數學「基礎論」

——その基本問題と意義——

近藤洋逸

數學「基礎論」の起源はライプニッツに求めることも出來るだらう。或はプラトンなどのギリシャ時代までさかのぼることも出來るかも知れない。諸科學のうち數學は天文學などの補助科學として最も早く發達をとげ、從つてその基本概念に就ての反省、所謂「哲學的基礎付け」も他の科學に比較して遙かに古い事柄であらう。然し乍らそれが所謂「基礎論」として、特殊の發達をとげたのは、前世紀末から今世紀にかけて、ラッセル、ブラリ・フォルティ、リシャル等の見出した『アンチノミー』に刺戟されてからである。前世紀後半、既にペアノ、ド・モルガン、ブール等の手により、數學の基本概念が分析され、それに記號が與へられ、數學は記號の體系であるといふ思想さへ、一部の論者によつて主張されてはゐた。この傾向はクロネッカー等の「數學の算術化」の主張と相まつて、前世紀末次第に姿を現して來た數學の抽象化の一潮流の表現と考へることも出來る。だがそれが一箇の「基礎論」として一つの部門を形成したのはアンチノミー問題以後である。

アンチノミーは如何なる根據から發するのか。アンチノミー問題の手がゝりとなつた集合論は如何なる公理系をとり、制限を加へれば、アンチノミーから逃れることが出來るか。これまで確實性の典型と考へられてゐた數論や數學解析も果してアンチノミーから安全であるか。等々の疑問が浮び上り、これらは數學そのものと直接に關係あるため、一部の數學者、例へばブラウワー、ワイル、ヒルベルト等の異常の注意をひき、アンチノミー問

題の解決に手を染めさせた。

アンチノミーは、元來、無限集合に『すべて』といふ概念を無制限に適用するところから發したのであるから、『基礎論』は古來の難問題である無限性の概念を中心として展開せざるを得なかつた。こゝに單なる技巧的に處理出來ない基本的な問題がある。無限集合が自然數集合の如く所謂可附番である場合のアンチノミー問題はG・ゲンツェンにより一應解決された(一九三六年)。彼は自然數を基礎領域とする自然數論の無矛盾性、アンチノミーの非存在を證明したのである。然し無限集合が實數集合の如く、その濃度が高まるときは、所謂連續性問題と關聯して、至難の問題であり、解決の暗示さへ見出されてゐない。

「基礎論者」は今一度自己の出發點に立歸り自己の立場そのものを再吟味する必要はないだらうか。その必要を感じないのだらうか。

先づ所謂「基礎論者」の見た數學基礎論の現狀を述べ、次にその現狀の呈示する諸問題を「基礎論」の方法と關聯させつゝ吟味したい。これが小論のささやかな意圖である。

＊「基礎論者」として上述のG・ゲンツェンを選んだ。彼の要領好き綜合報告 G. Gentzen, Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung. Deutsche Mathematik. Jahrg. 1938, Heft 3, SS. 255–268 によつた。

一

アンチノミーの解決のため種々の策が講ぜられた。例へば何處に誤謬推理がひそんでゐるかを示さうとした。然し乍ら、この試みは何等の滿足すべき結果に到達しなかつた。また斯樣な解決は將來に於ても望みうすきものである。蓋し、アンチノミーにあらはれる困難な事情は、思惟の單純な誤謬推理にもとづくものではないと考へられるから。たゞ此處で確實に言ひ得ることは、アンチノミーの出現が無限性の概念と密接に關聯してゐるといふことである。

純粹な有限的な數學の部門に於ては、それが正確に構成されてゐる限り、何等の矛盾も生じ得ないといふこと

が、演算を有限回繰返すことによつて現實に確め得る。若し有限領域に於てアンチノミーが生ずるとしても、それは概念構成の不明瞭さに起因するにすぎないのである。斯様な不明瞭は、直ちに概念構成を明確にすることによつて除かれる。

アンチノミー解決のため種々の方策が案出されたが、その最も簡單なものは、數學に用ゐられる許すべき推理と許すべからざる推理との間に境界をひき、アンチノミーに到達する如き推理は許すべからざるものとして、排除される。斯様な試みの代表的なるものは、例へばツェルメロ、フレンケル、フォン・ノイマン等の公理論的集合論、またホワイトヘッド、ラッセルのプリンチピア・マテマティカの體系であらう。フォン・ノイマンは „nicht zu gross“ といふ條件に適合する概念のみを許し、ホワイトヘッド、ラッセルは集合によつて要素の存在を規定する所謂 „imprädikatives Verfahren“ を許すべからざるものとした。

この方法は實際上には非常に有用ではあるが、原則的には滿足しきれぬものがある。(必ずしも有用とは言へぬ事情がなくはない、プリンチピア・マテマティカの體系では、上述の如き論法を拒絶したことから、體系が分裂に陥り、この困難切拔けのため還元性公理を作爲的に導入しなければならなかつたといふ様な事情もあつた。)

第一、境界は可成り恣意的である。これはアンチノミーにあらはれる「誤謬」を精確に示し得ないといふ事情から必然的に生れる結果である。

第二、斯様に許された推理の領域内にも、矛盾が生ずるかも知れぬといふ懸念がある。勿論、既に存在するアンチノミーを恐らくは徹底的に除いたであらうと思はせる様な力強い論究を與へることは出來るであらうが、だが、それにも拘らず、古典的な數學解析の中にも可能な矛盾がかくされてゐるのではないかといふ危險を原則的に理論的に除去したとは思へない。これまで矛盾が發見されなかつたといふことはあまり論據にはならない。といふのは、數學者が實際に扱ふものは、それ自身に於て論理的に可能な概念構成の非常に複雑なもののうちの極

く一部分に限られてゐることを思へば容易に首肯出來るであらう。

「境界づけ」の最も徹底した首尾一貫したものは、所謂直觀主義が與へてゐる。これはブラウワー、ワイルによつて定式付けられた。この立場の基本テーゼは次の如く述べられる。——數學に於ける無限概念は、無限集合がまへもつて、それ自身に於て存在し、而て數學者に依つて言はゞ見出されるといふ樣に（この立場をゲンツェンは An-Sich-Auffassung と呼んでゐる。存在的立場とでも意譯しておく）解釋されてはならぬ。無限の全體は構成的に、卽ち有限なるものから出發して一歩一歩と構成され得るものであり、無限なるものは決して完成されるものではなく、有限なるものの無際限な擴張の可能性に對する表現にすぎぬと。

この法則は直觀主義者によつていま新しく見出されたものではなく、前世紀に於て顯著となつた「數學の算術化」の傾向にも旣に見出される。然しアンチノミー問題にこの立場を、法則を、適用したのは直觀主義者の特色であり、構成主義の最も尖鋭なる代表者と言ひうるだらう。

右のテーゼを採用すれば、アンチノミーは忽ち消滅する。常にアンチノミーに於ては無限集合の存在的見地が使用されてゐるからである。だが他方に於ては、その代償として、この構成主義からは、現代の數學に於て常に使用されてゐる若干の重要な論法が禁止されざるを得なくなつてくる。

例へば間接的存在證明。——古典的立場（存在的立場）からは或性質Eをもつ自然數の存在を間接的に次の如く證明することが屢々ある。如何なる自然數も性質Eを持たぬとすると、このことから矛盾が生ずると。

斯樣な證明法は構成主義によつて否認される。蓋し上述の證明に於ては總ての自然數といふ無限集合の假定が用ゐられてゐるからである。これは構成主義者から考へると無意味である。何となれば、自然數集合は完成された無限の全體としては決して與へることが出來ないものであり、たゞ未完成な絶えず延長され得る系列としてし

か與へられぬから。故に構成主義者は、性質Eを持つ自然數を實際に直接に見出し、與へるか、又はそれの計算法を示すことを必要と考へる。

以上の如く、アンチノミーによつて惹起された困難から最も整合的な逃路を見出したといふことに、ヒルベルト派の基礎論者は直觀主義の最大の功績を認めるのである。だがそれにも拘はらず、ヒルベルト派基礎論者は構成的立場に相應しないものを總て數學から無意味なりとして拒否する徹底的直觀主義に對しては、次の如き抗議を提出する。(この抗議は極端な直觀主義者以外のものは誰しも認めてゐるものである。)この立場を採るときは、全古典解析學から、きれぎれの分野しか殘らぬ。多くの主要な根本命題が無意味として排除され、或は違つた仕方で把握されたり、或は違つた仕方で證明されねばならなくなる。更に定式化が多くの場合非常に面倒となり、證明は冗長となつて來る。存在證明、例へば『代數學の根本定理』は次の如く變形されねばならなくなる。――それの存在が主張されてゐる數に對して、それの計算の手續きが與へられ、それが不可能な場合は除外されねばならぬと。

斯樣な立場が全く必然的ならば、最大の犧牲をも我々は躊躇すべきではないであらう。だが果して斯る犧牲が不可避のものであらうか。

かくして我々はヒルベルトの立場に達する。彼は全古典數學の無矛盾性を精確な數學的なプロセスで證明することに依つて、それをアンチノミーの脅威から救ひ出さうといふプログラムを提出したのである。ヒルベルトの公理論又は證明論といはれるものはこの立場から發足する。

殘念乍ら、このプログラムの多くの部分が未遂行のまゝになつてゐる。斯樣な無矛盾性證明の困難さは、人々の想像以上に大であることがゲーデルの定理によつて明かとなつた。最も簡單な部門である數學解析を除外した自然數論の無矛盾性證明がゲンツェン*に依つてやうやく成功したに過ぎない(一九三六年)。古い個々の部分的結果はアッケルマン、フォン・ノイマン、エルブラン等に

依つて既に與へられてはゐるが、最も重大な數學解析の全體系に對する證明、この最も重大な且つ實践的な證明は未だに成されずにゐる。

* G. Gentzen, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. Math. Ann. Bd. 112 (1936) S. 493-565.

勿論、無矛盾性を行ふためには、すでに或數學的證明を前提し、これを使用せねばならぬことに注意すべきであらう。この證明手段の安全性の前提は必要である。更にこれ自身の無矛盾性證明を要求することは、無限の逆行をひきおこすにすぎない。絶對的な、卽ち無矛盾性證明は明かに不可能である。故に問題は、如何なる證明手段を前提して、證明するかといふことにある。

この解答は前に述べたことから自ら出て來る。――無限性の概念が構成的意味に於てのみ用ゐられてゐる證明手段を使用して差支へないが、無限性の存在的立場に據つて居り、從つて危險な性質を帶びてゐるものは注意して排除するといふことである。この制限はヒルベルトが『有限的立場』と呼んでゐるものに同じ性質のものである。無論、ヒルベルトが當初に眼中におき、『有限な證明手段』と考へてゐたものよりも更に廣い、更に進んだ證明法を無矛盾性證明のために使用するといふことは必要となるかも知れない。また必要ともなつたのである。然し、ともかく、この證明手段は無限性概念の構成的考へ方と調和すべきであり、それを不確實な危險な證明手段から原則的に峻別するところに、ヒルベルト流の證明論の本質がある。

ヒルベルトの主要な特色は、數學基礎論の問題を哲學から引離し、出來る限り數學自身の方法で扱はうとする努力にある。勿論、數學以外の前提をまつたく使用しないで、問題を解くことは出來ないが、ヒルベルトのプランはこれを最小に制限したといふところに彼の特徴がある。

要するにヒルベルト流の證明論の目的は、本質は、無限性の構成的立場と存在的立場との間の原理的相違を念頭において、如何にして、構成的立場に從へば推理に本質的に大なる確實性が與へられ、從つてこの推理を充分

に確實な基礎として選び、無限性の存在的立場で行はれてゐる數學の部分の無矛盾性を、それに歸着させることが出來るかを明かにしようとするところにある。

かくしてわれわれは哲學的論爭問題を議論の埒外に追ひ出して論究を進めることが出來る。蓋しこの種の問題の解決は數學の實踐に對して何等の影響をも與へず、却つて問題の狀態に不必要に惑亂させるだけであると、數學基礎論者には考へられるからである。こゝに彼等の立場の一つの特色があることを注意しておかねばならない。

かくの如き態度を何處までも徹底し得るや。また「基礎論」が現在當面してゐる最大の困難たる數學解析の無矛盾性證明に對する完全な無力は、斯樣な態度に幾分の關係があるのではなからうか。連續と不連續、構成主義と存在的立場との複雜な關係が其處にかくされてゐるのではなからうか。此種の問題は單なる技巧の手練では解決しきれぬものを含んでゐるのではないだらうか。

斯樣な疑問の展開は後半に語ることとして、次には所謂「數學基礎論」の現狀をいま少し詳細に敍述し、吟味の材料としよう。

二

ゲンツェンは數學の基礎の哲學的研究、卽ち所謂「數理哲學」から所謂「數學基礎論」を區別するために、後者に精密 exakt なる形容詞を與へてゐる。後者は、既に述べた如く、數學の基礎に就て數學的研究を行ふ數學の部門であると考へられるのである。この區別が嚴密に固守され得るかどうかは留保して、こゝでは、先づこの「基礎論研究」の重要な結果を述べることとする。

これらの研究の對象は、例へば、數學理論の公理系である。だが最近では特に論理的推理及び數學の證明法自身がその研究の對象となつて來てゐる。

「數學基礎論」(これはまた證明論とも超數學とも呼ばれてゐる)の主要課題は、アンチノミー除去の必要からそれが起つたといふ事情からして、當然にも無矛盾性證明である。然しそれ以外にも大きな問題として決定性問

題 Entscheidungsproblem を擧げることが出來る。卽ち、所與の理論に對して、それに屬する各命題の眞僞を決定し得る手續きを見出す問題である。

更に完全性問題 Vollständigkeitsproblem が擧げられる。これは、公理と推論とをもつた一定の體系が、一定の理論に對して完全であるか否か、言ひかへると、その理論に屬すると考へられ得る各命題が、かの公理と推理とを用ゐて、その眞僞が證明し得るか否かといふ問題である。

これらの主要問題と密接に關聯してゲーデルが一九三一年に證明を與へた若干の重要な基本定理がある。* この業績は異常な注目をひき、誤解さへ招いたほどである。

* K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. I. Mh. f. Math. u. Phys. 38 (1931). S. 173-198.

先づ無矛盾性證明に關する彼の成果を述べよう。これによると、純粹數論(數學解析を排除した數論)を含み、而して眞に無矛盾な數學理論の無矛盾性は、この理論自身に屬する證明手段を以てしては證明不可能であるといふことである。從つて勿論、この證明手段の一部分を以て證明し得ないのは言ふまでもない。

この定理は屢々、ヒルベルトのプログラムの遂行不可能を示すものであると解釋された。卽ち、無矛盾性證明に對して許された『有限的』『構成的』な推理は、すべて純粹數論のうちにあらはれ、そして精確に定式化され得る推理の一部のみをあらはすにすぎぬと考へたのである。とすれば勿論ゲーデルの上揭の定理によると、この樣な推理で以てしては、既に自然數論の無矛盾性さへ證明出來なくなるのは當然であらう。

だがゲンツェンはこの難關を次の如く考へてきりぬけた。無限の構成主義の立場と完全に調和しつゝ、しかも他方に於ては形式化された數論の範圍に屬しない推理法、否およそ一般にすべての形式的に制限された理論(卽ち一定の公理系と一定の推論とをもつた體系)の範圍を越え得る如き推理が存在することを示したのである。彼は集合論に出てくる『超限歸納法』を用ゐる。先づ自然數的な系列構成と極限の定義(例へば自然數系列の極限とし

てオメガ）に依つて所謂第二階級の數を構成する。そしてこの數領域に於て或一定の性質に就て超限歸納法が成立することを構成的に證明する。これによつて集合論にあらはれる危險から逃れることが出來る。次に自然數論に用ひられる各基本概念、公理、推論に適當に第二階級の數を對應させ、自然數論の全體系を第二階級數のうちにうつし込む。そしてこの第二階級數に上掲の超限歸納法を適用して、より大なる數に就て成立する或性質をより小なる數の性質に歸着させる。これを、それに對應する自然數論から考へると、より大なる數に對應するより複雜なる概念、命題の眞理性がより小なる數に對應するより簡單なる概念、命題の眞理性如何に還元されることになるのである。斯樣にして證明が遂行されるところにゲンツェンの無矛盾性證明の本質がうかがはれる。

彼の證明が何故に成功し得たかはまつたく次のことにつきると考へられる。卽ち自然數論に於てはそれの成立する集合のタイプは簡單であるが、この集合を基礎として成立する概念公理推論には大なる自由性一般性を與へられてゐるが、これに對應するゲンツェンの第二階級數理論では、それの成立する集合のタイプは前者のそれよりも遙かに複雜であり高度であるが、その代償として、この集合に於て許される概念公理推論には構成的に制限が加へられる。かくて一方に於ける領域のタイプの簡單如何と他方における概念構成、推論の自由性一般性とが巧みに組合され、簡單なるものは一般的なるものと、複雜なるものは特殊的なるものと結び付けられることによつて、兩理論（自然數論とゲンツェンの第二階級數理論）が巧みに對應づけられるのである。彼の證明の本質的なるものは以上につきる。

勿論このゲンツェンの證明の成功によつてゲーデルの定理が無價値になつたのではない。却つてゲーデルの成果は無矛盾性證明に對して消極的ではあるが、大きな暗示を與へたのである。卽ちゲーデルの定理によつて、如何なる手段を用ゐるならば、證明の目的に到着し得ないかが示されたからである。

ゲーデルのいま一つの結果は賓辭論理學（命題を一箇

の全體として未分析のまゝ扱ふ所謂命題論理學と異つて、命題を主辭と賓辭とに分析して、それを記號化して論ずる論理學）に關してゞある。彼は、非常に廣汎な數學的補助手段を用ゐても、この賓辭論理學の或命題は決定不可能であることを示したのである。

この定理は最近アメリカのチャーチに依つて更に鋭い形で證明された。彼は、非常に普遍的な概念『手續き』Verfahren を基礎において、賓辭論理學に對しては如何なる普遍的な決定の方法も一般的にはあり得ないといふこと、從つてこの場合には總じて決定性問題は解決不可能であることを示した。*

* A. Church, An insolvable problem of elementary number theory. Amer. J. Math. Vol. 58 (1936). p. 345-363.

然しこの結果は當然豫想される。若し賓辭論理學に對して決定性問題が解決されてゐるならば、古來の難問題、例へばフェルマの大定理も賓辭論理學では簡單に記號化されるから、それの妥當性如何が原理的に簡單に決定され得る筈である。だが斯様な決定方法が發見され得るといふが如きことはありさうもないと容易に推定されるからである。

だがこの推定を明確な證明によつて保證したのは何といつてもゲーデル、チャーチの功績と言はねばならない。

チャーチの證明の基礎となるものは、彼の用ゐた概念『計算手續き』Ausrechnungsverfahren を最も普遍的なりと假定したことである。だが若し誰かがそれとは異つた種類の計算手續きを見出したならば、決定性の解決が得られるといふことも考へられることは出來る。然しながらチャーチが與へた計算手續きは非常に普遍的なものであるから、それに含まれぬ如き種類の手續きを考へることは恐らく不可能と思はれる。彼がゲーデルと全く異つた出發をなし乍ら全く同一の結果に到達したといふことは彼等の結果の眞實さを裏書きするものと言へよう。

ゲーデルの第三の結果は完全性の問題に就てゞある。これによると、如何なる形式的に限界された*無矛盾な數學理論もそれに屬する手段を以てしても證明不可能なる

如き、しかも眞なる數論の命題が存在するといふ意味に於て不完全である。

＊ これの說明前出。

この興味ある結果は次の如く言ひかへることが出來る。如何なる數論の體系(公理系と推論との體系)によつても自然數の間に成立する關係のすべてを盡すことは出來ぬ。自然數の全性質をきはめるためには新しい推論を、新しい公理を絕えず要求するといふことである。

かくてゲーデルの成果は公理的方法の弱點を暴露した。

ところでこれまでの數學はすべて極く僅かの、しかも同じ樣な推理しか用ゐず、從つてそれの擴張の要求は理論的にはあつたが、實際に於ては存在しなかつたといふ注目すべき事實がある。これはゲーデルが與へた證明不可能な數論の命題が一定の目的のために技巧的に作られたものであつて實際には無價値な命題であるといふことと密接に關係があるかも知れない。

然しながらゲーゲルが一つの理論の無矛盾をいひあらはす命題はその理論の內部では證明不可能な命題であることを證明したのは非常に重要な結果である。これは無矛盾性證明に大きな示唆を與へる。卽ち無矛盾性證明のためには新しい推理の適用が必要であり、しかも構成的でなければならぬといふことである(實際の證明法のスケッチは前に與へておいた。)

次に集合論に關する重要な結果を述べておく。

アンチノミーから集合論を解放するためにそれに制限的な條件をおく所謂公理論的集合論に就ては前に簡單にふれておいた。ところでこの體系の一部、所謂『一般集合論』に對して最近アッケルマンが無矛盾性證明を與へた。彼はこの體系の一部の無矛盾性證明を純粹數論の無矛盾性に還元することによつて間接に證明を與へたのである。＊

＊ Ackermann, Die Widerspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre. Math. Ann. Bd. 114. (1937). S. 304-315.

一般集合論といふのは所謂ツェルメロ、フレンケル流の集合論公理系のなかから、無限箇の對象(勿論その理

論に屬する）の存在を要請する『無限性公理』を除いたものである。アッケルマンの證明は、集合論のこの部分に對して自然數より成るモデルを作ることが出來るといふ既に以前から知られてゐた事實をもとにしてゐる。

しかしながら無限性公理を附加するならば同樣の證明にまつたく望み得ないのである。この公理を導入するならば超可附番の濃度の集合がもち込まれて來るからであり、もはや自然數をもととするモデルをそれに對して作るといふ工夫が不可能となつて了ふからである。故にアッケルマンのこの結果は、ゲンツェンの證明の水準を突破したものとは言ひ得ないであらう。

これと關係があるのはスコーレムが一九二二年に始めて定式化し、「集合概念の相對性定理」と呼んでゐる命題である。* これは一見すると非常に奇妙に感ぜられ、しかも興味ある結果を與へた。この命題は、さきに述べた超數學の定理とは反對に、構成主義の領域に屬するものではなく、存在的立場の領域に屬する眞理である。この定理は超可附番の濃度を扱ふからである。然しこの事情はそれの價値を減殺するものではなく、却つて存在的立場に關係があるところに價値をもつてゐる。

* Th. Skolem, Einige Bemerkungen zur axiomat. Begründung der Mengenlehre. Verh. V. skand. Math.-Kongr. (1922), S. 217-232.
Ders., Über einige Grundlagenfragen der Mathematik. Skr. Norske Vid.-Akad. Oslo, I., mat.-nat. Kl. (1929), No. 4.

スコーレムの定理とは次のものである。――總じて一定種類の公理系に對して任意に高い濃度のモデルが存在するときは、その公理系を滿足させる可附番のモデルが既に存在しなければならぬと。

そしてこれまでの普通の公理系はすべて上述の一定種類の公理系に屬してゐるか、または適當に變形すればその種類とすることが出來るのである。

この定理を集合論の公理系に適用するときは次の結果が生れる。この公理系が或モデル（これの成立する濃度如何を問はず）によつて滿足されるならば、既にそれは可附番のモデルに依つて滿足されることが出來る。

この結果は公理論的集合論にとつて快適なものとは言へないだらう。この結果によると集合論に姿をあらはすすべての超可附番の濃度は單なる見せかけにすぎなくなるからである。蓋し斯樣な濃度をもつ集合があるとしても、それの代りに或可附番の集合をおきかへることが可能であり、しかもこれによつて凡ての命題の妥當性を變へないでおくことが出來るからである。

まことに奇妙な結果であり、矛盾が存在するかの樣である。公理論的集合論では、例へばすべての實數の集合が可附番でないことが證明されてゐる。自然數集合と實數集合との間には一對一の對應が存在し得ないことが證明されてゐるのである。この證明は集合論の創始者G・カントルの古典的な成果であつた。この知名な美事な結果が今やスコーレムの定理によつておびやかされてゐるかのやうである。

先づスコーレムに依つてこの集合論に對して與へられた可附番のモデルに就て考察してみる。このモデルは公理系の自然數を代表する對象及び實數を代表する對象、及びこの公理系によつて可能な諸對應を代表する對象を含んでゐる。そして各種類はたかだか可附番の對象を含んでゐる。それにも拘らず上掲のカントルの結果はこのモデルに於て成立する。何となれば、モデルのなかにあらはれてくる對應のうちには、『自然數』の可附番の代表を『實數』の可附番の代表に一對一に對應させる如き對應が存在しないからである。勿論、双方の代表が可附番であるからには斯樣な對應がそれ自身に於ては存在する。然しながらこの對應はまさしくモデルの中にあらはれてくる對應の中には見出されないのである。

實數の連續體(コンティヌウム)を超可附番集合の原型としてそれに考察を限れば右に述べた理解し難い事情はもつと容易に明瞭になるかもしれない。——連續體はそれ自身に於てあらかじめ與へられ、例へばすべての任意の無限小數の集合として與へられると考へるゲンツェンの所謂存在的立場に立つてみる。カントルは斯樣な集合の超可附番性を證明した。ところが數學が提示する數學解析の如何なる公理系も、この考へられた連續體の完全な把握に對しては

まつたく不充分なのである。何となれば、スコーレムの定理によると一定の公理系を基礎におくならば、この連續體は可附番のモデルでもつておきかへられ得るからである。斯う考へるとスコーレムの結果は、連續體乃至は更に高い濃度の非存在を示すものではなく、これらの濃度を把握するには人間の思惟が無力であることを示すものにすぎない。

抽象的な濃度の集合論がアンチノミーとスコーレムの相對性定理の難關から如何にして救ひ得るかどうかは將來の課せられた問題である。アンチノミーから逃れるために一定の公理系を基礎におけばスコーレムの結果によつて、斯樣な集合論は可附番以上の集合の本質を把握し得ない破目に陷る。反對にスコーレムの難關から逃れるつもりで概念構成を自由にまかせておけばアンチノミーの泥沼にひきづりこまれる。この兩者の挾擊からの逃路の探求をゲンツェンは將來に囑してゐる。

スコーレムの右に述べた結果は超可附番個以上の集合の存在を主張する公理論的集合論がその實は可附番の領域を出てゐないことを曝露したのである。ひとはこの故に彼の先驅者レーヴェンハイムとの名を連ねて、レーヴェンハイム・スコーレムのパラドックスとも稱へてゐるのである。

ところでゲンツェンは右に主張した如くこのパラドックスは人間的思惟の無力を物語るにすぎぬといつて、このパラドックスを解決したかの口吻である。

だが若し人間の思惟が高度の濃度をもつ集合に對して無力であるならば、如何なる理由から高度の濃度云々が口にのぼし得るのであらうか。またゲンツェンの主張する如く果して人間の思惟は可附番領域以上に出ることは不可能なりと運命付けられてゐるのだらうか。公理論的集合論は明かに超可附番集合の存在を主張するのであるから、若しスコーレムの結果に忠實であらうと欲するならば、右の公理論的集合論の主張は明々白々と僞ではないか。斯う考へてくると、ゲンツェンの「解決」と稱するものも我々を納得せしめるに物足りないものがある。然しながらこれらの疑問の展開は後半に譲るとして、こ

ゝでは「數學基礎論」代表者ゲンツェンの意見を傳へることに滿足することにしよう。

さてスコーレムの定理とゲーデルの不完全性定理を比較してみるときは、兩者はいづれも形式的に限界された公理系(勿論許された證明手段をも含めて)につきまとふ不完全性を示してゐることが判る。數學解析に對して如何に複雜な公理系を基礎におくとしても、常に證明不可能な數論の定理が殘るといふゲーデルの結果から出てくる事情は、スコーレムの定理によつて或種の說明を與へることが出來る。卽ちこの定理によると如何に複雜な公理系も根本的には可附番のモデルに、從つて自然數に關係付けられ得るのである。故にこれらの命題はすべて數論の命題に轉釋され、かくしてそれらすべての體系は根本的には數論にすぎなくなるからである。そして數論の公理系の不完全性を考慮にいれるならば、上揭のゲーデルの結果は容易に首肯出來るだらう。

スコーレムのいま一つの結果*は同じく數論に對する公理的方法の不完全性を暴露してゐる。卽ち自然數に對して上述の如き一般的種類の公理系があるとするとき、この公理系は自然數系列とイゾモルフでない樣なモデルによつても滿足させられるといふのである。

* Th. Skolem, Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems. Norske mat. forenings Skr., Ser. II. Nr. 1-12 (1933), S. 73-82. Ders., Über die Nicht-Charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslichen Zahlenvariablen. Fund. Math. 23 (1934), S. 150-161.

三

本節では、數學の諸部門のうちでも實踐的にもつとも重要な部門の一つである數學解析に於ける存在的立場と構成的立場との間の對立についていま少しく詳細に述べよう。特に實數及び實函數の概念構成の場合にあらはれて來る兩立場の差異に注目を向けることとする。

數學解析は實踐的に重要であるばかりでなく、「基礎論」にとつては當面最も重要な部門である。既に述べた

如くゲンツェンによつて自然數論の無矛盾性證明が與へられたことからして、自然數と同一の濃度をもつ集合、例へば代數的數の集合を基礎とする數論の無矛盾性も與へられる。卽ち可附番集合を基礎とする理論では適當の對應を工夫することによつて、當該理論の無矛盾性が自然數論のそれに歸着されるのである。ところで超可附番集合として最もよく知られ且つ重要なものは實數集合であり、この集合を基礎領域としてもつてゐる數學解析に向つて「基礎論」の注意が集中するのは當然のなりゆきである。そしてこの數學解析こそ、そしてその基礎にある實數集合こそ、これまでの「基礎論」を以てしては容易に解決出來ぬ難問題を提示してゐる。これの一端は前節に述べたゲーデル、スコーレム等の成果からもうかがはれるであらう。果してゲンツェンの考へる如く、超可附番集合が人間の合理的な數學的思惟によつて把握不可能のものであるかは、暫く問はないでおくとしても、現在の「基礎論」の根本的な惱みが實數集合、數學解析に發してゐることは誰しも認めざるを得ない。

こゝではまづ構成主義と存在的立場とが數學解析の部面にあつて如何なる姿の對立を示してゐるか、そして、「基礎論者」はこれを如何に解釋するかをあとづけてゆくこととする。

周知の如く、無理數の概念は次の如くして得られる。先づ0から1までのインターヴァルを二つの部分に分つ。次に各部分は更に二つの部分に分割される。等々………。この手續きを際限なく繰返すならば、我々は次第に微細になつて行くインターヴァルの分割を得る。斯樣なインターヴァル（各々はそれに先行するインターヴァルの部分になつてゐる）の系列は分割が進むに從ひ次第に點に近づいてゆく。この場合、存在的立場では完成された無限性への飛躍が起るのである。卽ち無限に長いかゝる系列が『實數』であると宣言する。

ところでこの見地からは若干の奇妙な結果（アンチノミーと聯關して出て來るものは除くとしても）が生ずる。一方では、カントルの周知の方法でこれらの實數は超可附番の集合をつくることが證明される。然るに他方

では、その都度提示されたり用ゐられるすべての命題、すべての定義、すべての證明は可附番箇である。これは常に有限箇の記號で表示されてゐる。

かくて我々は次の結果に到達せざるを得ない。卽ち、總じて個別的に定義出來ない實數が存在し、陳述することも證明することも不可能な、しかも眞なる命題がある。

この事情に更に上述のスコーレムの相對性定理を添加して考へると次のことがひき出される。總じて從來の全數學解析は、それを可附番のモデルに關係せしめるときも常にすべての部分に於て正當さを保持し得ると。

ここで自然に次の如き疑問が起つてくる。『超可附番連續集合』が以上の如く我々の思惟によつて完全に把握されないとき、それをもなほ實在するものと語り得る意味があるだらうかと。これは次節で觸れることとして、ここでは右の存在的立場と對蹠的な徹底した構成主義の立場から無理數は如何に扱はれてゐるかを述べて行く。

インターヴァルの分割の系列は前と同樣である。然しこゝではインターヴァルの完成された無限系列の概念は無意味なりとしてしりぞけられる。無限は可能性、有限なるものの無際限性(Unbegrenztheit)の表現にすぎぬとされる。故にインターヴァル分割を限りなく進め得るとは言ひうるが、然し無理數は得られない。分割の各段階に於て非常に密集した有理數の一定箇數が得られるのみであるからだ。この意味でクロネッケルは「無理數は存在せず」といふ周知の主張を唱へたのである。

然し乍らわが「基礎論者」はかくまで構成主義者として狹量である必要はないであらう。インターヴァルの系列を任意にさきざきまで規定し得る法則があるときは、無理數を所與として語つても不合理ではないだらう。

斯樣な法則は容易に與へることが出來る。例へば $\sqrt{2}$、一般に $\sqrt[n]{m}$、また超越數 π や e に對しても與へ得る。一般に數學解析に於て個別的に定義された數に對してはすべて法則が與へられるのである。卽ち當の數を任意に望まれただけの正確さで計算し得る所謂近似計算の方法がその法則となるのである。

然しながら構成主義に忠實であるためには、かくして

定義された『數』を愼重に扱はねばならない。卽ち斯樣な數を完成されたものと見てはならないのである。數の全體がこの完成された意味に於て與へられたのではなく、それを一歩一歩と精密化する法則が與へられてゐるばかりである。この法則自身は或有限なるものであり、無際限に長い數を或聯關に於て代表するにすぎない。そしてこの無際限に長い數は本格的には存在しないものと主張される。

斯樣な數概念を基礎として數學解析を組立てたのはワイルである。

* Weyl, "Kontinuum." Ders. Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. Math. Z. Bd. 10. (1921), S. 39–79.

この場合に遭遇する困難は、數の計算や定義のための手段を如何に制限するか、また制限すべきか否かにある。ワイルは最初は一定の制限を加へた。然し通常、直觀主義の側からは斯樣な一定の制限、限界付けは拒否されてゐる。そしてこの直觀主義の見解は最初のワイルのそれよりも事態によく卽してゐると考へるべきであらう。蓋し普遍妥當性を要求する制限付けといふものは、制限された公理及び推論の體系に對して前節に述べた困難を同樣の危險をひき起すからである。體系は常に擴張可能であり、擴張を要求するものであるべきである。しかもこれらは何等數學理論にとつて本質的な缺陷をあらはすものではない。實際に必要な且つ重要な場合に於ては數學的な推論の仕方（これを計算可能性 Berechenbarkeit と呼ぶ）を如何に考へるべきかは、當面した事態そのものの性質から明示され、一定の形態をとるからである。

チャーチが計算可能性の概念のもとに數學に使用される推論に精密な形態を與へたことは既に前節に於て述べた。これとは獨立にアメリカのテューリングがチャーチのそれと同値な概念を與へ、特に實數の場合に適用した。* 彼はすべての『計算手續』を包括する如き概念 Sammelbegriff を與へた。これに依つて第二節で述べた如き不可能性證明も遂行可能となる。然しながらこの概念のうちに包括されるすべてのものに就て、それが果し

て計算手續きであるか否かを決定することは不可能であるといふ事情がある。

＊ A. M. Turing. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. Proc. Lond. Math. 2, 42 (1937). p. 230-265.

さて直觀主義者ブラウワーは『自由選擇系列』freie Wahlfolgen の概念を導入して、實數の構成主義的概念を擴張した。實函數の概念を採用すればこの概念擴張に到達するのは容易である。

存在的立場に立つ數學によると、この函數は、各任意の實數に他の第二の實數を函數値として對應させる關係と考へられてゐる。ところでこのなかには完成された無限性の概念が三重に含まれてゐる。卽ち二箇の實數及び普遍的な抽象的な「對應」の概念の中に。

構成主義者は斯樣な立場には言ふまでもなく正反對の位置にある。彼等はまつたく異つた立場から出發する。最初に思ひつくのは、一つの實數を定義する各法則に他の一つの實數を定義する他の第二の法則を對應させる法則を函數と考へることであらう。然しながら次に述べる如き、遙かに狹義ではあるが、しかし存在的立場に更に接近し、しかも構成主義のテーゼに調和し得る考へ方がある。――

法則によつて與へられる個々の實數といふ概念から出發しないで、既述のインターヴァル分割の方法から出發するのである。卽ち函數を次の如き法則によつて定義する。先づ何らかの仕方で上揭の如きインターヴァルの系列を選び始める。そしてこの系列の最初の項である第一のインターヴァルから系列を若干回進行して達するインターヴァルまでの集合（これを系列の Anfangsstück と呼んでゐる）に對して或他のインターヴァルを函數値の第一のインターヴァルとして對應させる。更にある項までかの系列を進行した後に第二のインターヴァルが對應させられる等々。この對應させられたインターヴァルは勿論上述の如きインターヴァル挿入(Intervallschachtelung)の條件（後のインターヴァルは先行するインターヴァルに含まれる）を滿足する樣に定められる。卽ちインターヴァル系列と他のインターヴァル系列との對應を實函數と考

へるのである。

この函數概念が存在的立場に立つ函數概念よりも本質的に狹いことは、かゝる函數が常に連續函數であることが證明されるから、直ちに理解されると思ふ。しかのみならず、ブラウワーはこの函數の一樣連續性さへも證明した。但しこの證明に際して彼は構成主義者らしくもなく超限歸納法を用ゐてゐる。*

* Brouwer, Beweis, dass jede volle Funktion gleichmässig stetig ist. Proc. Acad. Wet. Amsterdam. 27 (1924). S. 189-193 u. S. 644-646.

この函數概念の獨立變數値はブラウワーが「自由選擇系列」と呼んでゐるものにほかならない。卽ち直後に來るインターヴァル——勿論インターヴァル挿入の條件を滿足する限りに於てゞあるが——を自由に選び得る如きインターヴァルの系列が考へられてゐるのである。

この數概念の使用には嚴密な注意が必要であることは言ふまでもなからう。この數概念はそれ自身に於て獨立した意味をもつてゐるのではなく、適當な關聯に於て始めて意味をもつからである。構成主義に立つ限り、完成

された無限系列は無意味な概念であり、自由選擇系列は、その系列の有限箇の Anfangsstück か又は系列を任意に進行し得る可能性が論ぜられる限りに於て始めて、眞の意義をもつて來るのである。

このブラウワーの函數概念を用ゐるならば數學解析で屢々使用されてゐる函數は困難なしに構成主義的に定義出來る。蓋しこれらの函數は、その獨立變數値を絶えず制限して行けば、精密な函數値が計算し得る種類の函數であるからである。

以上の如くブラウワーは自由選擇系列の概念によつて巧みに實數を定義し、これを基礎として、實函數をもインターヴァル系列間の對應として規定した。

さて、直觀主義の數學解析と古典的な存在的立場に立つ數學解析との間の重大な相違は理論を更に進めるとき明瞭にあらはれてくる。特に第一節で述べた如き存在定理に於てはその相違はまことに顯著なるものがある。構成主義者は、それの存在が主張されてゐる數の計算法則を與へることを要求してやまないからである。ところが

多くの存在的立場に立つ古典的な存在定理は屢々これが不可能なのである。

このために直観主義の數學解析は古典的數學解析よりも遥かに複雜となつて來る。例へば構成主義者は異つた目的に對しては實數の異つた概念を、構成の仕方を與へねばならない。然るに存在的立場では唯一箇の簡單な概念ですますことが出來る。例へばデデキントのシュニットに依つて實數は簡單に定義されてゐる。

この樣に全體の理論構成の簡單な古典的數學解析は實用に於て最も有能であり、しかも他方に於てはアンチノミーの危險性に對する完全な原理的な保證がないとすれば、それに對する無矛盾性證明は非常に重要なものとなつてくる。しかも「基礎論者」はこの證明を構成的に遂行しなければならないのである。

この證明が果して理論的に可能かどうか。しかも構成的に可能かどうか。これは多くの議論の分岐するところであるが、これに對してゲンツェンはこの證明は可能である。しかも、自然數論の無矛盾性證明に用ゐたと同樣の手段であると言ひきつてゐる。

數學解析は超可附番の集合である實數集合を領域とするところから、絶大な困難が起ると想像されてゐるのであるが、ゲンツェンの想定によると斯樣な困難は起らぬといふ。彼はこの想定を裏付けるものとして例のスコーレムの相對性定理を利用するのである。この定理によると數學解析の各一定の形式的に制限された體系（卽ち一定の公理系と推論との體系である。そして無矛盾性證明は斯樣に固定された限界された體系に對してのみ必要である）は既に可附番のモデルによつて滿足させられる。故に超可附番は無矛盾性證明の問題にとつては單なる見せかけにすぎなくなるとゲンツェンは考へるのである。

果して然るや否や。これは全くスコーレムの定理にかゝつてゐるわけである。若しこの定理がスコーレム、ゲンツェンの解釋する如き意義をもつものであるならば、數學解析の無矛盾性證明は何等かの適當な變形を行へば自然數論の無矛盾性證明に歸着されることは必定であらう。そこには原理的困難はない筈である。

然しながら、果してゲンツェンの豫想の如く解決が進行するかどうか。この我々の疑惑は、前節に述べたスコーレムの定理の叙述の場合に感じた疑點にかゝつてゐる。かくしてこのスコーレムの相對性定理の解釋如何が數學解析の無矛盾性證明の見透しに對して重大なる意義をもつことを知ることが出來る。故にこの定理の吟味を第五節以下に於て與へたい。

次節ではゲンツェンの想定が正當なりとした場合に、種々の立場、卽ち直觀主義、存在的立場等々が如何なる關係におかれるかを、「基礎論者」ゲンツェンの目をかりながら眺めて行きたい。

四

もしゲンツェンのスコーレムの定理に對する理解が正しいとするならば、原理的困難なしに數學解析の無矛盾性證明は成功するであらう。この成功のあかつきには、種々の傾向の代表者——一方では構成主義者乃至は直觀主義者、他方ではヒルベルト學派及び純粹な存在的立場をとる代表者——が古典解析學をこれまでの形態で保持しようとすることを妨げるものは何もない筈である。ゲンツェンは斯う考へる。

ところが基礎論の現狀はこの希望を滿してくれさうもない。ブラウワーは無限の存在的立場の上に立つ數學のすべての命題は無意味であり、それの推理は何の意義もない記號のむなしい遊戯であり、たとへ無矛盾性證明が成功するとしても、この證明は無意味のものを有意味にするものではない。遊戯のなかに矛盾がないとしても遊戯の本質に於ては何らの變化もないと考へる。こゝにブラウワーとヒルベルトとの根本的相違がある。

このブラウワーの革新的意見は如何にも新鮮なものに見えるであらう。然しながら、この意見が貫徹された場合には、周知の如く古典解析學は小斷片に分解され、骨格を奪はれ、こゝ數世紀來それが物理學其他自然科學に寄與した應用も失はれてしまふ。この危險を目前にひかへて、「基礎論者」ゲンツェンは次の如き解決の道を求めるのである。

ヒルベルトの名で有名となつた所謂「理想要素」ideale Elemente の方法が困難打開の武器となる。*

* Hilbert, Über das Unendliche. Math. Ann. Bd. 95 (1926), S. 161–190.

この方法によると無限に就て陳述する所謂「無限命題」ideale Aussagen はその言葉の意味する如き無限そのものに就て述べるのではなく單に理論を完成し、證明を容易ならしめ、その結果を一層適宜に簡明に定式化するための方便としての陳述と考へられる。それは理論完備のための實用的な追加物にすぎないと解釋されるのである。

例として射影幾何學に用ゐられる假想要素の一つである無限遠點を擧げることが出來るだらう。平行な二直線はその本質上、點を共有しないのであるが、この無限遠で平行線が交はると假想するならば、「すべての二直線は一點を共有す」といふ一般的命題を提示することが出來るのである。これによつて平行である場合と然らざる場合とがたゞ一つの命題に要約される。

かくの如く理想要素の導入によつて多くの命題が簡單となり要約され、除外例がなくなる。勿論その代償として命題の意味が多くの場合に普通の意味と異つて來る。例へば右の例『二直線は常に一點を共有す』は、若し直線が平行ならば、實際にはその二直線は點を共有しない。たゞ平行を「無限遠で交はる」といふ言葉でおきかへたにすぎない。

直觀主義の非難に對する公理主義者の應答は以上の如きものである。

この應答が正當なりや否やは暫くおき、構成主義と存在的立場との對立をアナロギーを以て明瞭に示す例を物理學との關係に於て擧げよう。

通常のユークリッド幾何學よりも物理的經驗に一層よく適合するものとして自然幾何學がある。この幾何學では、例へば次の如き命題がある。『相異なる二點があまりに接近してゐないときに限り、二點を通つて一つの直線がひかれる。二點が非常に接近するときは、二點を通つて多くの直線がひかれる。』斯ういふ事情は製圖家がよく

遭遇する場合である。

ところがユークリッド幾何學の如き純粹幾何學は點を大きさのないものとして觀念化する idealisieren から斯樣な事情はおこらない。純粹幾何學は經驗にあらはれる廣がりをもつた點の代りに理想的な廣がりのない現實には存在しない「點」を考へる。これによつて空間の關係は非常に簡單となり、始末の惡い除外例は除かれてしまふのである。

存在的立場に立つ數學と構成主義の數學との關係は以上の事情とよく照應してゐる。

前者は例へば存在 Existenz の概念を次の如く觀念化する。卽ち有限集合で成立するとまつたく同樣の仕方で、完成された無限集合に推理を適用する證明を用ゐてそれの存在が證明されるところの數は存在すると。卽ち存在の概念を理想的なるものとして觀念化することによつて、有限集合に成立する關係を無限集合の中にも持ちこみ、かくして兩集合の統一を求め、整然たる集合の理論を建設しようといふのである。

このために勿論この存在概念には理想要素のもつてゐる利益と不利益とがつきまとつてくる。理論が簡單となり整然となるのが、その利益であり、不利益は、この觀念的な存在證明は構成的な存在概念と同程度に現實に適用され得ないといふことである。

例へば方程式

$$ax=b$$

を實數に於て考へる。存在的立場によれば、aが零でないならば、その方程式は常に根をもつてゐる。然し直觀主義者によると、aが零でないことを確認した限りに於てのみその方程式は根をもつてゐる。ところでaの與へられ方の如何によつてaが零であることも、その反對も決定しかねる場合があり得るのである。このときには根の存在如何は未解決のまま殘されざるを得ない。

以上の如く存在的立場に立つ數學をイデアリジーレンといふ觀點からその權利を認めようといふ意見に對しては、次の如き抗議が考へられる。――美しく完成された理論、簡單な構成をもつ命題も、それが言葉通りに物理

的現實に應用出來ぬならば、何の意義があるか。非常に取扱ひが困難で複雜ではあつても、それの結果が直接の現實的意味をもつてゐる理論、命題のみを何故に固執してはならぬかと。

これの解答は既に與へられてゐる。再び幾何學を例にとつて考へて見よう。數學が物理的認識の促進に對して大きな寄與を與へたのは、それが物理的な所與を觀念化し、これによつてその研究を簡單化するところに基礎を持つてゐる。勿論、この普遍的結果を現實に適用する場合には、觀念化によつてひきおこされた相違を意識して、それ相當の飜譯を行ふべきであらう。應用數學の任務はこゝにあると考へられる。

この中庸的な「基礎論者」の意見を裏書きするものとしてワイルの言葉をあげておく。*

「數學をそれ自身だけとれば、ひとはブラウワーと共に、無限なるものが可能性の開かれた場としてのみはいつてくる明瞭な眞理にのみを認めることが出來る。それを越えて行く何らの動機も感ぜられないのである。然しながら我々は自然科學に於ては直觀的自證性にまでどうしても徹底することの出來ない領域に接觸する。ここでは認識は必然的に記號的形成 symbolische Gestaltung となる。それゆゑに、數學が物理學によつて理論的世界構成の過程にとり入れられるときは、數學的なるものを直觀的な意識の特別の領域として、それから游離させる必要はもはや存在しないのである。全科學が統一態としてあらはれるこのより高い望樓の上ではヒルベルトを正しいと考へる。」

この樣にして、まづ存在的立場の數學は純粹幾何學に、直觀主義の數學は自然幾何學に、それぞれアナロギッシュに對應させられ、しかも前者の存在意義を、物理的現實への適用の效果性におかうといふのが、典型的な基礎論者の意見である。

果して斯樣な統一が眞の根據ある統一であるかどうかの吟味は、後のパラグラフに讓る。

さて、これまでの説明では存在的立場の數學は、理想

* Weyl, Die Stufen des Unendlichen. Jena. 1931. S. 17.

要素と對應させられて解釋されてきたのであるが、兩者の間に幾分の相違がなくはない。理想要素、その典型的事例としてあげられた射影幾何學の無限遠點は、二直線の平行の場合を然らざる場合と統一し、前者を除外例、特別の場合として論ずる必要を排除するといふ明白な意識された云はゞ實用的見地から導入されたのであるが、存在的立場の數學ではこの自覺が未だ徹底されてはゐない。そこでは命題に含まれる言葉通りに、無限は文字通り完成されて實在するものと考へられてゐる。そしてこの云はゞ無自覺な見解が直觀主義者によつて痛烈に攻擊され、無意味であると批判されてきた。

かくして中庸的な「基礎論者」にとつて先づ必要なことは、この存在的立場に立つ數學を理想要素的なるものと解釋することである。これによつて、完成された無限、所謂實無限は、理論を整理し簡單化するために、恰も存在するかの如く想定された單なる理想的存在とされる。この場合には、無限遠點の場合と異つて、この轉釋の基礎が不明瞭である。後者に於てはこの轉釋の sachlich な基礎は二直線の平行そのものであり、これの言葉の上での云はゞ變形にすぎぬものであつた。然るに實無限の想定の根據には數學的な嚴密な明白な事態がなく、たゞワイルの言葉からもうかゞはれる如く、物理的現實からの暗示があるにすぎない。

かくの如き事情の相異が、數學解析の體系に對する無矛盾性證明を不可缺のものとする。この場合には理想要素の安全性が明白な數學的關係によつて明示されてゐないといふ理由のために、理論的にそれの安全性を保證しようといふのである。

以上の如き理由によつて、存在的立場の數學が構成主義者に對しても承認されるならば、他方に於ては數學に於て從來よりも遙かに構成的立場のための場所が許されることとなるであらう。基礎論研究では證明を出來得る限り構成的に進めることは既に一つの習慣とまでなつてゐる。それは安全性が大であるばかりでなく、結果の內容がより豐富であるからである。何となれば、構成的な存在證明は間接的な存在的な證明よりも、存在する數そ

のものの計算法を示すから、その結果は内容に富んでゐるわけである。

特に自然數論、また一般に有限的に特色付けられる數學のみを扱ふすべての理論に於ては構成主義を以て理論を進めるのは極く自然的である。これは遙か以前から自然發生的に行はれてゐた。證明法を反省する程の自覺をもつてゐない素朴な推論に於ても、その本性からして構成的であつた。そして「無限」を嫌惡してゐた。しかもこれらの領域では超限的な存在的な推論の使用は實際に於て殆んど必要がなかつた。

然しながら連續體の領域、數學解析、幾何學では事情が相違し、此處では存在的立場が優勢であり、構成主義は無力であつた。

以上を要約すれば次のことが言はれる。構成主義的な數學は非常に大なる自證性をもち、それの成果は具體であり、全數學のうちでも一つの重要な領域を示してゐる。然し存在的立場に立つ數學解析もそれ獨自の意味がある。特に物理學的應用に關聯して著しい效力をもつてゐる。そして後者を根據付けるために、それの觀念化と無矛盾性證明が要求されるのである。

最後に、この連續體を觀念化するとして、それの理論的安全性を獲得し得るとしても、それが果して眞の意味に於て、單なる假構、觀念的な構成態にすぎぬものかどうか。又は存在的の立場の意味に於て、我々の構成の手段とは獨立の實在性をもつてゐるかどうか。

この疑問に對して「基礎論」はまつたく中性的な立場をとる。卽ち斯樣な疑問は純粹の理論的な問題であり、それの決定は「趣味の問題」であり、數學の實踐にとつては殆んど意味がないのであると。

だがこの中性的な解答に滿足し得られるかどうか。

この疑問は、スコーレムの例の定理の解釋とも關係があるだらう。この定理の上述の如きゲンツェン流の解釋が許されるならば、連續を思惟の彼岸におき、可附番集合の範圍内に滿足することも出來るであらうし、それ故にまた上記の如き中性的な應答に自己滿足することも出來るだらう。然しながら、スコーレムの定理に別樣の解

釋が施され、またはそれの不成立が證明されるならば、連續體の、超可附番集合の領域が全面に立ちあらはれ、これの合理的思惟による把握の仕方如何が問はれ、連續と非連續的な構成的なるものとの關係も論究の必要を呼び起すであらう。かくしてゲンツェン流の中性的態度も放棄されねばならなくなるであらう。

また現實に卽すると云はれる直觀主義數學よりも、觀念化され理想化された所謂存在的立場に立つ古典解析學及びそれの發展である現代の多くの數學解析的硏究が、應用に對して遙かに有力であるといふ事情は何故であるか。ゲンツェンはこの問題をも殆んど立入つて觸れてはゐない。恐らく、抽象化、觀念化、理想化、等々と呼ばれてゐるものの本質を一層深く反省する必要があるだらう。

以上の如く、ゲンツェンの「中庸的な基礎論」觀には、多くの疑點を藏してゐるのではないであらうか。（未完）