推論の兩側に立つ式がレグレスと共に變化して行く(變化せねば(A)型循環であり、パラドックスが生じ、無矛盾性證明は最初から無用となる)から、コ推論の基礎付けのレグレスは甚だディアレクティックであり、(B)型循環に屬すると云へないだらうか。既述の圖式(B)のMにコ推論の一般性を、$a\ b\ c$……に既に有意味且眞なりと認識された個別的コ推論命題又は其他の有意味且つ眞なる命題を、$x\ y\ z$……に新しく基礎付けを要求される超限的なる個別的コ推論命題を、夫々該當させて考へ得はしないか。

コ推論に關する無矛盾性證明は、結局のところ、Mを媒介として$x\ y\ z$……から$a\ b\ c$……へ逆行し、これに依つて逆に$x\ y\ z$……を基礎付けることであらう。この逆行の過程が自然數論の場合には比較的に簡單且つ有限的であるが、實數複素數を基礎とする數學解析に至ると、この逆行は遙かに複雜となり、また果して逆行が有限的に可能か否かが甚だ疑問である。$a\ b\ c$自身も超限的命題、但し$x\ y\ z$……に比較してより確證的なる命題と云ふことになりはしないか。若し$a\ b\ c$……を有限的且つ眞なる命題と制限すれば、$x\ y\ z$……から$a\ b\ c$……への逆行は恐らく超限的のものとなり、この逆行自體の信頼性が證明を要求することとなるだらう。ゲンツェンは有意味の規定性を、直觀主義者流に、有限的と解釋してゐるが、この解釋に對しては、問題が實數論に進む場合には、愼重なる吟味が必要であらう。有意味無意味の境界線が遙かに超限的なるものの中にずれて來ることと豫想される。

更に注目すべきことは、自然數論そのものの中には(B)型循環NPVは存在せず、たゞコ推論を有限的に解釋せんと企圖する場合に始めてNPVが出現することである。ゲンツェンの論法の特色は、先づ有意味即有限性となすことと、この見地からする超限的命題の解釋の過程に現れるNPVの無矛盾性を、その過程が有限的に落着することの證明(有限性證明である、後を見よ)に依つて示すところにある。(無矛盾性證明の二重性とも云へよう。)そしてこの特殊の場合のNPVの無矛盾性の證明を、超限歸納法の確證的な特別の場合

に於ける適用に依つて、遂行するのである。故にゲンツェンの證明は本質的には有限主義的ではないのである。

扨、ゲンツェンは超限命題解釋に出現するNpV循環とパラドックスに現れる(A)型循環とを明瞭に區別してゐないが、一應の概念的區別があつて然るべしと思ふ。若し兩者が本質的に同一型のものならば無矛盾性證明は最初から無用である。上記のNpVとパラドックスとを概念的に區別し、然る後に此NpV及び超限命題の使用からパラドックス卽ち循環(A)型が出現しないことを證明するところに無矛盾性證明の意義がある。循環(A)(B)の區別は無矛盾性證明の前提として不可缺のものであるが、ゲンツェンではこれに關說するところが無いのは何故であらうか。

$\neg$結合。これに關する有限的解釋は記號$\supset$の場合よりも遙かに困難である。有限的解釋とは、超限的命題を、既に有限且つ眞なるものと認識されたあるものの新しい表示とすることである。ところで超越的觀點からは、$\neg\mathfrak{A}$は或ものが成立することではなく、單に否定的に命題$\mathfrak{A}$が成立しないと主張する。併し次の如き積極的解釋が可能である。――「は$\neg\mathfrak{A}$、$\mathfrak{A}$の成立の假定から僞なるものが歸結される證明が存在するならば、有意味且つ眞である」と。かくて記號$\neg$結合の解釋は、$\supset$結合のそれに還元せられ、$\neg\mathfrak{A}$は$\mathfrak{A}\supset 1=2$と同意味なりとも考へられるのである。而して此見解と否定の推理法則とは調和させることが出來る。卽ち、否定の推理法則を右述の見解に依り轉釋すると「$\mathfrak{A},\Gamma\to\mathfrak{B}$及び$\mathfrak{A},\Delta\to\mathfrak{B}\supset 1=2$から$\Gamma,\Delta\to\mathfrak{A}\supset 1=2$が導出される」となる。此推論は許される。何となれば、排$\supset$除に依つて$\mathfrak{A},\Gamma,\mathfrak{A},\Delta\to 1=2$、更に構造變換に依り$\mathfrak{A},\Gamma,\Delta\to 1=2$、これから$\supset$導入を用ゐて$\Gamma,\Delta\to\mathfrak{A}\supset 1=2$を得るのである。かくして否定の推理法則は$\supset$推論に歸着させれる。併し記號$\neg$を記號$\supset$に歸着させたのであるから、記號$\supset$にまつはる困難は記號$\neg$にも移されてゐること を忘れてはならない。

然るに二重否定の排除の法則は、右記の$\neg$解釋と調和させ得ない。$(\mathfrak{A}\supset 1=2)\supset 1=2$の成立から$\mathfrak{A}$の成立を如何にして導出し得るか全く解釋が不可能であるからである。この法則は、$\neg\mathfrak{A}$の否定に依り肯定的命題$\mathfrak{A}$を間接的に證明することを可能にするのであるが、その場合に$\mathfrak{A}$そのものの直接的積極的證明が全く不可能であるこ

とがあり得るのである。故に二重否定排除の法則は、∨∃に與へた如き有限的解釋を一般的には容れる餘地を全く持つてゐない。

周知の樣に、直觀主義者は數論に於ても超限的命題に對する「二重否定排除の推理法則」を完全に拒否してゐる。(これは拒中律の否定とも唱へてゐる。) 記號∀＆∃∨に與へた我々の解釋は直觀主義者のそれと本質的には完全に一致することは容易に確かめられる。注目すべきは、直觀主義者は⊃結合を何等の躊躇もなく許容してゐることである。¬結合は既述の如く、⊃結合に歸着せしめられ、¬𝔄は「𝔄が成立しない」の代りに、「𝔄が absurd なり」と解釋されてゐる。併し二重否定排除の推理法則のみが直觀主義者に依り拒否されるが、ゲンツェンに依れば、それに劣らず⊃結合も確證に乏しいものなのである。

ところでK・ゲーデルは、* 超限的命題を特別の仕方で解釋して、超限命題𝔄を持つ「二重否定排除の推理法則」を各任意の數論的證明の過程のうちから完全に消去してしまつた。かくして超越的見地に立つ数論は直觀主義的數論に還元せしめられたのである。

* K. Gödel, Zur int. Arith. u. Zahlenth. (Ergeb. eines math. Kolloq. Heft. 4. 1933. S. 34—38.)

併しゲンツェンの無矛盾性證明では「二重否定排除の推理法則」の無矛盾性が困難なく證明されるのである。(後を見よ。)

だが、實際の數論の出現する證明中の推論は殆んどすべてが有限的に解釋されるから(吟味は省略する)無矛盾性證明の意義は、實際に提出される推論の基礎付けよりも寧ろそれ自身に於て可能なる推論の基礎付けのうちに存在すると云ふべきであらう。(未完)

(一九三七、四、一四)