數學「基礎論」（承前）

——その基本問題と意義——

近藤洋逸

七

前節に述べたレーヴェンハイム・スコーレムの「定理」は全く許し難いアンチノミーを惹起する。繰返し述べるならば、この「定理」によると、如何なる無矛盾の數命題も可附番の領域で既に充實可能でなければならぬのであるから、超可附番集合を特質付ける數命題は存在しないことになる。例へば連續とか實數集合の如き對象を自然數集合の如き可附番集合から區別すべき何らの數命題をも作り得ない。然るに我々は自然數集合に冪集合構成の操作を施せば實數全體の集合を得る、といふことは熟知のことである。故に實數集合を數命題で表示し得るのであるから、實數集合は何らかの方法で可附番化されねばならないであらう。ところがカントルは實數集合と自然數集合との濃度の本質的相違を有名な對角線方法によつて證明してゐるのであるから、こゝに一つの解き難いパラドックスが生れるのである。

この「定理」乃至はパラドックスは比較的に最近になつて問題になつたためか、それについての解法も少いやうであるが、恐らく二つの解決（解釋と言ふのが妥當かも知れない）の方向が見られる。

その一つは、スコーレム*、フレンケル**、カルナップ***の採る解法である。これの主要點は、立場の相違により、基礎におかれる公理體系の如何によつて、實數集合は可

附番とも超可附番ともなるといふところにある。彼等は次の如く言ふ。——濃度の概念は公理化する場合に必然的に相對化すると。即ち濃度の概念は公理系に相對的なものであると。故に有限、可附番無限、超可附番無限の區別は、公理主義の立場から論ずる限り、カントルの立場からの區別と必ずしも合致する必要はなく、基礎におかれる公理系の如何によつて變化し得ると。こゝから「定理」は「相對性定理」とも呼ばれてきたのである。

* Skalem, Einige Bemerkungen zur axiomatische Begründung der Mengenlehre, (Math. Kongressen i Helsingfors (1922))

** Fraenkel, Mengenlehre. 3. Aufl. S. 333.

*** Carnap. Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik. (monats hefte für Mathematik und Physik. Bd. 41, Heft 2, 1934)

だが斯様な「解釋」で果して問題は解決されたであらうか。彼等が言ふところの、實數集合を可附番ならしめる公理系とは現實には如何なるものであるのか。この公理系が實際に提出されない限り、パラドックスは解決されたとは言へないであらう。然し勿論、實數集合を有限の手續で實際に構成される實數の集合のみに限るならば、故に本來の意味の實數全體の集合、連續性を典型的特性として持つてゐる實數集合を言はば破壞して不連續な集合に分裂させるのであれば、[1] 勿論實數集合は可附番となり、矛盾は解消するだらう。

(1) Weyl, Das Kontinuum, 1916 はこの立場に立つ。

然し彼等の主張は、立場の制限によつてではなく、立場を高め、領域を擴げることによつて、實數集合を可附番化し得るといふのである。例へば前述のカルナップは、カントル流の集合論、故にまたツェルメロ流の集合論公理系は客觀的言語 Objektsprache であり、これに對してレーヴェンハイム、スコーレムの「定理」はこの客觀的言語そのものの結合法則を研究する高階の立場、彼の所謂 Syntax の立場に於て成立するといふのである。故にこれら二つの立場を區別すれば矛盾は生じない筈であると。ところでシンタックスの立場は客觀的言語よりも高く、廣い立場であるから、集合論で謂ふ實

數集合の連續性を破棄することなく、しかもこれを可附番化しなければならない。だがこれは可能であらうか。カルナップは、「相對性定理」の中にこの可能を見るのであるから、この「定理」の證明過程の吟味が愈〻緊要のものとなつてくる。

第二の方向はゲンツェンのそれである。[1] 彼によれば、スコーレムの「定理」の物語るところのものは、現實の數學は可附番以上のものを把握し得ないといふことである。換言すれば人間の思惟の有限性が「定理」によつて暴露されたのであると。哲學的な論議を痛撃するゲンツェンが人間思惟の有限性といふ「哲學」を持ち出してくるのは興味あるところであるが、然し果して現實の數學は斯様に無限に對して、（特に超可附番なるものに對して）無力なのであらうか。若し無力とすれば、一體我々は如何なる根據からして、實數集合の超可附番性なるものをいやしくも口にのぼせ得るのであらうか。若しこのゲンツェンの「解釋」が正當であるならば超可附番集合を領域とする數學のあらゆる部分は假象となつて了ふであらう。果してさうであらうか。だが、スコーレムの「定理」に於て解釋された、といふ但書きつきの數學諸理論が、言はばその「定理」の中では骨拔きされてゐて、超可附番のものに對して無力なのではないのだらうか。我々はこのやうにも想像したくなる。いづれの場合にせよ、スコーレムの「證明」過程の吟味が必至となつてくる。

(1) Gentzen, Die gegenwärtige Lage usw. (前出) 參照。哲學研究第二百八十一號六六頁。

スコーレムの「證明」の中心的部分は、數命題の系列化、數命題を可附番領域にて充實させる手續、及びこれと關聯して Nichtprädikatives Verfahren (NPV と略記) の解釋にある。これらを順次に吟味して行くことにする。

命題函數の系列化は如何なる條件のもとで行はれてゐるか、これが先づ吟味の對象となる。既述の如く、命題函數に含まれる變項の個數 n に從つて排列し、同一の n に對しては束縛される變項の個數 m によつて排列し、同じ m、n の際には束縛變項の全稱記號 Π と存在記號 Σ の配

分の如何によつて分類し、最後に以上のすべてが同じ場合には初等命題函數Uの構成によつて排列された。例へば $U=\Sigma a_k P_k$ を $U'=\Sigma a'_k P_k$ よりも前に置くのは、$a_i=a'_i$, $a_j=1$, $a'_j=0$（但し $i<j$）である場合である。ここで注目すべきことは相異る命題函數 U、U' に於ても P_k が同一の形で書かれてゐることである。卽ち相異なる U、U' に於ても獨立變項 $x_1, \ldots x_n$ が全く同一に記號化されてゐるが、これは變項の成立する領域が唯一つの基本領域 $\mathfrak{B}$ のみ限られてゐることによつて可能なのではないか。だが領域を $\mathfrak{B}$ のみに限り得るだらうか。成程、ツェルメロの集合論公理系の出發に際しては、$\mathfrak{B}$ が基本領域として前提されてはゐる。然し公理系から出發して理論が展開されるにつれて $\mathfrak{B}$ の部分領域が問題となり、この部分領域に於て成立する變項を、$\mathfrak{B}$ 全體に及ぶ變項と同一視することは果して論理的に許され得るものだらうか。

例へば我々は $\mathfrak{B}$ に要素が含まれることと、Aussonderung の公理を用ひて空集合の存在を導き出すことが出來、また $\mathfrak{B}$ が空でないことと、Potenzmenge の公理、Paarung の公理、Aussonderung の公理を用ひて一箇の要素のみの集合の存在を導來し得る。そしてこれらを基礎として更に各々の有限集合を導出することが出來る。また無限の公理から無限集合を、そしてこれらすべての無限集合の共通集合として所謂可附番の集合をひき出すことが出來るのである。

ところで有限集合の各々を、例へば2箇の要素をもつ集合と3箇の要素をもつ集合との濃度の差を示すためには、基本領域 $\mathfrak{B}$ のうちに含まれる要素2箇の諸集合の全體に關係する變項及び要素3箇の諸集合の全體に關係する變項が必要であり、且つ兩變項は區別されねばならない。また有限集合と可附番無限集合との本質的區別を論ずるには、すべての有限集合を要素とする部分領域及びこの上に成立する變項と、すべての可附番無限集合を要素とする部分領域及びこの中に成立する變項とが必要であり、且つ兩變項は明かに區別されねばならない。また可附番無限集合に Potenzmenge の公理を適用すれば超可附番の連續集合が出て來るが、この兩集合を區別する

には、すべての可附番無限集合を要素とする部分領域(勿論$\mathfrak{B}$の)、すべての連續集合を要素とする部分領域、及びこれら各領域の上に成立する變項が必要である。

以上の如くに理論の展開は、實に多樣な變項の導入を必要とし、變項の數は、理論の及ぶ最も高い濃度の集合の濃度よりも、少くはない筈である。勿論我々が實際に導入する變項の箇數は可附番ではあらう。然し理論的に可能であり、且つ數學の對象をあらゆるディテールにわたつて把握するには必要である變項の數は可附番ではない。(註一)

我々はここで記號及び操作の意味、卽ちそれの對象及び對象間の關聯の指示機能といふ問題にぶつかつてくる。たとへ記號は一箇でもそれの指示する對象の數は無限に多樣であり得る。例へば記號$\mathfrak{B}$を考へよ。$\mathfrak{B}$は一つの基本領域ではあるが、その領域のうちには無限に多樣な集合が要素として含まれてゐることが同時に表示されてゐる。また Potenzmenge の公理の式を見よ。xが無限集合であれば、それの部分集合を示す記號zは、超可附番箇の集合をかわつて行く變項であり、記號yは超可附番集合を一般的に指示するものでなければならない。

またカントルの可附番集合と連續集合との本質的相違を示す對角線方法の證明法も、可附番の記號しか含んではゐない。これは自明のことである。だがこの可附番箇の記號と唯一箇の對角線方法といふオペレーションが、超可附番集合の一特質を指示する、といふところに記號の、オペレーションの、指示機能の特性がある。故にこの對象への指示機能といふ記號やオペレーション(これも記號示されるが)の本質的特性を捨て去つて、ただ外見的にそれらの箇數が可附番箇だとか言つたところで、何ら問題の本質に觸れるものではない。それは trivial な事柄にすぎない。

以上の考察から我々は次の如く言ふことが出來る。——すべての命題函數を單純無限系列に排列しようといふスコーレムの企圖は、變項の多樣性を無視したものであり、故に正當とは言はれない。「すべての」といふ形容詞は、數學の對象をすべてのディテールにわたつて把握

することを要求し、これは變項は法外な複雜化を招來するからである。かくて我々はスコーレムの「定理」の中心的部分に既に絶大な疑惑を持たざるを得ない。

次に、記號やオペレーションの指示機能の意義が示唆された。可附番の記號やオペレーションが可附番以上の集合を把握し得る。この記號やオペレーションの、一般的な言はば法則的な把握の仕方こそ、それらの本質であり、これを無視して單なる記號とすることは多大の危險を伴ふのである。

八

今度は、數命題を可附番領域で充實させる手續の吟味に移るが、この充實の問題は、記號の意味（指示機能）と密接な關聯がある。既に前に述べた如く、スコーレムは變項x、y、z、…に一定の對象、例へば1 2 3 …a b c …を代入するが、この代入の意義は如何なるものであらうか。例へば全稱記號Πを伴ふ變項xに、$\mathfrak{B}$の任意の對象a（又はこれを1とも言つてゐる）を代入するといふ手續がある。若しこの代入が、變項xと一定の對象aとが同一であるから、可能であるのだらうと考へるならば、これは勿論明白な論理的誤謬である。變項xは固定した一定の個別的對象ではないのだから。また、xが$\mathfrak{B}$に就ての變項だから任意の一定の對象を代入することが出來る、といふことも正當とは是認出來ない。何故ならば、この代入は可能ではあるが、代入以前の式と代入後の式とは論理的に同意義ではないからである。變項を全稱記號として持つ數命題は、そのxに$\mathfrak{B}$の如何なる對象でも代入可能である、といふことを示してゐるのであるから、たとへ代入される要素が任意のものであつても、一度び代入されて了へば、その要素は固定されたものであり、從つて數命題のもつてゐた普遍性といふ如きものを失つた數命題が導き出されるのであり、故に代入以前の數命題と以後のそれとは論理的相違をもつてゐる。從つて、代入以前の數命題、例へば超可附番集合についての集合論の或命題は、これからこれの含む變項に一定の對象を代入して得た數命題とは本質的に相異をも

つてゐる。自然數全體について成立を主張する或命題の證明は、一定の自然數に就て吟味しただけでは、保證されはしない、といふことと全く同じ理由から、代入以前の數命題の本質は、代入によつて盡されはしない。

然し或はかう言ふかも知れない。代入される要素は一つのものではあるが、領域の任意の要素である。故に代入によつて論理的相異は生じないだらうと。だが若しこの代入される要素の任意性を充分に强調するのであるならば、變項の可變性といふ特性、もつと的確に言へば變項が領域全體の要素に關はるといふ性質は、そのまま代入される要素の任意性の中に持ちこされてくる。故に、斯樣に解された要素は變裝された變項にほかならない。

然し乍ら以上の如き「代入」の解釋はスコーレムの當面の目的には適應したものではないであらう。スコーレムの意圖は與へられた數命題の本質をつくすことではなく、與へられた數命題の成立する最小の領域の濃度の決定といふものに限られてゐる。この目的を顧慮するならば、全稱記號に一箇の要素を代入するのは適當のことかも知れない。變項の採り得るあらゆる可能の場合を盡すといふことは、スコーレムの目的ではないのであらうから。

これで一應「代入」の正當さが保證されたもののやうであるが、然しこの「代入」がスコーレムに於ては逐次に行はれてゐるといふことは或重大な制限が「代入」に課されてゐることを暗示してゐる。

いま適當な例として冪集合（ポテンツメンゲ）の公理をとつてみる。

$$\Pi_{x}\Sigma_{y}\Pi_{z}((z\,\overline{\leqq}\,x)+(z\,\varepsilon\,y))$$ 但し $\overline{\leqq}$ は $\leqq$ の否定)

これは $x\leqq y$ を $\Pi_{z}((z\,\bar{\varepsilon}\,x)+(z\,\varepsilon\,y))$ で定義すれば

$$\Pi_{x}\Sigma_{y}\Pi_{z}\Sigma_{u}((u\,\varepsilon\,z)(u\,\bar{\varepsilon}\,x)+(z\,\varepsilon\,y))$$ となる。そしてこれは

$$\Pi_{x}\Sigma_{y}\Pi_{z}\Sigma_{u}\,U(x,y,z,u)$$

のタイプの數命題である。ところでスコーレムはこれを如何にして充實するか。彼は次の如くに考へる。この數命題が領域 $\mathfrak{B}$ にて成立するといふことは、y が x の或函數 $f(x)$ を、u が x z の或函數 $g(x,z)$ を示すとき、命題 $U(x, f(x), z, g(x,z))$ が $\mathfrak{B}$ の任意の個體 x z に對して眞であるといふことである。今 a b を $\mathfrak{B}$ の任意の個體とすると、函數 f

はxにaを代入すると、或きまつた個體を示し、gはx zにa bを代入すれば或きまつた個體を示す。これらの個體とa bとを合せて集合M_1とする。このM_1の各要素をあらゆる仕方でx zに代入するとそれに對してf gは夫々きまつた要素を指示する。これらをすべて合せてM_2とする。以下この手續を無限に續ければM_1 M_2 M_3…を得る。これらの全部を合せると可附番無限の部分領域$\mathfrak{B}_0$を得るといふのである。

然しこの逐次的「代入」は無制限に妥當するものであらうか。こゝに疑問がある。右述の手續では全稱記號をもつx、zに夫々$\mathfrak{B}$の要素が逐次に代入されたが、これは正當であらうか。xに對して「逐次代入」が許されるとしても、zに對して果して可能か。いまxを固定して自然數全體の集合Nとする。このNの部分集合のすべてのものの箇數がカントルによつて超可附番であることが立證されてゐるのであるが、ところで變項zは$\mathfrak{B}$の全體にかかつてゐるから、勿論このNの諸部分集合のすべてをかはつて行き得るのであり、且つNに對應してきまる羃集合（これは周知の如く連續集合にエキバレントであり、Cと呼んでおく）を構成するには、Nの諸部分集合のあらゆるものをかはつて行かねばならぬ。ところがこれは逐次的には不可能なのであることがカントルによるまでもなく明白なのであるから、スコーレムがzに$\mathfrak{B}$の要素を逐次に代入してゐることは、如上の事態を全く無視してゐるものであらう。「逐次代入」では盡され得ぬものに、「逐次代入」を行つてゐるのがスコーレムの方法である。これは明かな誤謬である。スコーレムが逐次代入によつて充實しようといふ意圖こそ、あらかじめ超可附番のものを除外してゐるのであつて、故にスコーレムの結果が可附番的なものにとどまつたとしても、これは彼の論理からは當然の結果である。この事態はスコーレムの「證明」が證明でないことを物語つてはゐないか。

およそスコーレムの「逐次代入」による充實の方法は、この代入の手續が有限回で終るならば、有効であるが、その手續が無限に續くときは、この手續の逐次的無限回の適用で數命題の本質が盡せるか否かは、その方法

のみによつては決して決定され得ないのである。これは例へば我々が實數集合から個々の實數を逐次に無際限に採り出して排列することが出來るが然し決して斯樣な手續で實數集合が盡されはしないといふ事態と全く同樣の事情である。スコーレムの「相對性定理」といふ奇妙な結果は逐次的代入といふ方法に含まれてゐるのであり、この方法はあの結果を導出するためにあらかじめ仕掛けられたトリックにすぎない。

　そればかりではない。我々はスコーレムが「定理」の證明に用ゐた方法自身によつて彼の主張を裏切る如き數命題をつくり得る。所謂「古典的」立場から該「定理」證明の際に自然數列から截片 R_1 R_2 R_3 ……をつくつた。R_1 は 1 2 3 を要素にもつが、R_1 に屬しない要素を s_1 とする。次に R には 1 2 3 4 が要素として含まれてゐるが、この R_2 に含まれぬ要素を s_2 とする。等々、そして L が可附番と限定されてゐないのであるから、s_1 s_2 ……の存在は可能であり、且つ相異つてゐることが出來る。すると s_1 s_2 ……を要素とする集合を考へると、S は明かに R_1 R_2 ……の全體に屬することは出來ない。記號で示せば

$$\prod_{v=1}^{\infty}(s_v \bar{\varepsilon} R_v)$$

となる。S_v R_v が各々デフィニットであるから、この命題は明かに普通の數命題の擴張形にすぎない。しかもこの命題は R_1 R_2 ……の全體の領域 $\mathfrak{B}$ を越えるといふところに本質があるのだから、可附番領域で成立しない數命題の存在が立證されたのではないか。或は然しかう抗議するかも知れない。s_1 s_2 ……は可附番であり、これと $\mathfrak{B}_0$ とを合併しても可附番ではないかと。然し今この合併した集合を T とすれば、この T は可附番であるから適當に處理すれば前と同樣に截片に分割出來る筈である。故に上述の數命題はこの T にも含まれぬ $\mathfrak{B}$ の要素の存在を指示することになる。即ち右に述べた數命題は如何なる可附番集合をも越えた集合に於てのみ成立し得るのである。

　以上は古典的觀點からの「證明」についてであるが、直觀主義の立場からの「定理」の證明に對しても全く同樣の結果を得るのである。

また我々はすべての數命題は單純無限系列に排列し得ないといふ結果を述べておいたが、これが正しいとするならば、スコーレムが Aussonderungsaxiom や Ersetzungsaxiom の數命題化に際して、全稱記號のかかつた命題函數Eを個々の命題に分解して、これらの同時成立によつてEと換へようとする企圖は不可能であらう。言ふまでもなく命題函數Eのすべてを單純系列化することは不可能だからである。（註二）

我々はいくらでもスコーレムの「定理」の缺陥と思はれるものを數へあげることは出來るだらう。だが何よりも重大な缺陥は次の如きものにありはしないか。

記號、特に變記號やオペレーションの分析が不足してゐる。即ちそれらのものの本質である對象への指示の機能（意味）が無視されてゐる。記號は唯の一つでも無限のものを指示し、またオペレーションは（例へばN P V、これについては後節で述べる）は有限箇の記號間の關係を指示する記號として表示されても、それの意味する對象は無限（時には超可附番無限）であり限る。そして斯様な解釋は數學の對象の Realität を前提としてのみ可能である。ところがスコーレムに於ては、斯様な事情が輕視されてゐるがために、多くの混亂が起つてくる。例へば數命題の系列化の問題、また數命題の充實の手續に於て。

スコーレムはすべての數命題の系列化が可能なりとするが、これは、變項は$\mathfrak{B}$全體に關聯するものばかりではなく、$\mathfrak{B}$の部分領域について導入される變項も可能であり、すべての數命題を列擧するためには、これらすべての變項を考慮しなければならなくなり、そして理論の展開によつて構成が例へば冪集合構成によつて超可附番の集合にも及ぶならば、變項の數も可附番ではなくなり、故にこれを基礎とする數命題の數も可附番ではなくなる、といふことを看過してゐるのである。この看過の原因は、實際我々の用ゐる記號やオペレーションの數が可附番であるといふ事情にあるが、然し記號やオペレーションが可附番であることは、前述の如くそれらによつて表示される對象やそれらの關係の箇數が可附番であるこ

とを保證するものではなく、却つて可附番の記號やオペレーションでそれ以上のものを把握し得るといふところに概念の力があるのである。對象のディテールを個別的に忠實に把握するには對象の各々及びそれらの相互の關係の各々について個別的に記號を導入しなければならない。これは勿論不可能のことである。然し我々は記號の一般的な法則的な指示機能によつて、對象及びそれらの關係を、これらのもつてゐる普遍的な性質に從つて、言はば法則的に把握するのである。我々は僅かの記號やオペレーションで無限に豐富な對象を把え得る。だが前者の箇數の僅少さから、後者の豐富さを否認することは、記號と對象とを混同することであり、記號の特性をも對象の特質をも誤認する實に危險な方向に陷つてゐる。ところがスコーレムはこの方向に向つてゐる。例へば前述の如き數命題のすべてを系列化しようといふ企圖は、命題函數Eにかかつてゐる全稱記號Πを個別的に分解しかくして生じた各個の數命題が例の逐次的代入の方法によつて可附番集合で成立することを「證明し」、從つてもとの命題そのものの把握する對象の可附番性をも結論しようと狙つてゐる。スコーレムの方向は法則的なるものを個別的なものに分解し、そして法則的なるものに把えられる對象の濃度をこの個別化の方向によつて知らうとする方向、卽ち記號の個別化の方向に歩んでゐる。若しスコーレムがこの方向に忠實であるならば、變項をその意味に從つて更に細く分類すべきである。ところが彼はこの方向を中途で放棄し、しかも彼自身は個別化の方向に徹底してゐるかのやうに考へてゐるらしい。ここに對象と記號との無用な喜劇的な混同が起つてくる。

要するにスコーレムは記號、オペレーションの法則的な指示機能とこれら對象とのこの特殊な關聯を殆んど顧慮してゐない。ここに彼の「定理」の詭計が無意識にたくまれてゐるのであらう。

この缺陷は逐次的代入の方法でも明瞭にあらはれてゐる。逐次的な代入ですべてを處理しようといふ彼の方針は、言ひ換へれば法則的なるものにとらへられるものを個別的に把握しようといふことであり、これは可附番集

合では可能であるとしても、超可附番なるものに對しては全く消極的な效果しか持たない。スコーレムが逐次的「代入」を墨守してゐることは、かくの如く記號の法則的機能を無視してゐるのであり、個別的なるものは普遍的な法則に貫かれてゐるといふ事情を看過してゐるのである。

「定理」は複雜怪奇な姿態を呈してゐる。それはパラドックスの名にふさはしいであらう。ところがこの「定理」を扱ふ論者達は、この「定理」の一面のみを把へて、その奥にあるトリックを看過してゐるやうである。例へば前に述べたカルナップ的な解釋によれば、「定理」は記號の法則的關係を扱ふ高い立場にあるといふが、これはスコーレムが「代入」によつて變項に一定の任意の對象を代入することを解釋してゐるのであらうが、然しスコーレムの眞の意圖（證明を行つてゐる際の）は、法則的なものを個別的なものに分解することであり、これによつて却つて法則的なものは卑小化されてゐる。これが眞實の事態である。

若しカルナップ流の態度で「定理」を轉釋すればこれは救はれるであらうか。否。何故ならばカルナップに從つて「代入」は變項やオペレーションを一定の記號（例へば自然數）や其關係で代置しても變項やオペレーションの法則的聯關の全內容は明瞭には出て來はしないからである。記號やオペレーションの相互の關聯は、それらの指示する內容によつて規定されてゐる。故に「代入」によつて知られるものは、ただそれら聯關のごく外面的なものにすぎないであらう。そしてこれによつて眞の豐富な內容は却つて拭ひ去られるだらう。「代入」の結果は暗號の文章の如きものであり、或はニュー・ディールをNRAで示す類ひかも知れない。

或は言ふかも知れない。この「轉釋」によつて純化されたスコーレムの方法は、抽象的方法の典型的事例ではないかと。然し斯樣な解釋は許されない。何故ならば、スコーレムの方法そのものは決して內包的法則的方向に向つてゐるのではなく、前述の如く却つて個別化外延化の方向に向つてゐるからであり、その方法自身が誤謬を

包んでゐるからである。

或は更に徹底的に「轉釋」して、スコーレムが變項に一定記號を代入するのは、現實に我々の構成した數命題の含む變項を番號付けるのであり、これによつて我々の現實に用ゐる記號やオペレーションが可附番のものであることが分ると言ふかも知れない。斯樣な研究から將來如何なるものが出るかは知らないが、然し今述べた記號の可附番性などは、煩雜な證明などを全く要することなしに、自明のことではないか。記號やオペレーションの本來の職能を考へてみよ。

だが將來は、と言ふかも知れない。勿論現在の我々はただ憶測的にしか言へないが、だが豐富な結果は望まれないのではないか。何故ならば變項やオペレーションをそれと無關係な一定記號（例へば自然數）で代置することは、餘りにも甚しい外面的な抽象であり、前者のもつ本質的特徴の大部分が失はれて了ふからである。

さてゲンツェン流の解釋はどうであらうか。彼によると「定理」は、現實に我々によつて構成される數學の命題はすべて可附番以上には出て行かないことを立證すると。果してさうであらうか。我々はこのゲンツェンの解釋にも否定的見解をもつてゐる。ゲンツェンの解釋は數命題の充實のところと密接な關係があるが、既に述べた如くに自然數集合に適用された羃集合の構成は、たとへそのうちに現れる記號の數は可附番であつても、この僅かの記號によつて却つて法則的に、適用の結果たる實數集合を把握してゐるのである。ゲンツェンの「解釋」はスコーレムの（前述の）逐次的代入が此處で成功してゐると誤解してゐるところに由來してゐる。前述の如く逐次的「代入」は決して右の數命題を盡してゐるとは保證出來ない。否、却つて有名なカントルの對角線方法によつて、逐次的代入によつては盡されぬことが、可附番箇の記號を用ゐて證明されてゐる。使用する記號の可附番性は決してそれによつて捕へられる對象の超可附番性を否定するものではないことは屢々述べて來た。

以上の如くゲンツェンの解釋もスコーレムのトリックを看破してはゐない。却つてスコーレムの「定理」に全

幅的信頼をおき、人間思惟の超可附番集合への無力をひき出してくる。これは彼が記號やオペレーションの指示機能の法則性に注目してゐないことにもよるが、また彼が認識をすべて逐次的（例のスコーレム得意の）な要素からの構成に限つてゐることにも由來してゐるだらう。ところが現實の數學はこの方法以外に前に述べたNPVを用ひ、この兩方法の統一によつて理論を展開してゐる。例の羃集合による自然數集合から實數集合への飛躍も、このNPVを使用してゐる。逐次的構成を墨守する論者（例へば徹底した直觀主義者）からはこのNPVは排撃されるが、スコーレムやゲンツェンなどもこのNPVを正當には理解してゐないやうに思はれるところがある。これはひいてはNVPが效力を發揮する超可附番なるものへの道をも破壞し去り、「人間思惟の無力」（ゲンツェン）をなげかしめるに至るのではないだらうか。いづれにせよ、NPVの吟味は必要である。そしてスコーレムのNPV觀は彼の「定理」と密接な關係があるから、これを次節に述べることとする。

九

スコーレムの逐次的構成主義、即ち個々の要素から逐次的なオペレーションによつて新しい對象乃至は關係を造り出して行く方法のみを固執する傾向は、彼の「代入」のところで見て來た。ではこの逐次構成主義と異る特性をもつと言はれるNPVは彼に於て如何に扱はれてゐるであらうか。

集合の任意の要素に或オペレーションを施して再び此集合の要素を得るならば、そのオペレーションは再生產 Reproduktion であるとスコーレムは呼んでゐる。再生產にも二つの種類がある。集合の有限箇の要素にオペレーションを施して同じく該集合の要素を得る場合がその一つであつて、例へば代數學の群、環、體などはその例である。彼は此種類の再生產を prädikativ であると言つてゐる。ところでいま一つの種類の再生產は集合のすべての要素に或オペレーションを施して再び當該集合に屬する要素をつくり出す。即ち集合の全體がこのオペレ

ーションに關して完閉 abgeschlossen してゐるのである。この場合の再生産を彼は nichtprädikativ と形容付けてゐるのであつて、我我がNPVで以て略示してゐるところのものである。例へば集合Mの部分集合で或性質Eをもつてゐる部分集合の全體をU_Eとすれば、これの Vereinigungsmenge SU_E は再びMの部分集合であつて且つ性質Eをもつてゐる。即ち集合の全體によつて規定されたものが再び集合の部分乃至要素とされるのであるから、この例はNPVの典型的なものである。

スコーレムは次の如き例についてNPVの充實の問題を論じてゐる。——

いまEを實數に對して意味のある或性質とする。例へば複雜に定義された或一つの到る處で不連續な函數が正の値をもつとか、等々の性質とする。そして次の二つの要求を滿足する實數の集合Mを作ることにする。

(1) Mは體であつて、零に等しくない一つの數を少くとも一つ含んでゐる。

(2) Eの數であつて、しかもEの性質をもつてゐる凡ての數の下限 untere Grenze gはMに屬する。

(1) の條件によつてMはすべての有理數を含まねばならない。これらの有理數全體の集合をM_1とする。M_1の數であつて、且つ性質Eをもつ凡ての數の下限をg_1とする。g_1が既にM_1に屬するならば、M_1は上記の兩條件を滿足してゐることになる。然らずとすると、g_1をM_1に加へ、更に(1)に從つてg_1から四則演算によつて生ずる凡ての數を加へることとする。これら全體の數の集合をM_2とする。M_2の數であつて、しかも性質をもつ數の下限をg_2とする。g_2がM_2に屬するならば、M_2は前記の兩條件を滿足してゐるのである。さもなければg_2を加へて上記と同樣のオペレーションを繰返して行く。ところでこの過程を無限に繰返して$M_1 M_2 \cdots$を作るとき、M_ωの數であつて、且つ性質Eをもつてゐる凡ての數の下限g_ωがこのM_ωに未だに屬しない、といふ如き場合もあり得るのである。するとこの過程は更に transfinit に續けられねばならない。

若しこの論法が正當であるならば、問題のレーヴェンハイム・スコーレムの「定理」は無制限には妥當しなく

なるのである。

だが――とスコーレムは抗議する――斯様な論究は何ものを證明してゐないと。斯様な考察の仕方は不適當であるのであるから、これによつて「定理」の正當さが洞察されないとしても、それは決して「定理」そのものの不當であることを證明するものではないと。

これがスコーレムの抗議である。卽ち彼は、NPVの充實可能性を論ずる際には、逐次的擴大の方法が無力であり得ることを認めてゐる。さすがの彼もNPVを逐次的構成主義で分解し、克服しようといふ企圖を放棄してゐる。これはこの充實の仕方が不適當であるにすぎぬのであり、毫も彼の「定理」そのものの誤謬を摘發するものではない、と彼は抗議するのである。

ところで彼は例の「定理」の證明に際しては逐次的に擴大する「代入」の方法を驅使してゐるが、これと、今述べたNPVの逐次的擴大の充實方法の否定の態度とは如何にして調和し得るであらうか。我々は「定理」が逐次的構成で貫かれてゐるのを知つてゐる。しかも他方では彼はNPVに對する逐次的擴大の態度が無力であり、この態度の不當の故に手續の Transfinit への進行が必要となつてくるのであると言ふ。

では彼は態度を如何に轉換するのか。若しNPVの充實の「Transfinitheit」を全面的に承認すれば、あの「定理」の主張する可附番領域での充實可能性を斷念せねばならなくなるから、斯様な方向に進むことは出來ない。若しNPVの可附番領域での充實可能（これを「定理」は要求する!!）を認めれば、逐次的擴大の方法が可能となる筈である。一方では逐次的擴大の無力を痛擊しつつ、しかも同時に他方では逐次的擴大法を保證する「定理」を主張しなければならない。かくして我々はスコーレムと共に微妙なディレンマにひきづりこまれてくる。

だが彼は態度を轉換すれば、この苦境を突破し得ると言ふ。卽ち彼は次の如く考へる。――

上述の實數の集合Mが既知であるとし、Mの中にあつて且つ性質Eをもつ全ての數の下限gがMの中にあることが立證し得るとする。そしてgが性質Eをもつといふ

ことを證明し得るならば、我々はgから四則演算によつて出てくる凡ての數を集めさへすれば、上記の條件(1)(2)を滿足する如き集合M_0を得る。若し然らずとすれば、上記の假定によつて、Mに含まれてゐて且つ性質Eをもつ數の無限系列、例へば$g_1>g_2>g_3>\cdots$を作り得るに相違ないのであり、しかも$\lim_{n\to\infty} g_n=g$でなければならない。さて$g_1\ g_2\ g_3\cdots$から四則演算で生ずる凡ての數の集合M'_0をつくるならば、これは明かに條件(1)と(2)とを滿足してゐる。故にいづれの場合にも(1)(2)の要求は可附番無限集合について既に滿足されてゐるのであると。

これがスコーレムの「解決」である。然し我々は彼がディレンマの「解決」のために、上述の如き餘りにも多くの假定を導入してゐるのを認めざるを得ない。果してこの假定は妥當のものと言へるであらうか。假定によれば、Mの存在が既知であり、下限gがMの中にあることが想定され、更にこのgが性質Eをもつことになつてゐる。

ところで問題はこれらの假定である。若しこの假定を承認すれば、これから出てくる後續の證明過程はスコーレムの言ふ如く可附番領域で充實されるだらう。ところがこの後續する證明過程は實のところ trivial なものであつて、NPVは其處では何ら見受けられないのである。この後續の證明では、$g_1\ g_2\ g_3\cdots$とこれの收斂するgが既に假定されてゐるのであるから、この數列がgに收斂するといふことは、殆んど自明のことであり、斯樣な trivial な證明が可附番領域で充實されたとしても驚くには當らない。

實のところNPVはあの諸假定のうちにひそんでゐるのである。しかもこれらの假定そのものは決して可附番領域では充實されないのである。まづMの存在の假定を考へてみる。この存在は、問題の函數を正値たらしめる實數値の集合の下界 untere Schranke の存在によつて始めて可能となるのである。しかもこの下界の存在は、該函數の實數の全體についての Verlauf の全體の性質によつて決定される。この函數は到る處で不連續なのであるから、例へば有理數集合のみについての Verlauf で

は、下界の存在は保證されないからである。實數集合全體についての函數の Verlauf の性質による下界の存在の決定、——これはNPVであつて、且つ明かに實數集合といふ超可附番集合をまつて始めて充實される。

次に下限gがMに含まれるといふ假定も、實數集合といふ連續なるものをまつて始めて可能となる。何故ならば、例へば可附番的な有理數集合などでは、數列の極限がその集合に屬するとは限らぬからである。下界の存在——これは連續な集合を根據にして始めて可能なことであり、そしてこの下限がMに含まれるといふことは、前述の下界の存在をまつて始めてあり得ることだらう。かくてここでもNPVがあり、しかもこれが連續集合を背景として始めて充實可能たり得ることを知るのである。

第三の假定、卽ちgがEの性質をもつといふことも、函數が到る處で不連續なのであるから、下界の存在といふ條件を無視しては不可能であらうと思はれる。

以上の如くに、我々はスコーレムとは反對に、彼の「解決法」が決して正當ではあり得ないと主張する。彼の態度の轉換なるものは、彼の解決策なるものは、證明の中樞であるNPVの貫徹してゐる部分を、あらかじめ假定の中に追ひ込むことによつて、證明を骨拔きとし、かくして殘つた trivial な證明過程を可附番領域で充實させるといふ詭計にすぎないのではないか。我々は、スコーレムがNPVに對して逐次擴大の方法を排擊しながらも、「定理」の貫徹を固守するがために、上述の假定の陰にかくれて逐次擴大主義を密輸入してゐるのを知るのである。彼はNPVの本質を少しも理解してはゐない。

十

スコーレムの「定理」の正體とは、およそ以上の如きものである。その「定理」の重要な部分は數命題の單純系列化と逐次代入による充實の方法である。ところでこれ迄の批判からも明かな如く、前者は記號の意味（指示機能）の特性の理解の不完全を、後者はこれと共に更に逐次構成主義の缺陷を自身で曝露してゐる。そしてこの缺陷は必然的にNPVの理解の不足をさらけだしたのであ

る。そしてこれらの缺陷の全體をつらぬくものは數學的對象の Realität の輕視、及び數學的認識とはこれら real な對象を數學概念及びオペレーションを通じて次第に深く豐富に把握して行く過程であるといふ事態の無視である。勿論數學は具體的對象をそのまま把握するのではなく、質の捨象によつて量的に（ヘーゲルの謂ふ意味に於て）把握するのであり、そしてこの量的認識の進展は逆に質の吸收によつて豐かとなるのである。これは數學的思惟の創意性を否定するものではない。數學的認識は抽象によつて甚しく媒介された認識であり、決して鏡が物を映す如くに具體的對象をそのまま反映するのではないから。だがこれは數學的思惟の完全な自己創造を意味するものではなく、それの創意は Realität に媒介されての創意である。若しこの事情を否定するならば、現實の數學史が提供する史實を理解する道は完全に見失はれてしまふだらう。現代數學の豐かな源泉の一つであつたリーマンの創意的な研究が力學物理學と如何に密接な關係があつたことか、また前者が後者のなかから如何に效果多き概念を新しく汲みとつて來たことか（例へば函數論に於ける函數の解析的といふ性質は力學の基本概念であるポテンシャルから汲みとられて來た）。恐らく斯樣な事態は空虛な「創造」說からは理解されないであらう。

勿論スコーレムは斯樣な「創造」說をふりかざしてゐるわけではない。然し彼の記號の扱ひ方や *NPV* の處理の仕方に示された見地は、明かに數學的認識の展開のレアルな理解の不足を自ら物語つてゐる。*NPV* は可附番集合を越えて行くとき最も力强い效果を發揮する。故に *NPV* の本質の理解には超可附番集合の承認が必然的に要求される。そして超可附番集合、例へば連續集合の承認は、これらをも含めての數學的對象の Realität を必ずや前提するであらう。ところでスコーレムの可附番集合への偏愛は、もともと可附番集合が孤立した諸對象の抽象から成立したのと同じく、連續集合の表象が現實の連續した物質からの抽象によつて成立したのであり、兩集合がレアルといふ點に於てはまさしく同權利であると

いふ、この事實の無視に由來してゐるのではないか。この事態を承認するならば、スコーレムの如くにNPVを暴力的に超可附番集合から可附番集合に追ひやつて、このオペレーションの特質を奪ひ去る、といふ必要を少しも感じはしないのである。

さて上述の如き「相對性定理」が示した諸缺陷（記號の意味の理解不足、逐次主義の固執、從つてまたNPVの誤解）はスコーレム獨特のものではなく、ひろく「基礎論」の（勿論すべてとは言はぬ）示す傾向からもうかがはれるのである。周知の如く「基礎論」は、固定した演繹的理論の形式的構造論であるが、この固定したものを對象とすることはこの「基礎論」自身にも固定的な特性を色づけ、かくて生じた靜態的な性格は、現實の要求に照應して發展しつつある他の數學分科、科學部門との遊離をひき起す一因ともなつてゐる。そしてこの靜態的な特色のため「基礎論」は一つの認識から他の新しい認識への進展、この進展のメカニズム（連續と飛躍との統一）を看過してゐる。この發展の、メカニズムの理解のためには、夫々の概念や操作が夫々それらの把握する、Realität の諸側面に應じて必然的に聯關し合つてゐるといふ事情の承認（レアルな態度）が必要であらう。「基礎論」に於ては斯樣な事態の認識は不用のものとして度外視されてゐるが、果してそれで濟まされるだらうか。だが例へば無矛盾性證明が自然數論から數學解析に向つてゐる現在、この兩部門の聯關を、前者から後者への質的發展のメカニズムを無視することは許されない。若しこれを無視するならば數學解析の無矛盾性證明を自然數論のそれに强力的に還元しようとするゲンツェンの企圖も起るのであらうが、この企圖が望みのない喜劇的な企てであることは、兩部門の示す質的相異（勿論同質的なものをも否定するのではない）からも察知されるが、またゲンツェンがこの「還元」の根據としたスコーレムの「定理」が同じくこの質的相異の無視から破綻を來したことからも、明かではないか。

この事情と關聯してまた「基礎論」は記號の意味の捨象をモットーとしてゐる。これは「基礎論」が體系の形

式的構造論であるといふ事情から、記號に過分の內容を與へることを避け、記號の形式的聯關のみを把握しようといふ企圖から起つたのであらうが、然しこれらも不當にも絕對視するならば誤謬は避け難い。もともと形式なるものは內容と不可離のものであり、內容の變化は形式のそれをもひき起すのであるから、あらゆる內容を捨象した形式とか、あらゆる內容に共通な形式とかは、あつても無きが如き空なるものであらう。だが實際の基礎論の研究、例へばゲンツェンの自然數論の無矛盾性證明では、形式的な證明の前に、それの本質的な根據として、例へば自然數領域自體の無矛盾性の承認、Schlussweise の bedenklich と unbedenklich なるものへの分別、證明手段の選擇などが先行してゐる。この周到な質的な內容的なものに目を向けた準備なしには證明は不可能であつたに相違ない。これは數學解析の無矛盾性にとつても同樣であらう。否、この部門の複雜さのために遙かに周到な質的內容的な分析の準備が必要であらう。この部門の質的特性、卽ちそれが超可附番集合を基礎とすること、またこの集合自體は自然數集合と同じくレアルな觀點からは同樣に無矛盾な An-sich-sein であることの承認、だがまた兩集合の內容的相異のため數學解析の無矛盾性證明を自然數論のそれに還元することの不可能の是認、數學解析獨特の Schlussweise の分析、それの bedenklich なものと unbedenklich なものへの分別、特に連續集合を基礎とする NPV の特殊性と不可缺性の認識、それの bedenklich なるものと unbedenklich なものへの分離、それらの內容を考慮しての unbedenklich なものへの bedenklich なものの還元の手段の選擇（これはゲーデルの定理によつて至難のことだらう）等々といふ記號の意味を配慮する內容的な準備が必要であらう。

要するに記號の意味とか內容の捨象は、記號の把握した內容以上のものを記號に押しつける危險の防止以上を望むべきではない。若しこの限度を越える如き內容無視を要求するならば、記號の特性を無視して、これの可附番性からそれの把握する對象自體の可附番性を導かうと

いふスコーレムやゲンツェンの誤つた方向にひきづりこまれるだらう。

「定理」に見られた逐次構成主義は「基礎論」では有限主義（ヒルベルト）乃至は構成主義（ブラウワー）となつて現れてゐる。然しこの有限主義は自然數論の無矛盾性證明にゲンツェンが Limesbildung の必要な第二階級數を手段としたことによつて既に部分的には崩壞を始めてゐる。そしてゲーデルの定理は益々この崩壞を促進するものと考へられる。「基礎論」の有限主義構成主義の偏向は、スコーレムの「定理」となつて現れ、或はまた*NPV*の輕視乃至は危險視となつて現れてゐる。これは基礎論の當面の課題である數學解析の無矛盾性證明を妨害する最も重大な要因の一つであらう。この構成主義有限主義を止揚するためには、レアルな（數學的認識は具體的對象の一側面、即ち量的側面の把握であるといふ）且つ發展的な（數學的認識の發展は具體的對象の一側面への漸次的な且つ飛躍的な近迫であるといふ）觀點の確定が必要であらう。これによつて構成的なるもの、有限的なるものは、對立する非構成的なるもの、無限なるものと不可分に統一さるべき一モメントであるといふことが理解されるからである。

以上によつて我々はスコーレムの「定理」は何ら孤立した特異の現象ではなく、ひろく「基礎論」にあらはれてゐる偏向と同じものであることを知つた。我々は「定理」に消極的評價を加へざるを得なかつたことに照應して、「基礎論」の示す偏向をも、レアルな發展的な觀點によつて批判的に克服しなければならぬだらう。

基礎論は形式的構造論にすぎない。それはその形式的研究の前提としてそれの必然的對立部門として概念の、オペレーションのレアルな發展的な觀點よりの考察を要求すべきである。若しこの限度を無視して基礎論がオール・マイティを主張するならば、徒らな形式的遊戲の累積に終るであらう。ゲンツェンが認識論的考察を排擊しながら（これは從來の所謂數理哲學の無力にも責任はあるが）、「人間思惟の有限性無力さ」といふ卑俗な哲學にとらはれて了つたのも、「基礎論」の過信に起因してゐる

だらう。哲學を輕視するものは最惡の哲學にとりつかれるといふ皮肉な運命、これは現在の「基礎論」に色濃くあらはれてはゐないか。スコーレムの「定理」などはこのクリジスの一つの現れであり、この「定理」などによつて「基礎論」は果して數學解析に立向ひ得るだらうか。「基礎論」は基礎的であるなどと過信してゐられるものだらうか。

註一　理論の展開につれて變項の函數の問題が複雜化して來るといふことは、他面からみれば、この變項を土臺として成立する命題函数が数學的理論學で謂ふ erste Stufe から höhere Stufe に上昇して行くことである。ツエルメロの集合論公理系はその出發點に於ては erste Stufe のみで展開され得るかの如き外觀を與へるが、特に Aussonderungsaxiom や Ersetzungsaxiom に含まれてゐる束縛記號附きの命題函數 E（これは zweite Stufe のものだが）も命題函數の系列化によつて erste Stufe に還元可能であるとスコーレムが主張することによつて、集合論公理系が一切合切 erste Stufe で始末出來るかのやうであるが、この外觀が内實のない假象にすぎぬことは、今述べた變項の複雜化、高次化からも判る。

註二　一歩を讓つて命題函數の系列化が可能であるとしても、そしてこれによつて Aussonderungsaxiom や Ersetzungsaxiom が數命題の擴張形になるとしても、だが此處に疑惑が浮んで來る。卽ち、これら公理の中の例のBに代入されるべき命題函數はあらゆる可能なるもの、故に少くも可附番無限箇あるから、そして命題函數の含む變數は（たとへ有限箇にしても）代入の進むときいくらでも增加し得るのであるから、これらの變數を束縛するA記號は少くも可附番無限である。ではこれら公理系から、そしてこれら公理系の適用から出てくるところの、無限箇のA記號をもつ「數命題の擴張形」のあらゆる可能なるものは果して系列可能であらうか。明かに不可能だ。このA記號の無限系列にΠ或はΣの配當される仕方の全體が超可附番であることは斷るまでもないから。

【後記】スコーレムの「定理」のトリックはつきつめてみれば至極簡單なものである。だがこの簡單なトリックをカルナップやフレンケルや、特にゲンツエンの如き有能なる「基礎論」者が何故に見逃してゐるのだらうか。この「定理」もさうだが、これのトリックを見落す論者たち——これらは「基礎論」を貫流してゐるところの、意味輕視の記號萬能主義のもたらす一つのパトロギッシュなきざしと斷定し得ないだらうか。

——完——（十月十九日）