自然數論の無矛盾性證明（承前）

——G・ゲンツェンの業績——

近藤洋逸

七

無矛盾性證明の目的は、數論の證明のうちに出現する確證的ならざる推論（前節を見よ）をそれと比較して確證的なるものに還元するにある。而して證明の方法は、要するに、終結式として $\mathfrak{A}\&\neg\mathfrak{A}$ の形の式が出て來ぬことを示すにある。若し體系に矛盾ありとすれば如何なる式でも導來されるからである。

證明を簡單ならしめるため導來から記號 $\vee\exists\supset$ を除去する。即ち、

$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ は　$\neg((\neg\mathfrak{A})\&\neg\mathfrak{B})$　に依り

$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ は　$\neg(\mathfrak{A}\&\neg\mathfrak{B})$　に依り

$\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ は　$\neg\forall\mathfrak{x}\neg\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$　に依り

おきかへる。上段の各式は下段の各式と夫々論理的にも內容的にもエキバレントであるから。

この置換に依つて論理的基本式列は同じく論理的基本式列となることは簡單に證明される（證略）。數學的基本式列に就ても同樣である。

構造變換、及び記號 $\vee\exists\supset$ を含まぬ限りの推理法則は上述の置換に依り不變であるが、若し含むときは變化するから次の如き修正が必要となる。

$\vee$導入。「$\Gamma\rightarrow\mathfrak{A}$」から「$\Gamma\rightarrow\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$」は置換に依つて「$\Gamma^*\rightarrow\mathfrak{A}^*$」から「$\Gamma^*\rightarrow\neg((\neg\mathfrak{A}^*)\&\neg\mathfrak{B}^*)$」となる。＊記號は置換の結果を示す。これは次の如くして導出する。基本式列に依つて

$$(\neg\mathfrak{A}^*)\&\neg\mathfrak{B}^* \rightarrow (\neg\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}^*)\&\neg\mathfrak{B}^* \quad\cdots\cdots(1)$$

(1)から & 除去を用ゐて

$$(\neg\mathfrak{A}^*)\&\neg\mathfrak{B}^* \rightarrow \neg\mathfrak{A}^* \quad\cdots\cdots(2)$$

前提 $\Gamma^*\to\mathfrak{A}^*$ に構造變換を施すと

$(\neg^*\mathfrak{A})\&\neg\mathfrak{B}^*,\ \Gamma\to\mathfrak{A}^*$ ……………………(3)

(2)(3)から否定の推理法則に依つて目的の式

$\Gamma^*\to\neg((\neg\mathfrak{A}^*)\&\neg\mathfrak{B}^*)$

を得る。

$\vee$除去。これは置換に依つて「$\Gamma^*\to\neg((\neg\mathfrak{A}^*\&\neg\mathfrak{B}^*)$ 及び $\mathfrak{A}^*,\ \Delta^*\to\mathfrak{C}^*$ 及び $\mathfrak{B}^*,\ \Theta^*\to\mathfrak{C}^*$ から $\Gamma^*,\ \Delta^*,\ \Theta^*\to\mathfrak{C}$ を得る」となる。これは左の如くして導出する。基本式列から

$\neg\mathfrak{C}^*\to\neg\mathfrak{C}^*$ ……………………(1)

(1)の構造變換で

$\mathfrak{A}^*,\neg\mathfrak{C}^*\to\neg\mathfrak{C}^*$ ……………………(2)

前提 $\mathfrak{A}^*,\ \Delta^*\to\mathfrak{C}^*$ と(2)から否定の推理法則を用ゐて

$\Delta^*,\ \neg\mathfrak{C}^*\to\neg\mathfrak{A}^*$ ……………………(3)

(1)を構造變換して

$\mathfrak{B}^*,\ \neg\mathfrak{C}^*\to\neg\mathfrak{C}^*$ ……………………(4)

前提 $\mathfrak{C}^*,\ \Theta^*\to\mathfrak{C}^*$ と(4)から否定の推理法則で

$\Theta^*,\ \neg\mathfrak{C}^*\to\neg\mathfrak{B}^*$ ……………………(5)

(3)(5)から&導入を用ゐて

$\Delta^*,\ \neg\mathfrak{C}^*,\ \Theta^*,\neg\mathfrak{C}^*,\ \to(\neg\mathfrak{A}^*)\&\neg\mathfrak{B}^*$ ……………………(6)

(6)から構造變換で

$\neg\mathfrak{C}^*,\Delta^*,\Theta^*\to(\neg\mathfrak{A}^*)\&\neg\mathfrak{B}^*$ ……………………(7)

前提 $\Gamma^*\to\neg((\neg\mathfrak{A}^*)\&\neg\mathfrak{B}^*)$ から構造變換に依り

$\neg\mathfrak{C}^*,\Gamma^*\to\neg((\neg\mathfrak{A}^*)\&\neg\mathfrak{B}^*)$ ……………………(8)

(7)(8)から否定の推理法則を用ゐて

$\Delta^*,\Theta^*,\Gamma^*\to\neg\neg\mathfrak{B}^*$ ……………………(9)

(9)から二重否定排除の法則で

$\Delta^*,\Theta^*,\Gamma^*\to\mathfrak{C}^*$ ……………………(10)

(10)から構造變換を用ゐて目的の式

$\Gamma^*,\Delta^*,\Theta^*\to\mathfrak{C}^*$

を得る。Ǝ導入、Ǝ排除は$\vee$導入、$\vee$排除と全く同様に論ぜられるから省略する。

⊃導入。置換に依り「$\mathfrak{A}^*,\Gamma^*\to\mathfrak{B}^*$ から $\Gamma^*\to\neg(\mathfrak{A}^*\&\neg\mathfrak{B}^*)$」となる。これは左の如くして導出する。論理的基本式列

$\mathfrak{A}^*\&\neg\mathfrak{B}^*\to\mathfrak{A}^*\&\neg\mathfrak{B}^*$ ……………………(1)

から&排除を用ゐて

$\mathfrak{A}^*\&\neg\mathfrak{B}^*\to\mathfrak{A}^*$ ……………………(2)

$\mathfrak{A}^*\&\neg\mathfrak{B}\to\neg\mathfrak{B}^*$ ……………………(3)

(3)から構造變換に依り

$$\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A}^* \& \neg\mathfrak{B}^* \to \neg\mathfrak{B}^* \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4)と前提 $\mathfrak{A}^*, \Gamma^* \to \mathfrak{B}^*$ から否定の推理法則で

$$\Gamma^*, \mathfrak{A}^* \& \neg\mathfrak{B}^* \to \neg\mathfrak{A}^* \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(5)から構造變換を利用して

$$\mathfrak{A}^* \& \neg\mathfrak{B}^*, \Gamma^* \to \neg\mathfrak{A}^* \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(2)(6)から否定の推理法則に依り目的の式

$$\Gamma^* \to \neg(\mathfrak{A}^* \& \neg\mathfrak{B}^*)$$

を得る。

⊃排除に就ても同樣。

斯くして∨∃⊃を除いた導來を得る。

八

式列の還元(Reduzieren von Sequenzen)

式列に對して「還元の規則を與へ得る事」(Angebbarkeit einer Reduziervorschrift) なる概念は内容的な眞の概念(Richtigkeitsfegriff) を形式化せるものであり、命題の有限的解釋を與へる。要するに、還元とは式列の内容の眞理性を變へることなしに、より簡單な式列へと歸着させる操作である。次の如きものが擧げられる。——

(Ⅰ)式列が自由變項を含むときは、それを同一の、然し任意の數記號でおきかへる。

(Ⅱ)式列が自由變項を含まぬが、最小項を含むときは、それを其函數値でおきかへる。例へば 4＋1 は 5 でおきかへる。(勿論、函數は決定可能的に定義されてゐる。)

(Ⅲ)式列が自由變項も最小項をも含まぬが、それの後式が $V_x f(x)$ の形を持つときは、それを $f(n)$ でおきかへる。此處に n は任意の數記號。

(Ⅳ)式列が自由變項も最小項をも含まぬが、其後式が $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$ の形を持つときは、これを $\mathfrak{A}$ 或は $\mathfrak{B}$ でおきかへる。

(Ⅴ)式列が自由變項も最小項も含まぬが、其後式が $\neg\mathfrak{A}$ の形ならば、$\neg\mathfrak{A}$ を $1=2$ でおきかへ、且つ $\mathfrak{A}$ を前式に添加す。

(Ⅵ)以上のいづれでもない場合には、後式は最小式である。勿論それに含まれる述語は決定可能的に定義されてゐるものとする。故に當の最小式は、それの含む述語の定義を基礎として、眞僞を決定し得る。

(Ⅶ)式列が自由變項も最小項も持たず、其後式が眞なる最小式であるか、又は後式が僞なる最小式(例へば $1=2$) であり、且つ前式の一つが僞なる最小式であるとき

は式列は明かに眞であり、故に還元は不用である。斯かる形の式列は終結形(Endform)をもつと稱す。

扨、式列は自由變項も最小式をも持たず、後式が僞なる最小式であり、且つ前式のいづれも僞なる最小式でないときには次の三つの場合が分けられる。

(Ⅷ)若し前式が ∀𝔵f(𝔵) ならば、これの後にf(𝔫)を添加する。但し𝔫は或數記號。而して ∀𝔵f(𝔵) は除去するか、又はそのまゝ保留する。

(Ⅸ)若し前式が 𝔄&𝔅 ならば、これの後に𝔄或は𝔅を添加する。𝔄&𝔅 は除去するか、又は保留する。

(Ⅹ)若し前式が¬𝔄の形をもつときは、後式を𝔄でおきかへる。¬𝔄は除去するか、又は保留する。

以上が個々の還元 (Reduktionsschritt) の各タイプである。

扨、結合記號 ∨ ∃ ⊃ を含まぬ式列に對する還元の規則(Reduziervorschrift)とは、それを基礎として式列が有限回の還元(Ⅰ)から(Ⅹ)まで)に依つて、たとへ如何に還元の過程のうちに任意性があらはれようとも(還元(Ⅰ)(Ⅲ)(Ⅳ)を見よ)、常に眞なる終始形に「還元される」(reduzieren) ところの規則である。任意性は右記の還元(Ⅰ)(Ⅲ)(Ⅳ)此外にはなく、如何なる選擇をなすかは其都度一定の規則で決定される。例へばf(𝔫)の𝔫を如何に選ぶとか、∀𝔵f(𝔵) を除去するか否かとか。

次に、還元(Reduzieren)の概念の說明を與へる。先づ變項を持たぬ眞なる式列の還元に就て。變項も記號 ∨ ∃ ⊃ をも含まぬ式列にとつては、『還元の規則を與へ得ること』なる概念と、既述の「算出の操作(Ausrechnungsverfahren)に依る眞の概念とが合致することを示さう。――かゝる「眞なる」式列は次の規則に依つて終結形に還元される。先づそれに含まれる項を其の數値でおきかへ、若し其時終結形が現れぬならば、更に還元の規則に依つて式列をより少い命題結合記號を含む「眞なる」式列へと變形して行く。これは常に可能である。即ち、(Ⅳ)(Ⅴ)に依る還元ではこの要求は明かに充される。(Ⅷ)(Ⅸ)(Ⅹ)の場合には次の如き還元を用ゐればよい。即ち、若し 𝔄&𝔅 の形の僞なる前式があるときは、𝔄又は𝔅が僞でなければならぬ。故に 𝔄&𝔅 を𝔄又は𝔅でおきかへればよい。又、¬𝔄の形の僞なる前式があるときは、¬𝔄を除いて

後式を𝔄でおきかへる。

　右記のいづれの還元操作を施しても、明かに眞なる式列が生じ、且つそれの含む命題結合記號は減少する。この操作を有限回繰返せば終結形に到達する。

　逆に、還元規則の與へられた式列で、しかも變項を含まぬ式列が、眞であることは、右に述べた還元操作に依つては僞なる式列は常に僞なる式列に移行すること（これは簡單に證明される）、及び還元(IV)にては還元に依つて生ずる式列が僞なる如くに𝔄又は𝔅を選擇し得ることから明白である。

　以上の考へは、考察される式列が有限個の數にのみ關係するV記號を持つ場合に、簡單に移すことが可能である。この場合にはVは&と同樣に扱へばよいのである。

　然し對象領域が無限のときは、しかく簡單にはすまされなくなる。かゝる領域に於ては凡ての式が必ずしも決定可能とは限らぬから、還元(VIII)(IX)(X)に於て變形される前式そのものを留保せねばならぬことがあるからである。

　例。「フェルマーの大定理は眞であるか或は眞でない」に還元を施す。右の命題を形式化すると

$$\rightarrow\neg\{[\neg\mathrm{V}x\mathrm{V}y\mathrm{V}z\mathrm{V}u\,\neg(u>2\ \&\ x^u+y^u=z^u)]$$
$$\&\ [\neg\neg\mathrm{V}x\mathrm{V}y\mathrm{V}z\mathrm{V}u\,\neg(u>2\ \&\ x^u+y^u=z^u)]\}$$

先づ還元(V)に依り

$$[\neg\mathrm{V}x\mathrm{V}y\mathrm{V}z\mathrm{V}u\,\neg(u>2\ \&\ x^u+y^u=z^u)]$$
$$\&\ [\neg\neg\mathrm{V}x\mathrm{V}y\mathrm{V}z\mathrm{V}u\,\neg(u>2\ \&\ x^u+y^u=z^u)]\rightarrow 1=2$$

次に還元(IX)を二回適用して

$$\neg\mathrm{V}x\mathrm{V}y\mathrm{V}z\mathrm{V}u\,\neg(u>2\ \&\ x^u+y^u=z^u),$$
$$\neg\neg\mathrm{V}x\mathrm{V}y\mathrm{V}z\mathrm{V}u\,\neg(u>2\ \&\ x^u+y^u=z^u)\rightarrow 1=2$$

更に還元(X)を用ゐて

$$\neg\mathrm{V}x\mathrm{V}y\mathrm{V}z\mathrm{V}u\,\neg(u>2\ \&\ x^u+y^u=z^u)$$
$$\rightarrow\neg\mathrm{V}x\mathrm{V}y\mathrm{V}z\mathrm{V}u\,\neg(u>2\ \&\ x^u+y^u=z^u)$$

この論理的基本式列は後に述べる還元規則に依つて終結形にかへられる。

　次に、記號∨∃⊃の排除（既述）に依り既に變形された導來に含まれる凡ての式列に對して還元規則が與へられ得ることを證明しよう。若しこれが可能であるならば無矛盾性證明が得られるのである。何となれば若し

$\to\mathfrak{A}\&\neg\mathfrak{A}$ ……………………(1)

の形の式列が導來されるならば&排除に依り

$\to\mathfrak{A}$ ……………………(2)

(2)から構造變換で

$\neg 1=2\to\mathfrak{A}$ ……………………(3)

また(1)から排&除で

$\to\neg\mathfrak{A}$ ……………………(4)

(4)から構造變換で

$\neg 1=2\to\neg\mathfrak{A}$ ……………………(5)

(3)(5)から否定の推理法則を用ゐて

$\to\neg\neg 1=2$ ……………………(6)

(6)から二重否定の排除に依り

$\to 1=2$ ……………………(7)

(7)はもはや還元の規則をもたぬ。しかも終結形をもつてゐない。蓋し $1=2$ は僞であるからである。故に還元規則が與へられ得るならば其體系からは(7)の如き式列は導來され得ず、從つて其の無矛盾性が保證される。

議論を還元規則の問題へもどす。

先づ數學的基本式列に對しては其の還元規則が與へられ、しかも還元(Ⅷ)(Ⅸ)(Ⅹ)に於ては變形される前式が除去され得ると假定する。斯かる還元規則は凡ての通常の數論的公理に對しては容易に與へ得る。先づ記號⊃&を記號¬を用ゐて排除し、次に還元(Ⅲ)に依つて∀記號を除き、それに屬する變項を任意の數記號でおきかへる。更に還元(Ⅷ)で述べたと同樣な操作を施すと、明かにそれから生ずる式は「眞」である。

論理的基本式列の還元規則は次の如くである。——式列 $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ が與へられたとする。先づ還元(Ⅰ)に依り自由變項を任意の數記號で置換し、還元(Ⅱ)を用ゐて最小項を其値でおきかへる。この操作を最小項が無くなるまで繰返す。斯くして得られた式列を $\mathfrak{A}^*\to\mathfrak{A}^*$ とする。次に後式 $\mathfrak{A}^*$ に還元(Ⅱ)(Ⅲ)(Ⅳ)を適用して最後に後式が $\neg\mathfrak{B}$ の形、或は最小式となるまで還元する。還元(Ⅲ)(Ⅳ)に於て代入される數値は任意でよい。斯くて後式が眞なる最小式となれば還元は完成す。併し若し後式が僞なる最小式となれば、還元(Ⅲ)(Ⅴ)(Ⅸ)(Ⅱ)を前式 $\mathfrak{A}^*$ に施す。そして後式に對すると全く同じ變化を與へる。故に代入される數 n も後式のそれと同一とするのである。然るときは前式は後

式と同一の僞なる最小式となり、斯くて終結形に到達する。次に若し後式が$\neg\mathfrak{C}$ならば

$$\mathfrak{A}^*\to\neg\mathfrak{C}$$

に還元(V)を施して

$$\mathfrak{A}^*, \mathfrak{C}\to 1=2$$

前式$\mathfrak{A}^*$に還元を與へ

$$\neg\mathfrak{C}, \mathfrak{C}\to 1=2$$

還元(X)に依り

$$\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$$

$\mathfrak{A}$は$\mathfrak{A}^*$よりも命題結合記號を少く含むから、右の操作を續けるときは、還元が有限回で完了することは明かである。

扨、以下の所論に於て屢々用ゐられる式列に就て還元を與へよう。

$\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}$. 還元(I)(II)を適用して $\mathfrak{A}^*\&\mathfrak{B}^*\to\mathfrak{A}^*$. これは論理的基本式列 $\mathfrak{A}^*\&\mathfrak{B}^*\to\mathfrak{A}^*\&\mathfrak{B}^*$ の還元の中途に現れる。前を見よ。

$\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$ に就ても同樣。

$\forall x f(x)\to f(t)$ も還元(I)(II)に依り $(\forall x f(x))^*\to(f(t))^*$ を得る。ところで此式列は基本式列 $(\forall x f(x))^*\to(\forall x f(x))^*$ の還元の途中に出現する。

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\to\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$. 還元(I)(II)に依り $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*\to\mathfrak{A}^*\&\mathfrak{B}^*$. 還元(IV)に依つて $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*\to\mathfrak{B}^*$, 又は $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*\to\mathfrak{B}^*$ を得る。以下の還元は論理的基本式列 $\mathfrak{A}^*\to\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*\to\mathfrak{B}^*$ のそれと同じ。

$\mathfrak{A}, \neg\mathfrak{A}\to 1=2$ は還元(I)(II)に依り $\mathfrak{A}^*, \neg\mathfrak{A}^*\to 1=2$. 還元(X)に依つて $\mathfrak{A}^*\to\mathfrak{A}^*$. これは論理的基本式列である。

$\neg\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$. 還元(I)(II)に依つて $\neg\neg\mathfrak{A}^*\to\mathfrak{A}^*$. $\mathfrak{A}^*$に還元を與へて眞なる最小式となれば終結形となる。若し$\neg\mathfrak{C}$の形となれば還元(V)に依り、$\neg\neg\mathfrak{A}^*, \mathfrak{C}\to 1=2$. これから還元(X)を用ゐて $\mathfrak{C}\to\neg\mathfrak{A}^*$. 更に還元(X)を適用して $\mathfrak{C}, \mathfrak{A}^*\to 1=2$. $\mathfrak{A}^*$に還元を施すと此式列は $\mathfrak{C}, \neg\mathfrak{C}\to 1=2$. この式列は既に述べた。更に若し後式が僞なる最小式となるときは、$\neg\neg\mathfrak{A}^*\to\mathfrak{A}^*$に還元(X)を施して $\to\neg\mathfrak{A}^*$. 之に還元(X)を適用して $\mathfrak{A}^*\to 1=2$. これから構造變換を用ゐて $\mathfrak{A}^*, \neg\mathfrak{A}^*\to 1=2$. この式列は前出。

以上で式列に對する還元が與へられた。

九

導來に對する還元。

任意の導來された式列を還元するためには、その式列を含んだ全體の導來に於て當該式列に對して還元の仕方を規定せねばならない。このために先づ導來の概念を少しく變樣しておく。

導來の概念の變樣。既述の定義と相異なるところは導來の終結式列(Endsequenz)(導來の最後に出て來る式列、換言すれば導來に依つて演繹される式列である)が前式を含んでもよいとするところにある。また記號∀∃⊃が含まれてゐない。更に導來の各式列はたかだか一個の式列の導出(推理法則を用ゐての)に使用される。

舊定義の導來を同一の終結式列を持つ右述の新定義の導來に變へるには、後方から漸次に多數回使用されてゐる式列をその都度それの導來のために用ゐられる式列と共に書きあげればよい。

數學的基本式列は既述のそれに對する還元規則の要求を滿足せねばならない。更に數學的基本式列から還元に依り導出された式列をも數學的基本式列として許すことにする。

論理的基本式列としては $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\to\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$, $\forall\mathfrak{x}\mathfrak{f}(\mathfrak{x})\to\mathfrak{f}(\mathfrak{t})$, $\mathfrak{A}, \neg\mathfrak{A}\to 1=2$, $\neg\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ の形をもつ任意の式列、及び此等から還元を用ゐて導出される式列をかぞへる。(これらは凡て還元に依つて舊定義の論理的基本式列に歸着させられる。前出。)

舊定義の構造變換はもはや許されない。

推理法則としては次の四箇がある。その適用に依つて導出された式列を歸結(Ergebnis)、それから歸結の出て來る式列を前提(Prämisse)と呼ぶ。

先づ「∀導入」及び「完全歸納法」がある。但し前提が a 以外に自由變項を含まぬ場合には、a を含まぬ式列に最小項の値を代入したものをも∀導入或は完全歸納法として認める。但書の特殊の場合とは卽ち

「$\Gamma\to\mathfrak{f}(a)$ から $\Gamma^*\to(\forall\mathfrak{x}\mathfrak{f}(\mathfrak{x}))^*$ を得る」

及び

「$\Gamma^*\to(\mathfrak{f}(1))^*$ 及び $\mathfrak{f}(a), \Delta\to\mathfrak{f}(a+1)$ から $\Gamma^*, \Delta^*\to(\mathfrak{f}(\mathfrak{t}))^*$ を得る」である。茲に＊を附けた式は最小式に數値を代入して計算した式である。

第三の推理法則として「⊃導入」がある。卽ち――「Γ,

$\mathfrak{A} \to \Gamma = 2$ から $\Gamma \to \neg\mathfrak{A}$ を得る。」

最後に連鎖推理法則(Kettenschluss)。——任意の形の式列の一系列(少くとも一式列を含む)から次の形の式列が出て來る。卽ち、歸結の後式は系列に屬する或式列の後式である。若し僞なる最小式のときは、或他の僞なる最小式であつてもよい。歸結の前式としては、そこから後式が採つて來られた式列の前式、及び系列に於てこの式列に先行する式列の前式のすべてをかぞへる。但し同一の式が現れるときは一個を殘して他は取り去る。而して、或式列の前式がこの式列に先行する式列の後式と同一なるときは その前式を除去する。また歸結の前式には任意の式を添加してもよい。最後に、歸結の束縛變項は他の束縛變項でおきかへ得る。

扨、連鎖推理法則に依つて舊定義の導來(勿論還元に依つて $\vee\exists\supset$ は除去されてゐる)を終結式列を變化することなくして 新定義の導來に變へることが出來る。卽ち、構造變換はすべて 連鎖推理法則の 特殊の場合である。また導來の新定義の際に排除された 推理法則はすべて 連鎖推理法則と 新しく導入した基本式列に依つて導出されるのである、例へば「&導入。」$\Gamma \to \mathfrak{A}$ 及び $\Delta \to \mathfrak{B}$ 及び $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$(論理的基本式列)から連鎖推理法則を用ゐて $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$ を得る。他の場合も同樣。故に新しい定義の導來は舊定義の導來よりは 效果の及ぶ範圍に於ては狹小ではない。從つて 新定義の導來に關してのみ還元を考へれば充分である。

連鎖推理法則は眞なる推論を 形式化したものに 過ぎない。この連鎖推理法則に依つて多くの推論の Nacheinander がまとめられて Nebeneinander となるのである。

以上で準備を終り、導來の還元に就て述べよう。先づ導來に對して 還元の概念を定義し、 次にこの還元に依つて 導來が同じく導來に變はること、 而して 終結式列は次の如くに變形されることを證明しよう。——「自由變項は任意の數記號でおきかへる。最小項は その數値でおきかへる。更にこの式列に對しては既述の式列の還元(III)(IV)(V)及び(VIII)(IX)(X)のいづれかをたかだか一回施す。」

導來の還元の仕方は、終結式列が式列の還元(I)(III)(IV)の際に起る選擇の自由性をもつ場合を除けば、一義的にきまる。但し この選擇が 一度び行はれるときは還元の仕

方は一義的となる。

導來の終結式列が還元(VII)に依つて終結形を持つときは、導來に對する還元は不用であるから、以下に於ては終結式列が終結形を持たぬ場合にのみ考察する。還元は次の如く歸納的(rekursiv)に定義する。

導來の終結式列が基本式列の場合には既述の還元規則(前節を見よ)に依つて還元を施す。しかも自由變項及び項に對する置換を行ひ、更に夫に還元(III)(IV)(V)及び(VIII)(IX)(X)のうち唯一個のみを施す、然るときは上述の導來還元に對する要求は明かにすべて滿足される。

次は導來の終結式列が推理法則の適用の歸結とする。而して前提の導來に對しては既に還元の概念が定義され、且つ此還元は還元に對する上述の要求が滿足されてゐると假定する。然るときは導來の全體に對して還元を定めるために次の二段の準備工作(自由變項及び最小項の置換)をする。——先づ終結式列の自由變項を任意の數記號でおきかへ、且つ導來の全般に亙り此變項を同一の數記號でおきかへる。他の自由變項は1でおきかへる。但し∀導入及び完全歸納法にあらはれる特別の自由變項a、卽ち前提 $\Gamma \rightarrow \mathfrak{F}(a)$ 及び $\mathfrak{F}(a), \Delta \rightarrow \mathfrak{F}(a+1)$ 及び此式列の導來に屬する凡ての式列に於てはaは置換すべからず。次に、導來に現れる最小項を凡て其數値でおきかへる。但し∀導入及び完全歸納法の變項aを含む前提及びこれの導來に屬する凡ての式列では置換すべからず。

導來にこの項置換を行つた結果は、∀導入及び完全歸納法に就ての既述の但書に依つて、依然として∀導入であり、完全歸納法であり、斯くて導來は依然として導來となる。

また上記の自由變項の置換に依り導來が矢張り導來となる理由は、第一に∀導入及び完全歸納法に現れるaに對する條件(aが$\Gamma\,\Delta\,\mathfrak{F}(1)\,\mathfrak{F}(t)$に含まれぬこと)、第二に導來の各式列はたかだか一個の推理法則の適用の前提としてのみ用ゐられることである。この二個の事實に依つて置換される變項と然らざる變項とを完全に分離し得ることになり、斯くして推理法則の適用の場合に誤謬が起り得なくなるからである。

以上の準備の後、導來に對して還元の仕方を次の規則に依つて定義する。——(若し終結式列が終結形に達

すれば還元は完了する。）第一に、導來の終結式列が$\forall$導入或は$\exists$導入の歸結である場合には、その歸結を省略して前提を新たに終結式列とする。尚ほ、$\forall$導入の場合には其前提の全導來に於て自由變項aを任意の數記號で、最小項をそれの數値でおきかへる。

以上の操作に依るも導來は矢張り導來の條件を保持し、且つ其の終結式列は還元(III)(V)のいづれか一つに依り還元される。

終結式列が完全歸納法の歸結である導來に際しては、項tの數値が數記號nであたへられ、且つnが1に等しくない時には、$n-1$に等しい數をmで表す、前提 $\mathfrak{F}(a), \Delta\rightarrow\mathfrak{F}(a+1)$ の導來に於て自由變項aを順次に數記號1 2……mで置換し、そのために生じた最小項にそれの數値を代入する。かくして導出された式列 $\Gamma\rightarrow[\mathfrak{F}(1)]^*$ 及び $[\mathfrak{F}(1)]^*, \Delta\rightarrow[\mathfrak{F}(2)]^*, \ldots\ldots [\mathfrak{F}(m)]^*, \Delta\rightarrow[\mathfrak{F}(n)]^*$から連鎖推理を用ゐて全導來の終結式列 $\Gamma, \Delta\rightarrow[\mathfrak{F}(n)]^*$ を得る、＊記號は最小項の置換に依つて生じた變化を示す、既述の準備的な項の置換と今述べた置換の爲にすべての最小項は除去されて、表示tは同一となる。nが1に等しいときはaに1を代入して $\Gamma\rightarrow[\mathfrak{F}(1)]^*$ 及び $[\mathfrak{F}(1)]^*, \Delta\rightarrow[\mathfrak{F}(1)]^*$ から連鎖推理を用ゐて歸結 $\Gamma, \Delta\rightarrow[\mathfrak{F}(1)]^*$ を得る。明かに以上の導來還元は既述のそれに對する條件を滿足してゐる。

最後に、導來の終結式列が連鎖推理法則の歸結である場合を論ずる。主前提(Hauptprämisse)とはそれの後式が終結式列の後式となるものである。終結式列の後式が僞なる最小式ならば、最初に僞なる最小式を後式として持つて現れる前提を主前提とする。終結式列の或前式が前提から採られてゐないときは新しく添加されたと考へる。

扨、主前提は終結形を持たぬ。何となれば若し終結形を持つとすると、終結式列が終結形をもつこととなりtrivialとなるからである。故に主前提に還元の仕方をきめねばならぬ、四個の場合を分けて取扱ふ。

1° 導來の還元に際して主前提が(III)(IV)(V)のいづれかの一つの還元を適用される場合、（卽ち還元が式列の後式に行はれる場合には、終結式列にも同じ式列還元を施し、「選擇」は任意とする。次に主前提の導來に導來還元を施す。「選擇」は今述べた選擇と同一にする。以上

の操作に依り主前提及び終結式列の後式は再び同一となり、連鎖推理は依然として連鎖推理となる。斯くしてこの場合の還元は終了。

2° 導來の還元に際して主前提の還元(VIII)(IX)(X)のいづれかが施され、還元の行はれた當の前式が終結式列の前提として採用される場合、或は同一の式が既に終結式列の前式のうちに含まれてゐるとの理由で省略される場合には、主前提の導來に還元(VIII)(IX)(X)のいづれか一個を行ひ、而して連鎖推理が再び連鎖推理となるために、終結式列に適當な式列還元(VIII)(IX)(X)を施す。卽ち若し當の前式が終結式列に採用されるときは、この終結式列に全く同じ式列還元を行ひ、若し當の前式が先行するものと合致するために除去されるときはその先行するものへ同じ還元を施す。

3° 導來の還元に際し主前提$\Delta \to \mathfrak{D}$に還元(VIII)(IX)(X)のいづれか一つが行はれ、その當の前式(Δに含まれる)が式列の系列に於て先行する前提$\Gamma \to \mathfrak{B}$の後式と一致するとの理由のために消去されて、全導來の歸結の前式に這入つて來ない。而して此前提$\Gamma \to \mathfrak{B}$は導來の還元の際に還元されるとする。然るときは必ず還元(III)(IV)(V)のいづれかに依り變形されねばならない。($\mathfrak{B}$は最小式でないからだ。)(全導來の終結式列を$\Theta \to \mathfrak{D}$とする。$\mathfrak{B}$が$\forall x \mathfrak{f}(x)$, $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$, $\neg \mathfrak{A}$のいづれかの形を持つに從つて三つの場合に分けて考察する。先づ$\mathfrak{B}$が$\forall x \mathfrak{f}(x)$の形をもつときは、主前提は還元(VIII)を受け、前式$\mathfrak{f}(n)$が添加され、$\forall x \mathfrak{f}(x)$は保留されるか又は消去される。それに對應して前提$\Gamma \to \mathfrak{B}$は(III)に依つて變形され、且つ同一の$n$を選んで$\Gamma \to \mathfrak{f}(n)$とする。此處で三個の連鎖推理を作る。第一のものはもとの連鎖推理の前提に於て$\Gamma \to \forall x \mathfrak{f}(x)$の代りに$\Gamma \to \mathfrak{f}(n)$を置いたもので、歸結として$\Theta \to \mathfrak{f}(n)$が導來される。第二のものは、もとの連鎖推理の前提に於て$\Delta \to \mathfrak{D}$の代りに還元(VIII)に依つて之から還元された$\mathfrak{f}(n), \Delta^* \to \mathfrak{D}$をおき、歸結として$\Theta, \mathfrak{f}(n) \to \mathfrak{D}$を得る。第三の連鎖推理は、$\Theta \to \mathfrak{f}(n)$及び$\Theta, \mathfrak{f}(n) \to \mathfrak{D}$から$\Theta \to \mathfrak{D}$が導來される。かくして導來は還元に依つて矢張り導來となる。

$\mathfrak{B}$が$\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$, $\neg \mathfrak{A}$の形の場合にも同樣に還元を規定して導來の關係を保持することが出來る。

4° 最後に、導來の還元に於て主前提が變らず、或は

主前提の還元が3°の場合と同樣に(VIII)(IX)(X)のいづれか一つに依り變形されるが、當の前式$\mathfrak{B}$を後式として含む前提$\Gamma\rightarrow\mathfrak{B}$が變らぬ場合には、この不變な前提の導來に還元を行へばよい。然しこの不變な前提の導來の還元が特に3°の場合であるときは(此場合は終結式列、即前提は不變である)矢張り3°の還元を行ふが、其處で不變な前提を歸結とする第三の連鎖推理を作ることなしに、この不變な前提の代りに此第三の連鎖推理の前提を前提としていれた連鎖推理を作つて、全導來を締めくくる。明かにその歸結は依然として不變にとゞまる。

以上で導來の還元の定義は終はる。

十

導來の還元の有限完了の證明。

與へられた任意の導來に對して、前節の還元を逐次に行ふのであるが、還元の一段毎に一層簡單な導來が生じ、遂に有限回で導來の終結式列が終結形に到達することを證明せねばならない。このためには、凡ての導來に其の構造の錯雜度を表す順序數を對應させ、還元の一歩毎に順序數が小くなることを示さねばならぬ。併しこれだけでは還元の有限性は保證されない。例へば完全歸納法と∀導入を使用すると$\rightarrow\forall\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$が導來されるが、これは、それの$\mathfrak{x}$に特殊の數記號を代入した場合、及び完全歸納法の分解に依つて生ずる特別の場合(注意すべきはこの特殊の場合のあり得べき個數が無限であることである)のいづれよりも複雜である。故に對應させられる順序數は超限順序數でなければならず、それの全體を歸納的に把握するためには超限歸納法が必要となり、これの妥當性の證明が要求される。

先づ順序數を歸納的に(rekursiv)に定義する。順序數は正の有限小數であつて次の如く定義される。整數部分0の順序數の小數部分は有限個の1か、或は唯一個の2から成る。相異なる少くとも一個の整數部分ρ($\rho\geqq 0$)の順序數からのみ整數部分$\rho+1$の順序數が得られるが、その小數部分は、與へられた順序數の小數部分を大さに從つて最大なるものから最小なるものに順次に横に書き並べ、其の各々の小數部分の間に$\rho+1$個の0を補入したものである。この順序數の形成原理に依つて、整數部分$\rho+1$の順序數が與へられたときは、それが如

何なる整數部分ρの順序數から形成されたかは一意的に定まる。

例。0.1111, 1.1102, 1.2, 2.111, 2.2010010011, 3.2010020001

任意の與へられた導來に對して順序數を一意的に對應させるのであるが、その順序數は次のものに限られる。卽ち、小數部分に於て相續く0の最大個數は1より大であり、而してν個の0で離された各部分は一般には2を以て始まるが、最後の部分のみは單に1のみから成る。

終結式列が基本式列である導來には2.2001……1の形の順序數を對應させる。但し相續く1の個數は式列に含まれる命題結合記號の個數よりも1だけ多い。

前提の導來に既に順序數が與へられてゐることを假定して、終結式列が推理法則の歸結となつてゐる導來に對して順序數を定義する。先づ終結式列が∀導入或は¬導入である導來には前提の導來に對する順序數の後に1を添へた數を對應させる。

終結式列が連鎖推理の歸結である導來に對しては、凡ての前提の導來の順序數の小數部分を考へ、そのうちで相續く0の最大個數をνとする。若し相等しい小數部分がそれらのうちに存在するときは、ν+1個の0と1個の1、ν+1個の0と2個の1、等々を次々に添加して相互に區別する。斯くして小數部分はすべて相異なるものとなるが、これらの相異なる凡ての小數部分を大さの順序に横に書き並べ、その各々の間にν+2個の0を補入し、更に最後にν+2個の0と1個の1を加へたものを、全導來に對する順序數の小數部分とする。次に定義さるべき整數部分をρとし、既に定義された小數部分中の相續く0の最大個數をnとし、今考察してゐる連鎖推理の任意の前提の導來に對する順序數(これは假定に依つて既に定義されてゐる)の整數部分をρ'、及び其小數部分中で相續く0の最大個數をn'とし、最後に主前提に先行する任意の前提の後式に含まれる命題結合記號の個數をaとすると、求められるρを次の條件①②③を滿足する最小の自然數とする。——

① $\rho-n=\lambda\geqq 0$

② $\lambda'-\lambda\leqq 2$　　但し $\lambda'=\rho'-n'\geqq 0$

③ $k-2a \geqq 0$

終結式列が完全歸納法の歸結である導來に對應する順序數の小數部分は 2011……100……1、相續く1の個數は前提の導來の順序數のうち最大の小數部分に於いて照應する箇處の相續く1の個數よりも1だけ多いとする。相續く0の個數は右述の小數部分のうち相續く0の最大個數νよりも2個だけ多いとする。次に整數部分ρの決定であるが、右述の小數部分中で相續く0の最大個數をnとし、前提に對應する順序數の整數部分をρ'、それの小數部分中で相續く0の最大個數をn'、且つ(I)に含まれる命題結合記號の個數をaとすると、ρは次の條件を滿足する最小の自然數であるとする。——

① $\rho-n=k\geqq 0$

② $k'-k\leqq 2$　　但し $\rho'-n'=k'\geqq 0$

③ $k-2a\geqq 0$

斯くして作られた順序數は明かに既述の要求を滿足する。

以上の如く導來に順序數を對應させるときは、導來に還元を作つて新しく生じた導來の順序數は一般にもとの導來の順序數よりも小となる。即ち整數部分は大とはならぬ。小數部分はより小となる。但し自由變項と項の置換をして既に終結式列が終結形となつた場合を除く。また小數部分中の相續く0の最大個數は不變である。但し導來還元3°の場合のみは0は2個增加する。茲に注意すべきは、以上の結果は式列の還元(Ⅷ)(Ⅸ)(Ⅹ)の際の件の前式を消去することを數學的基本式列に就て假定して始めて可能であることである。

右の事項の證明は各々の場合に容易に可能であるから此處では省略する。元來、順序數を還元に依つて小くなる樣に定義しておいたのであるから右の事情は云はゞ當然の結果とも言へるのである。

最後に還元の有限性を證明するのであるが、それのために若干の準備をする。

整數部分ρを持つ順序數αには、αの小數部分を最大數として作つた整數部分$\rho+1$の順序數のシステム$\mathfrak{S}(\alpha)$を對應させる。明かに整數部分$\rho+1$の順序數は一意的に斯かるシステム$\mathfrak{S}(\alpha)$に屬する。またα_1よりもα_2が大であれば$\mathfrak{S}(\alpha_1)$の各數が凡て$\mathfrak{S}(\alpha_2)$の各數よりも大であることも明白

である。かくて α の順序と $\mathfrak{S}(\alpha)$ の順序とは相對應する。

次に $\mathfrak{S}(\alpha)$ 内部の數の順序を考察する。$\mathfrak{S}(\alpha)$ の内部の最小數は $\alpha+1$ である。$\mathfrak{S}(\alpha)$ のこれ以外の數は、整數部分 $\rho+1$ を持ち且つ $\alpha+1$ よりも小なる數の全體と次の如き仕方で順序に關して同型的(イソモルフ)に對應する。——$\alpha+1$ 以外の $\mathfrak{S}(\alpha)$ の各數は、$\alpha+1$ の後に $\rho+1$ 個の 0 と、更に整數部分 $\rho+1$ を持ち且つ $\alpha+1$ よりも小なる或順序數の小數部分を添加して得られる。故に明かに $\mathfrak{S}(\alpha)$ に屬し、且つ $\alpha+1$ より大なる數のシステムの數と、$\alpha+1$ よりも小なる順序數(勿論それの整數部分は $\rho+1$)のシステムの數とは順序に關して同型的に對應する。

例。$(\alpha+1)_m \underbrace{0\ldots\ldots0}_{\rho+1\text{ケ}} \beta_m \underbrace{0\ldots\ldots0}_{\rho+1\text{ケ}} \mathfrak{S}_m \leftrightarrow \beta_m \underbrace{0\ldots\ldots0}_{\rho-1\text{ケ}} \mathfrak{S}_m$

但し添數 m は當の數の小數部分を示すとす。

以上の準備の後、愈々既述の順序數の系列に於て超限歸納法が成立し得ること(超限歸納法の定理)を證明しよう。卽ち、上述の順序數はすべて、それをその增加する大さの方向に進行(durchlaufen 目を通すの意味であるが簡單のため進行と譯した)することに依つて次の意味で到達可能(erreichbar)である。先づ第一の數 0.1 は到達可能である。第二に、β より大なる凡ての數が到達可能であるならば β も到達可能である。※

※ 注意せよ。この「到達可能」なる概念のうちには系列の極限を措定する超現的方法が本質的モメントとして含まれてゐることを。

證明。先づ 0.1 は到達可能である。故に 0.11 も、0.111 等々も到達可能である。故に一般的に完全歸納法に依つて——「0.2 より小なる數はすべて到達可能である。」從つて 0.2 も到達可能であり、かくて整數部分 0 を持つ數はすべて到達可能である。更に完全歸納法を用ゐる。卽ち整數部分 ρ $(\rho \geqq 0)$ をもつ順序數までの(それをも含めて)凡ての數の到達可能性が既に證明されてゐると假定して、整數部分 $\rho+1$ の順序數に關しても到達可能性が成立することを證明するのである。先づ整數部分 $\rho+1$ をもつ順序數の第一數(これの小數部分は明かに 1 である)は到達可能である。扨、整數部分 ρ の順序數の進行は既に假定に依り行はれてゐる。而してこの各々の數 α には整數部分 $\rho+1$ の數のシステム $\mathfrak{S}(\alpha)$ が對應する。このシ

ステムは先づ$\alpha+1$を含み、次に$\alpha+1$より小であつて且つ整數部分$\rho+1$を持つ順序數と順序に關して同型的なシステムから成る。かくて第一にシステム$\mathfrak{S}(\alpha)$のクラスと整數部分ρを持つ順序數の全體とが順序に關して同型であり、第二にシステム$\mathfrak{S}(\alpha)$內部の數(但し$\alpha+1$より大なる)は$\alpha+1$よりも小なる順序數(但し整數部分$\rho+1$を持つ)と順序に關して同型である。二重の對應關係が成立するのである。故に整數部分$\rho+1$をもつ數の進行は、整數部分ρをもつ數αを進行すると全く同じ仕方に於て、システム$\mathfrak{S}(\alpha)$を進行することになるのである。卽ち$\alpha+1$が到達可能であると認識したならば$\mathfrak{S}'(\alpha)$の他のすべての數も同時に到達可能である。このシステムを進行することは、$\alpha+1$より小であつて且つ整數部分$\rho+1$をもつ數のシステム(これは上述からも明かな如く$\mathfrak{S}(\alpha)$と同型的で且つ假定に依り既に進行されてゐる)を進行することと全く同じこととなる。故に整數部分ρを持つ數に既に行はれた進行を土臺として整數部分$\rho+1$をもつ數全體が進行される。數α_0より小なる數の全體(但し整數部分はρ)に對しては、整數部分$\rho+1$をもつ數α_0+1

に於てはシステム$\mathfrak{S}(\alpha$(但し$\alpha<\alpha_0$)に屬する數の全體が對應するのである。

右述の超限歸納法定理を使用すると還元操作の有限性は簡單に證明される。——

還元の有限性が順序數βよりも小なる順序數に對應する導來に對して證明可能とするときは順序數βに對應する導來の還元の有限性の證明も可能である。何となれば、還元に依つてβに對應する導來はより小なる順序數に對應する導來となる。或は終結形に到達する。故にβよりも小なる順序數を持つ導來の全體に對する還元の有限性から、βに對應する導來の還元の有限性が出て來る。從つて超限歸納法に依つて任意の順序數に對應する凡ての導來に對しても還元の有限性は成立する。

斯くて導來に對する還元の有限性が確證された。

十一

無矛盾性證明は確證的でない推論及び概念を確證的なるそれを以て基礎付けるところにある。故に前節に述べた無矛盾性證明が眞實の證明であるためには、其處に用ゐられた推論及び概念構成が確證的であることを

示さねばならないのである。これが第一の問題である。次は有名なゲーデルの定理（既に述べた）に關聯して、無矛盾性證明に用ゐられた推論が初等算術學的方法であるか否かを吟味せねばならない。何となれば若し其推論が初等算術的方法にのみ據つてゐるならば、斯かる方法に依る無矛盾性證明は全自然數論の體系に及ぶことが原則的に不可能であることを、ゲーデルの定理は宣告してゐるのであるから。

確證性の問題に關して最も重大なのは有限性證明であるが、これは後に述べる。これ以外の箇處で用ゐられた證明の手段は明かに「有限的」、即ち確證的である。このことは勿論「證明」は出來ない。何となれば「有限」なる概念は一意的には限界付けられぬからである。個別的に吟味する以外に方法はない。

無矛盾性證明の對象は或記號であり、表示である。例へば項、式、導來、順序數、自然數等々。此等の對象の定義はすべて、自然數の定義と同樣に、構成的法則に依つてなされてゐる。この法則は一歩一歩と逐次に對象を作り出し行くのである。而して此際に前提されねばならぬのは、形式化された數論に於ては一定の「函數」、「述語」、「公理」が與へられてゐるが、此等が凡て決定可能的に定義されてゐると云ふことである。このことに依つて⊃關係（„wenn-so“）が無矛盾性證明に於て超限的に使用されるが、併し明かに無害である。何となれば、かの「函數」「述語」「公理」等が實際に確立され、決定可能の條件が滿足されてゐることが示された場合に始めてかの證明を有意味であると考へればよいからである。

扨、我々の無矛盾性證明に於ては、此等の對象に對して更に一系列の函數、述語（これ等も同じく決定可能的である）が適用された。例へば函數としては「導來の終結式」、述語としては「少くとも∀記號又は∃記號を一個含む」等があつた。其他、「導來から還元操作に依り、選擇の自由性を一定に規定して、生ずる導來」「導來の順序數」の如き函數も決定可能的に定義されてゐた。

更に完全歸納法に依つて「すべての式列に對して」とか、「すべての導來に對して」とかの命題が證明されたが、これの妥當性は個々の式列或は導來に對して決定可

能的なのである。例へば「導來から還元に依つて生ずる圖形は再び導來であり、終結式列の變形は或條件を滿足する」とか、「還元に依つて順序數が小くなる。」

概念「すべて」も無矛盾性證明で使用されるが、それを超越的に(an-sich)把握しようと、有限的に把握しようと、推論自身にとつては差別を生じないから、今の場合は問題とならない。

また超限命題の否定も一回使用されてゐるが、全く無害な形に於てゞある、(還元規則と無矛盾性との關係を論じた箇處である、第八節を見よ) 何となれば、否定される命題は全く初等的な矛盾に導くから否定されたのであるから。而してこの否定を、「無矛盾性」の代りに積極的肯定的な表示「各導來は $\mathfrak{A}\,\&\,\neg\mathfrak{A}$ の形をもたぬ(このもたぬなる否定的表現は超限的に使用されてゐないことに注意せよ)終結式をもつ」を使用することに依つて避けることも出來るのである。

最後に還元の有限性證明に就て吟味しよう。先づ超限歸納法の定理に使用された概念「到達可能」が全く特殊の性質を持つてゐることに注意しなければならない。

それが或與へられた數に對して成立するか否かは一般的に決定可能ではない。寧ろ其概念は、或特定の數に對してそれが成立することが證明されると同時に意味を獲るのである。この事情は超限命題に有限的解釋を與へようとした場合(前を見よ)と同樣であり、何等の危險も存在しない。概念「到達可能」の定義は「βよりも小なる凡ての數が既に到達可能であると認識されてゐるときは、βも到達可能である」の意味でなされてゐるのである。こゝには循環はなく、定義は完全に構成的であるとゲンツェンは云ふ。* 其處では「すべての」なる規定が使用されてゐるが、これは有限的に把握することが出來る。卽ち構成的法則で作り出された全體にのみ關係してゐると考へる。*

* 「βよりも小なるすべての數に對して到達可能」と云ふ場合にβが規定のモメントとして入りこんでゐることに注意せよ。βの性質がβを含んだ全體(卽ちβ及びβより小なる數の全體)を基礎として規定されてゐる。βが所謂第二種(zweite Art)の超限順序數であるときは、其處にB型の循環(前を見よ)が行はれてはゐないか。其處にはA型循環は存在しないが、完全に逐次的

構成のみでは處理しきれぬものがありはしないか。

一般的に言つて、系列の全體を措定して作られる第二種の超限順序數が果して直觀主義者やゲンツェンの考へる如くに純構成的のものであるか。些か疑問がないではない。自然數列を措定してその極限としてωを得るが、このωが果して可無限のみを認める立場から合理的に把握されるだらうか。自然數そのものは大なる方向へと生成するであらうが、數列全體の極限そのものは生成しない。其處では割り切れぬものがありはしないか。

勿論、これと對蹠的に實無限を可無限と切離して把握することは誤であらう。實無限と可無限との統一に於てのみ(この統一の具體的形態が重要である)無限を考へるべきであらう。併しこのためには先づパラドックスの原因を實無限に求めようとする偏見から解放されることが先決條件であらう。

扨、超限歸納法定理の證明に於ては、其處で使用されてゐる「到達可能」なる概念の定義のために全順序數をそれの增大する方向へと進行しなければならない。整數部分0の順序數即ち0.2より小なる順序數の無限の全體に就ては、證明をこの全體のうちで任意に進める(fortführen)ことが出來ると言ふ意味で、換言すれば進行(Durchlaufung)を可無限の立場で處理すればよい。この方法を證明の全過程に於て保持すべきであると。*

* 此要求が果して滿足されるだらうか。ゲンツェンの順序0.2は系列0.1, 0.11, 0.111……の極限と考へるべきであらう。ところがこの系列內での進行と系列から0.2の進行とは本質的に區別さるべきものを持つてゐる。0.2には直接に先行する數がないからだ。單なる可無限主義では把握しきれぬものがありはしないか。ゲンツェンでは此等の事情が無視されてゐる。

次に、ρに就ての完全歸納法の際に超限的な歸納の假定が出現するが、これは既述の完全歸納法の有限的解釋(第六節參照)と全く同樣に解釋し得るから、確證的である。また推論「數α+1が到達可能であると認識されてゐるときは𝔖(α)の他のすべての數も到達可能である」に於ては „wenn-so" 關係が超限的に使用されてゐるが、併し此推論に用ゐられてゐる前提は假設的にではなく直接證明的に解釋し得る。即ちα+1に既に到達出來てゐるときは𝔖(α)の數も進行し得ると考へればよい。故に此處にも確證性がある。

最も注目すべき箇所は、ρ+1のシステム內の進行をρ

のシステム内の進行に歸着させる歸納法の論法である。ゲンツェンに依ると此場合にも相當の明證性 (Evidenz) が存在すると。先づ整數部分１２３等の場合を具體的に考察すると、この整數部分が大となつても原理的に新しいものは出て來ないことが判る。卽ち複雜度が增すとしても進行の仕方は基本的には不變である。進行は整數部分０の順序數の場合と同樣に可無限的に考へることが出來ると。*たゞ困難はρ數の進行を整數部分の小なる場合には見通すことが出來るが、一般の場合には非常に複雜となり、それに就ての表象がぼやけて來るところにある。併しこれでもρ＋１數の進行をρ數のそれで基礎付け得るには充分であると。

※ 問題は寧ろ前註でも述べた如くに極限を措定するところにあるだらう。

次に、超限歸納法を用ゐて還元の有限を證明する個處を吟味しよう。命題「導來に對する還元操作は、如何なる選擇を行ふも、有限である」は還元の個數の總體(これは無限である)に關して超限的に "es gibt" を含んでゐる。併し此命題は既述の「到達可能」の場合と全く同樣に、それが成立することが證明された各特殊の場合に於て始めて一定の意味を得るのである。故に有限的であると。

かくて有限性の證明は總體として確證的であるから、既述の無矛盾性證明に依つて自然數論の非確證的な部分を眞實に確證することが出來た譯である。

以上で第一の問題を終る。第二に、無矛盾性證明とゲーデルの定理(前出)との關係を吟味する。このためには證明論の對象(式、導來、等々)に自然數を對應させ、此等の對象に對する函數及び述語を、對應する自然數に就ての函數及び述語としなければならぬ。かくすると無矛盾性證明に用ゐられた推論は形式化された數論のうちで與へられたものとなる。たゞ有限性證明のみが特別の地位を持つてゐる。卽ちこれは自然數論の手段を以てしては表示出來ないのである。*故に我々の無矛盾性證明はゲーデルの定理の與へる制限と矛盾しない。

※ この表示不可能は全く極限を措定する方法が有限性證明で使用されてゐることに由來する。極限の措定は自然數論には全く存在しないから。若し極限の方法その

ものに疑問を附すならばゲンツェンの證明は崩壞を餘儀なくされるであらう。故にゲンツェンの成果を有意味ならしめるためには單なる可無限主義を踏み越え、實無限との統一に向はねばならないだらう。

扨、完全歸納法の特性は、これを除くときは式列の還元に必要な還元操作の回數に一定の上限を與へ得るところにある。完全歸納法が登場すると、この操作の回數が選擇に依存して任意に大となり得るのである。即ち式列 $\Gamma, \Delta \to f(t)$ に必要な還元の回數は、t の値である n に依存し、而してこの n はそれの含む自由變項に對して如何なる數記號を代入するかに從つて變化する。故にこの場合には $\Gamma, \Delta \to f(t)$ に必要な還元の個數には一般的に上限を與へることが出來ない。この理由からして從來の無矛盾性證明論が完全歸納法を完全な形態に於て對象とし得なかつたのである。

十二

無矛盾性證明の效果範圍。

無矛盾性證明にとつては、基礎におかれた形式的體系が當の數學體系、我々の場合では自然數論を實際に完全に包括してゐるか否かが重大である。實際の自然數論は形式的限界に依つて縛られてゐるものではなく、新しい概念構成及び新しい推論の適用に依つて擴張されて行く。故にこの進展に歩調を合せて無矛盾性證明も擴大して行かねばならない。ところが我々の無矛盾性證明はこの進展が可能なる樣に作つておいた。

例へば自然數に對して新しい函數乃至述語を導入するときは、それに對して決定の規則を與へねばならない。函數乃至述語に關聯して公理を導入するときは、これに對して還元の規則(第八節を見よ)を與へねばならない。此等の要求は、函數、述語の導入が普通の意味で正しく、公理が眞であれば(實際の數論に於てはすべて然りである)、容易に充されるのである。

理論の進展に由つて從來の形式的體系では表示不可能である如き新しい推論が生れることはあり得る。自然數論を含む形式的に限界された體系はすべて不完全であるから、それの眞なることが有限の手段で證明され得るが、しかもかの體系に屬する方法では證明不可能である如き初等的性質を持つた數論の命題がある。この

理由で無矛盾性證明の價値を疑ふものもあるが、この非難は私の證明には妥當しないとゲンツェンは言ふのである。卽ち、若し自然數論の命題を我々の形式的體系に屬しない推論で證明し得るならば、この命題に對して第八節に述べた數學的基本式列に對する還元規則に則つて還元の仕方を與へる。（卽ち公理として導入するのである。）かくして此命題は無矛盾性證明のうちに採り込まれるからである。

還元の規則（Reduktionsvorschrift）の概念は斯くの如くに甚だ一般的な性格を持ち、一定の推理法則の形式的體系に拘束されないで、眞理性（Richtigkeit）と謂ふ一般概念（これが一般に明晰な意味を持つ限り）の形式的表現なのである。

併し乍ら自然數論に數學解析の概念や推論を加へるときは、以上の無矛盾性證明は一般にはもはや此場合には擴張し得ない。我々の今の方法では克服不可能な原理的困難があるのだ。*

＊ 此の困難の原因をゲンツェンは說明してゐないが、これは彼がパラドックスと實無限とを無批判的に結び付け同一視し、可無限の立場を固守する點にあるのだらう。併し、我々にとつては實無限と可無限は統一されねばならない。實無限を視野から放逐するときは證明論は數學解析の問題に對して全く無力となるであらう。

ところで自然數論の無矛盾性證明を數學の他の分野に移すことが可能であらうか。對象が自然數と同樣な構成法則で與へられる部門には一般にこの移轉が可能である。（基本記號の有限系列が當の理論の對象を表示する部門である。）斯かる理論に對しては函數及び述語を決定可能なる定義で導入し、これに自然數論に於けると同じ論理的推論を適用すればよい。その無矛盾性證明は容易である。數記號の代りに對象記號が登場するのみ。本質的には何の變化もない。斯かる數學の部門としては、例へば代數學の本質的部分、コンビナトリッシュな位相幾何學、數學解析の或部分、證明論の本質的部分がかぞへられる。

負數、分數、不定方程式の自然數論への對象としての導入も全く同樣にして無矛盾性證明の埒内にひき入れることが出來る。この新對象を適當な仕方で自然數に

對應させることに依つて、此等の新對象に就ての命題を自然數に就ての命題に轉釋し得るからである。右述の他の數學の分野に就ても全く同樣である。「有限な記號の結合」を一對一の仕方で自然數のそれに對應させればよいのである。

× × ×

以上でゲンツェンの業績の本質的部門を云ひ盡した。この業績に就ての筆者の私見は註で述べたが、現在の我々にとつてはゲンツェン的方法の本質、それの限界の認識が重要である。現在の數學基礎論の中心課題は數學解析の無矛盾性證明であり、しかもゲンツェン的方法はこれに對して無力であると彼自身が告白してゐるからである。現在に於ては數學解析の無矛盾性證明を如何にすべきかと言ふ具體的見通しはついてゐない樣である。云はゞ五里霧中の狀態なのである。最近 R. Péter 女史がオスロの數學會議で第二階級の論理に關して Rekursion (これはヒルベルトの論文 „Über das Unendliche" に於て明かにされてゐる如く實數の理論に密接に關聯してゐる。)を論じたとの報告はあるが、その內容は發表されてゐない。

いづれにせよ、數學解析の克服には恐らく證明論の方法の一大轉回が必要であらう。第一に可無限の立場を越えることが肝要ではなからうか。このためには實無限とパラドックスを同一視する偏見から解放されねばならないであらう。そして此事はパラドックスとNPVとの本質的差別の認識、特に後者の精密を必要とする。實にNPVの活躍こそ數學解析の活動の中心力である。NPVでは實無限と可無限が或意味で統一されてゐる。恐らく數學解析の無矛盾性證明はNPVを基軸として旋回するのではないだらうか。(完)

一九三七・四・二七

拙稿を草するに當り示された三田學兄の厚意に對して深謝します。