數學「基礎論」

——その基本問題と意義——（承前）

近藤洋逸

五

ゲンツェン※によつて自然數論の無矛盾性證明が完成された今日の「基礎論」の中心課題は數學解析の無矛盾性證明に向つてゐる。ところが、周知の如く自然數論の領域である自然數集合と數學解析の領域である實數集合との間には、例へばその濃度に於て最も明瞭にあらはれてゐる如くに、性格を本質的に異にするものがある。自然數論では、その領域が可附番な集合であるため、それの用ゐる演算は、またこれの發足する公理系は、構成的に一歩一歩と、個々の可附番の要素を基礎として、理解されることが出來る。然るに實數集合、この典型的な超可附番集合を基礎とする數學解析では事情は全く異る。こゝでは可附番箇の個々の要素を材料として、これを連結して行く言はゞ構成的な演算のほかに、また數學的歸納法（勿論有限の）をモデルとする如き構成的な法則的な方法のほかに、連續な集合そのものを前提とし、この集合を媒介としてそれに含まれる要素の性質或は存在を規定する手續（これは nichtprädikatives Verfahren と言はれる、NPVと略記する）が屡々行はれる。例へばデデキントの實數の定義、また實數集合の上限下限存在定理に於ける如くに。こゝでは構成主義のみのヘゲモニーといふものは、現實の事實としてまさに不可能なのである。

かやうな事情にある數學解析の無矛盾性證明は、よしやこれが可能であるとしても、自然數論のそれの場合と著しく異つた觀點から、異つた方法で以て遂行されねばならぬであらう、と推測される。

この困難な事情は、現在の「基礎論」の狀態に判然とあらはれてゐる。一九三六年にゲンツェンが自然數論の無矛盾性證明に成功して以來、このゲンツェンの水準を突破したものは見當らぬ。アッケルマンの一般集合論の無矛盾性證明（前出）も、公理系から肝心の無限性公理があらかじめ除去されてゐるのであるから、彼の證明は何ら原理的に新しいものをも提起してはゐない。ゲンツェンは昨年、彼の以前の證明を改良したものを提出してゐるが、[**] これも彼が以前に到達した水準を踏み越えたものではない。またヒルベルトは「數學基礎論」の第二卷を[***]公刊し、これが完結篇となつてゐるが、その中でも無矛盾性證明は自然數論の水準線上にとゞまり、たゞゲンツェン流の記法をヒルベルト特有のε記號を用ゐて變樣し、これについて證明を行つてゐるのみ、數學解析に就ては、それの公理系の記號化を附錄論文で扱つてゐるが、それ以上のものではない。

* Gentzen, Math. Ann. Bd. 112 (1936). SS. 493-565

** Gentzen, Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung; Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie. (Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften. Neue Folge. Heft. 4. 1938)

*** D. Hilbert und P. Bernays, Grundlagen der Mathematik. Bd. II. 1939.

ところが我々は第二、三節に於て、ゲンツェンがスコーレムの「相對性定理」（又はレーヴェンハイム・スコーレムのアンチノミー）をこの難關突破の武器として利用しようといふ企圖を知つた。

この定理によると――總じて一定種類の公理系に對して任意に高い濃度のモデルが存在するときは、その公理系を滿足させる可附番のモデルが既に存在してゐなければならぬ。ゲンツェンはこの定理を正當と認め、これを數學解析の場合にも適用出來ると考へ、次の如くに推測

する。卽ち、超可附番集合を領域として成立する數學解析の如何なる定理も、可附番集合(乃至モデル)に於て成立してゐなければならぬ。故に超可附番集合は、「基礎論」の立場からは何ら顧慮する必要もなく、可附番集合の場合に、それら定理をひき直して考へればよい。かくして數學解析の無矛盾性證明も、原理的困難なしに自然數論のそれと同樣に遂行されるであらう。實際、實數集合そのものは超可附番かも知れない。然し數學者が扱ふ實數のみの集合は可附番にすぎぬのであると。

かくてゲンツェンは超可附番集合そのものは、思惟の彼岸におしやつて了ふ。だが果してさうであらうか。彼はNPVを正當に評價してゐるのだらうか。

だが何はともあれ、ゲンツェンの「推則」はスコーレムの相對性定理によりかゝつてゐるのであるから、この定理の吟味は無駄ではあるまい。そしてスコーレム自身のNPV觀をも吟味するのも興味あることだらう。*

* スコーレムのこの定理に就ては甚だ不完全乍ら嘗稿（哲學研究、昭和十一年三月號）で觸れ、吟味したことがある。そして否定的結果に到達した。筆者の現在の意見も、何らそれから進歩することもなく、大要に於ては殆んど同じと言つてよい。

六

扱、スコーレムの「相對性定理」は如何なる根據から成立するのであらうか、これに答へるために、その推論の行程を吟味することにする。

集合の要素をx、y、zであらはす。xεy はxがyの要素であることを示す。五箇の論理的オペレーション——否定(ニヒト)(—)、分離(オーダー)(+)、結合(ウント)(·)、凡て(アルレ)(Π)、在る(エス・ギブト)(Σ)——を有限回適用して得られる命題を確定命題 definite Aussage、或は數命題 Zählaussage と呼び、そして x、y、…が可變である場合を、x、y…が一定と考へられる場合及び x、y、…にすべて束縛記號Π、Σが結び付く場合から區別して、確定命題函數 definite Aussagenfunktion 又は數命題函數 Zählaussagenfunktion と呼んでゐる。

扱、述語計算學の法則を用ゐると、各命題函數に含ま

れてゐる束縛記號をすべて先頭に出すことによつて、所謂標準形 Normalform をつくることが出來る。これの一般形は

$$\underset{x_1}{A}\cdots\underset{x_m}{A}\,U\,(x_1,\ldots\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots\ldots,x_n)$$

である。但しAはΠ又はΣのいづれかである。Uは初等命題函數 elementare Aussagenfunktion と名付けられ、これは結合、分離、否定のみをオペレーションとして構成されてゐるものである。これを論理計算の所謂ブール展開 Boolosche Entwicklung を使用して展開すると

$$\alpha_1(x_1\varepsilon x_1)\cdots\cdots(x_n\varepsilon x_n)+\alpha_2(x_1\varepsilon x_1)\cdots\cdots(x_n\bar{\varepsilon} x_n)+\cdots\cdots+\alpha_{2^{n^2}}(x_1\bar{\varepsilon} x_1)\cdots\cdots(x_n\bar{\varepsilon} x_n)$$

となる。但し $x\bar{\varepsilon}y$ は「xはyの要素でない」といふことを示す。そしてαは僞（0であらはす）又は眞（1であらはす）のいづれかの眞理値をあらはしてゐるものとする。言ひかへればブールの展開式はUのあらゆる可能な場合を含めて顯示したものにほかならない。ところで展開式の含んでゐる論理積相互の順序は次の如くに定める。今、要素と集合との關係を一般に e_i、e'_i で示すとすれば、$e_i=e'_i$, $e_j=\varepsilon$, $e'_j=\bar{\varepsilon}$ ならば、$(x_1 e_1 x_1)\cdots\cdots(x_n e_{n^2} x_n)$ を $(x_1 e'_1 x_1)\cdots\cdots(x_n e'_{n^2} x_n)$ よりも前におく、そして各論理積の内部の各項の順序は $i<h$ 又は $i=h$, $j<k$ ならば $x_i e' x_j$ を $x_h e'' x_k$ よりも前におく。但し e' e'' は ε 又は $\bar{\varepsilon}$ である。

變項xの番號付けは種々の仕方で可能であるから、從つて命題函數は種々の形で表示され得る、といふのは事實であるが、然しこのことは我々の議論にはどうでもよいことである。とにかくこれら命題函數の表示が單純無限系列の形に（即ち自然數系列の形に）順序付けられ得ることを示さう。

先づnの値について順序付ける。即ち n=1 のものを他のものよりも前におき、その次に n=2 のもの、更にこの後に n=3 のものを、等々と並べる。そしてnが同じ値をもつときには、mの値に從つて排列する。またmもnも同じ値をもつてゐる

$$\underset{x_1}{A}\cdots\underset{x_m}{A}\,U\,(x_1,\ldots\ldots,x_m,\ldots\ldots,x_n)$$

が

$$A'_{x_1}\cdots A'_{x_m}U\,(x_1,\dots\dots,x_m,\dots\dots x_n)$$

よりも前におかれるのは、$A_{x_i}=A'_{x_i}$であるならば$A_{x_j}=\Pi A'_{x_j}=\Sigma\,(i<j)$ の場合である。以上のすべてが同じの場合にはUの内部の構成に從つて順序付ける。卽ち $a_i = a'_i$, $a_j=1, a'_j=0\,(i<j)$ ならば $U=\Sigma a_k=P_k$ は $U'\Sigma a'_k P_k$ よりも前におくのである。

以上によつて凡ての確定命題函數を一つの單純無限系列の形に順序付けることが出來る。任意に與へられた命題函數も上述の如き形で表示すれば、系列中のそれの位置は容易に見付けることが出來る。

さてスコーレムの當面の課題は、集合論の公理（こゝではツェルメロ、フレンケルの集合論公理系が對象とされてゐる）をすべて數命題として、若しくはともかく數命題の可附番「集合」の同時的成立として、表示可能であることを示すにある。若しこの課題が肯定的に解かれるならば、「相對性定理」によつて集合論は旣に可附番領域で成立することが歸結され、かくて可附番以上の集合を特色付ける集合論の命題は存在しなくなり、こゝに知名なスコーレムのパラドックスが生れるわけである。

まづ Axiom der Bestimmtheit（集合x、y、zについて、uがzの要素で、$x=y$ ならばyもzの要素である）を記號化すると

$$\Pi\Pi\Pi_{x\,y\,z}((x\neq y)+(x\varepsilon z)+(y\varepsilon z))$$

となる。但し$x\neq y$ は $x=y$ の否定であり、且つ $x=y$ は

$$\Pi_z((z\varepsilon x)(z\bar{\varepsilon}y)+(z\bar{\varepsilon}x)(z\varepsilon y))$$

で定義される。この定義を用ゐれば記號、$\neq$ は容易に除かれる。

零集合存在公理は

$$\Sigma\Pi_{x\,y}(y\bar{\varepsilon}x)$$

で記號化される。

Axiom der Paarung（如何なる集合x、yに對してもこのxとyとを含む集合zがある）は次の式で記號化される。

$$\Pi\Pi\Sigma_{x\,y\,z}(x\varepsilon z)(y\varepsilon z)$$

Axiom der Vereinigung は記號化すると

$$\mathop{\Pi\Sigma\Pi}_{x\,y\,z}\left(z\varepsilon y=\Sigma_{u}(z\varepsilon u)(u\varepsilon x)\right)$$

となる。

Axiom der Potenzmenge（如何なる集合xに對してもxの凡ての部分集合zを要素とする集合yあり）は

$$\mathop{\Pi\Sigma\Pi\Sigma}_{x\,y\,z\,u}\left((u\varepsilon z)(\overline{u\varepsilon x})+(z\varepsilon y)\right)$$

で記號化される。

無限性公理も選擇公理も同様に數命題で表示することが出來る。

ところがAussonderungsaxiom（數命題函數Eを成立させる集合xを要素とする集合mを、然らざる他の集合nから區分し得る）は

$$\mathop{\Pi\Pi\Pi}_{E\,y\,z}\ldots\mathop{\Pi\Sigma\Pi}_{m\,n\,x}\left[(x\varepsilon n)(x\varepsilon m)E(x,y,z,\ldots)+(x\bar{\varepsilon}n)\left((x\varepsilon m)+\overline{E(x,y,z,\ldots)}\right)\right]$$

で示されるが、この表示に於ては記號Πがすべての命題函數に關與してゐるのであるから、右の式は明かに數命題ではあり得ない。この表示はEに對して逐次に、とにかく存在してゐる命題函數を導入するときに得られる個々の數命題の全部の同時的妥當を要求してゐるものと解釋されるのである。ところが前に示した如く、確定命題函數は可附番化されるから、Eに對して、存在する個々の命題函數を代入して生ずる個々の數命題の單純無限系列の同時成立と考へるならば、右の式は數命題の單なる擴張にすぎなくなるのである。

・Axiom der Ersetzung もまつたく同様に處理することが出來る。

かやうにして公理はすべて數命題に轉形され、これで證明の準備が終る。

さて「定理」——「數命題Zは矛盾を持つか、然らざれば既に可附番の領域に於て充實可能である」——の證明の中心的部分に入つて行く。

Zは、原命題函數ABC…を基礎として構成されてゐる。そしてこれら函數は領域Bからの任意のアーグメント値に對して、Zを眞ならしめる如きものと假定する。するとZは、Bの可附番無限（場合によつては有限）の部分領域Bに於て既に成立してゐる、と主張するのが「定理」である。

先づ簡單な場合として數命題 $\Pi_x \Sigma_y A(x, y)$ を考察しよう。この命題の意味を直觀主義の立場から解釋する。するとこの命題は、領域Bの各要素に對して $A(x, y)$ を成立させる要素yを對應させる實際の手續（これを$f^{(x)}$で示す）が知られてゐることを表示してゐる。故に右の數命題は $A(x, f(x))$ が領域Bの各要素xの對して成立することを示すのである。

さてaをBの任意の要素とし、このaを$f^{(x)}$のxに代入して得られる要素をbとする。そしてaとbとの集合をM_1とし、M_1のすべての要素をあらゆる可能な仕方でxに代入するならば、また若干個の要素が出てくる。これらとM_1の要素との合併集合をM_2とする。等々。このオペレーションを無際限に續行すると、集合の無限系列$M_1, M_2, \ldots$を得るのである。これら全體の合併集合をB_0とするならば、明かにB_0はBの部分集合であり、且つ可附番でもある。しかもこのB_0の中で右記の數命題は成立するのである。即ち、xをB_0の任意の要素とすると、これは有限個（此處では一箇）であるから、これを含む集合M_νがある。從つて$f^{(x)}$は明かに$M_{\nu+1}$に含まれ、故にB_0にも含まれるからである。かくしてB_0の如何なる要素xをとつてきても、$f^{(x)}$はB_0の外部に出て行くことはない。直觀主義に從へば右の如き結果に必ずや到達するのである。

ところがスコーレムによると、非直觀主義の立場からも、選擇公理を用ゐるならば、全く同一の結果に到達する。右に掲げた例 $\Pi_x \Sigma_y A(x, y)$ に於て、Bの各要素xに對して $A(x, y)$ を成立させる要素yの集合をB_xとし、これから選擇公理を用ゐて代表の要素を選び出し、これを$f^{(x)}$とするならば、$A(x, f(x))$ を得る。かくして前とまつたく同じ論法で證明を進めることが出來る。

以上は簡單な數命題についてゞあるが、一般の數命題についても同樣に論ずることが出來る。

さて、スコーレムは更に、直觀主義をも、選擇公理をも用ゐることなくして、所謂「古典的」立場からも、「定理」を證明し得るといふ、簡單な數命題Z

$$\Pi_x \Sigma_y \Sigma_z U(x, y, z)$$

を考察しよう。Uを構成する原命題函數をA、B、C、…とする。この命題が成立するとは、領域Bからもつて來た凡てのアーグメント値に對してきまるA、B、C、…の眞理値がZを眞ならしめることである。ところで「定理」はこのとき「Z」は可附番の領域で既に充實可能なり、といふことを主張する。

さて領域Bの任意の要素を1と名付けると、先づU$(1,y,z)$が成立する。ところでZは、xのすべての値に對して、Zを充實させる要素y、zの存在することを主張するから、1に對應してきまるy、zを夫々2、3と名付けるならばU$(1,2,3)$が成立する(第一回)。

次にxに2を代入して得られるU$(2,y,z)$に於て、2に對應して定まるy、zを夫々4、5と名付けるならばU$(2,4,5)$が、またxに3を代入して得られるU$(3,y,z)$に於て、3に對應して定まるy、zを夫々6、7と名付けるならばU$(3,6,7)$を得る(第二回)。更に同樣のオペレーションを無際限に續けることが出來る。このオペレーションをn回行ふと要素$1,2,3,\ldots,2^{n+1}-1$を得るから、次の結合形Konjunktion〔これを(K_n)と呼んでおく〕を得る。

$$(K^n)\quad U(1,2,3)\ U(2,4,5)\ U(3,6,7)\ldots$$
$$U(2^n-1,\ 2^{n+1}-2,\ 2^{n+1}-1)$$

さて$1,2,\ldots,2^{n+1}-1$を自然數列からの第n番目の截片Abschnittと呼び、R_nで表示すると、Zなる數命題は、K_nがR_nをBから適當に選び出せば眞となる、といふことを主張するのである。即ち各nに對してR_nに含まれるアーグメントの値に對する原命題函數A、B、C…に適當に眞理値を與へてK_nを眞ならしめ得るといふことを主張する。

次にR_nからとつてきたアーグメントの値に對する原命題函數の眞理値のとり方の決定が問題となつてくる。まづアーグメントの値を順序付ける。數列

$$2^n,\ 2^n+1,\ \ldots,\ 2^{n+1}-1$$

はR_{n-1}には含まれず、R_nにいたつて始めてこれに含まれる。

次にPaarをlexicographischに次の順序に排列する。

$(1, 2^n), \ldots, (2^{n+1}-1, 2^{n+1}-1)$

また Tripel を

$(1, 1, 2^n), \ldots, (2^{n+1}-1, 2^{n+1}-1, 2^{n+1}-1)$

の順序に排列する。

若しR_{n-1}からのアーグメントの値が既に順序付けられてゐるならば、また以上によつてR_nからのそれもすべて順序付けられるのである。たゞR_{n-1}のそれをすべてR_nのそれの前におく、といふことを附け加へさへすれば充分である。但しR_0にはアーグメントの値はない。以上の如くにして各nに對してアーグメントの値は完全に linear に順序付けられるのである。

更に數命題Zを構成する原命題函數を順序付けて

$A_1, A_2, \ldots$

で示すことにする。

以上のオペレーションが終ると、今度はR_nからとつて來たアーグメントの値に對する原命題函數の眞理値の選擇の仕方を系列付けねばならない。

さて命題函數の眞理値の二つの選擇$W_i^{(n)}$、$W_j^{(n)}$があるとする。いまアーグメントの値の系列を逐次に追跡してρに到つて始めて凡ての原命題函數Aが必ずしも兩選擇に對して合致しなくなるとする。そしてA_rが始めて、ρに對して他の原命題函數と一致しない眞理値をもつてゐる命題函數とし、若し$A_n^{(\rho)}$が$W_i^{(n)}$に對して僞であり、$W_j^{(n)}$に對して眞であるならば、$W_i^{(n)}$を$W_j^{(n)}$よりも前におくのである。*

＊　この逆でも勿論よい。

これによつてR_nからとつてきたアーグメントの値に對するAの値の選擇Wに次の順序が成立する。$W_i^{(n)}$が$W_j^{(n)}$よりも前にあるといふことは、R_m $(m \leqq n)$の内では$W_i^{(n)}$と$W_h^{(n)}$と合致し、また$W_j^{(n)}$が$W_k^{(m)}$と合致するとき、$W_h^{(m)}$は$W_k^{(m)}$と合致するか（即ちρはR_mには未だに含まれてゐない）、然らざれば$W_h^{(m)}$は$W_k^{(m)}$よりも前にある（即ちρはRをも含めてR以前に既に含まれてゐる）のである。

ところでK_nは自己の成立を主張してゐるから、K_nを眞ならしめる若干箇の$W_i^{(n)}$がなければならない。これをn階の解 Lösung n^{ter} Stufe と名付けておく。n階の解はm

階$(m \wedge n)$でも成立するから、それはm階の解のあるものと、しかも唯一つのものと、R_mの内部では一致してゐなければならない。故にn階の解はm階の解の接續 Fortsetzung である。然るに各階の解の箇數は有限であるから(何故ならばアーグメントの値は有限箇であるから)、それらのうちには更に任意に高い各階への接續をもつてゐる解が必ずや含まれてゐる。これをF解F-Lösung と呼んでおかう。n階のF解を、もとの選擇$W_i^{(n)}$の順序で排列して

$$L_1^{(n)},\ L_2^{(n)},\ \dots$$

とする。すると如何なるnに對しても、$L_1^{(n+1)}$は$L_1^{(n)}$の接續である。さて各nに就いて原命題函數の眞理値を$L_1^{(n)}$に從つて定めるならば、明かに數命題Zはそれらによつて充實される。以上で「定理」の證明は終る。

　以上の證明はZが一般の形をもつてゐるときにも全く同じ論法で遂行することが出來る。但し證明は勿論複雜にはなるが、それは原理的には何ら新しいものをも示しはしない。故に以上で「相對性定理」の證明の敍述を終ることにして、この「定理」の批判的吟味にうつることにする。(未完)　一九三九・九・三〇