數學論序說

——覺え書き風に——

近藤洋逸

一

數學の對象は何か。數とは何か。恐らく斯樣な質問は數學の專門家自身にとつては熟知のものであり、無用の問ひであるかも知れない。然し熟知のものでありながら、この問ひの答へ程、多種多樣のものも少いだらう。

自然科學の對象があの現實の自然であり、社會諸科學の對象が、我々が現に生き、それにとりまかれてゐるところの、現實の社會であることは、誰しも異論はないであらう。勿論、個々の細かい定義付けや說明については異同はあるとしても。

ところが數學の對象はどうか。

或るものは數學を自然科學の一部門として、その中に編入してしまふ。例へばジョン・ステュアート・ミルは言ふ。——「數の定義の中で言ひ表されてゐる事實は物理的事實である。」「二、三、四等々の各數は各々物理現象を示して居り、且つこの現象の物理的性質で以て示してゐる。二は物のすべての對(ツイ)を、そして十二はすべてのダースを示し、且つそれらを對とかダースとかにするところのものを以て、それを示してゐる。」

だがこの定義では、心理作用が何箇あるとか、論理的可能性がいくつあるとか言ふ場合をどう說明するのかと疑問が提出される。ミルの所論は數と現實との同一性を強調するのあまり、兩者の相違性を看過してしまつた。

では數と現實とを切離して、數を記號としたらどうで

あらうか、「數に就ての抽象的な眞理や定理と見做されるものは、眞實には、個々の數へらるべき諸物から區別され得る如き如何なる實體にも向ふものではなく、加ふるに單に名辭と數字に向ふのであり……」とバークリイは言つてゐる。數は數字であると。ヘルムホルツも言つてゐる。——「數へることは一つの手續であつて、これは我々が意識の狀態が時間的に相次いであらはれてゐる系列を記憶にとどめ得るといふことに基づく、我々は數をまづ任意に選ばれた記號の一系列と見做してよい」と。成程我々は數學では記號を扱ふ。だが記號とそれが表示する對象そのものが同一のものであらうか。

數を單なる記號として、これを用ゐる算へ作用によつては、單に數と數へられた物とが同數であることを知るばかりであつて、其數が算へられた物の集合であるといふ意味は理解出來ないだらう。だから記號が集合の數を表はすといふことは別に說明を必要とするといふラッセルの抗議は首肯しなければならない。實際ヘルムホルツも彼の稱する記號から數學の基礎演算を導出しようといふときは、記號の表示する意味に賴らざるを得なかつたのである。この唯名論的數學論は、最近ではウィーン學團(ナチス制覇以來離散したやうであるが)によつて持ちつづけられてゐる。彼等によれば數學は記號の體系にほかならず、それらの法則は、遊戲のルールの如く、單なる規約にすぎない。

だが我々は斯樣な無意味な記號の遊戲で何故に自然に立ち向ひ得るのであらうか。數學が物理學の重要な武器であることは周知の事實である。恐らくこの抗議に對しては、唯名論者は斯う答へるだらう。數學の適用は數學自身にとつては偶然のことにすぎない。では何故に一定の自然の問題に對して、一定の數學部門を武器に用ゐうるのかと。これは便宜の問題にすぎない。重力場の理論にリーマン幾何學が用ゐられるのは、ユークリッド幾何學を用ゐる場合よりも、定式化が、記述が簡明であるからと。では何故に、便宜、不便宜の差異が生ずるかと。この質問は彼等記號主義者自身の立場を衝くものであり、彼等にとつては問題になり得ないことである。かく

て彼等は我々の疑ひの出發點に立場をおいてゐるのである。

素朴な經驗論や唯名論では、數學の對象の問題は解けさうもない。數學自身がこれらの立場を反撥するやうである。

では數學の對象は、現實を離れた、若しくは一般的に云へば、經驗の現實の中に源泉を持たない純粹なイデアであらうか。

プラトンは哲學の豫備學として幾何學を必須のものとしたことは周知のことである。彼によれば、數學の優れた本質はイデアの中にあつた。しかも計算は商業的なものとして輕視し、純粹たるべき幾何學の中に、器具を用ゐる量的關係の規定や作圖の導入を、幾何學の本質をけがすものとして排斥した。プルタークの傳へるところによると――「プラトンは起つて、憤然この種の實驗機械學を攻撃し、之は虚靈にして、精神的なる幾何學原理に、粗俗な形態を與へるものであるが故に、多大の手工を要し、下劣な商品と墮落するものであると斷言した。」

このプラトン的數學論は彼以來イデアリスムスの中を一貫して主張されてゐる。

ライプニッツによれば、數は言はば「一つの非物體的形象であり、何らかの個物の合併から成立してゐる。例へば神とか一人の天使だとか一人間だとか運動だとかを合せて四になるといふ譯である。」故に數は「普遍的なもの」であり、この普遍的な要素の關係を論ずる Kombinatorik これを所謂數學をも論理學をも包括した普遍數學とした。これのうちでは、任意の命題や概念が記號で表され、それら相互の關係は全く形式的に扱はれる。かくて數學は、現實を離れた純粹に形式的な科學とされるのである。

この思想傾向はラッセル、フレーゲ、クーテュラー、ペアノなどの論理主義の數學論に流れこんでゐる。ラッセルによれば、純粹數學はPからQが結論されるといふ形式の判斷の總體にすぎない。其體系の冒頭に前提される定義は規約にほかならず、果してこれ自身が現實世界の事實に照應するかどうかは、數學自身にとつては無緣

のことであり、故にそれには眞僞の別はない。數學はこれこれの前提を假定すれば、これこれの結論が出てくるといふ形式的な依存關係の體系、所謂假言的演繹の體系である。そして定義は論理によつてのみ行はれるのであるから、數學は純粹論理の一部として、その中に吸收されて了ふ。ところで數は何か。ラッセルによれば、それは一對一の對應關係で結ばれる諸部類（クラス）全體の部類である。フレーゲによれば數は概念に歸屬し、その概念の外延がその數の大さを決定する。部類（クラス）は概念により內包的に決定されるから、ラッセル、フレーグは本質に於ては一致する。

では數學體系の冒頭に前提される定義とは何か。ラッセルによれば、或概念の定義とは其概念の代りに代入し得べき既知の概念の結合である。卽ち、彼によれば定義は名義的定義であり、判斷ではなく、規約の陳述にすぎないのである。例へば1は唯一部類の基數であり、一般に數とは、相似的（シミラー）部類の部類である。

だが斯樣な定義によつて1の、數の、意味が理解されるであらうか。實のところ、1を、數を理解せるもののみが、これら定義の意味を理解するのではないか。ヒルベルトも此點について抗議してゐる。彼に從へば、ラッセルなどの論理の中には既に數學的原理が含まれて居り、定義とはポアンカレの言ふ如く、變裝した公理にすぎないのではないか。

かくて我々はヒルベルトの公理主義に移つて行かねばならない。ヒルベルトは、定義すべからざる基本概念を認め、これらを一群の公理系によつて內在的（インプリシット）に定義する。公理主義者はこの公理系から出發する。そして公理は經驗的現實から全く獨立であり、そしてこの公理系から發足する推論はまつたく現實とは無關心に進行する。かくて數學は公理系を前提とする假言的演繹の體系にすぎない。この公理主義に於ては數學的なるものは、公理系の中にもりこまれてゐるから、この點に於ては論理學派とは異つてはゐる。だが現實からの超絕、假言的演繹性を數學の特色とするところは、兩者とも軌を一にする。

これらの學派にとつては、數學にとつては現實はまつたく無關係のものである。數學の土臺となる現實性の如きものは存在しない。それが自身の存在權利を主張し得るのは、ただただ自己のうちに矛盾を含んでゐないといふことによつてのみである。

ヒルベルトは先づ思想對象1を考察の對象とし、だがこの1の何かは問はず單なる記號と考へる。この1を二回三回等々と、それ自身と綜合したものを1のそれ自身との結合を呼ぶ。次に第二の思想對象として＝(相等性)を導入し、之と1との結合を考へ、これをも思想對象とする。そして「如何なる思想對象XもXと相等なり」「任意の思想對象Xを含む任意の結合はそのXをそれと相等なるyにておきかへたる結合と相等である」といふ二公理により、1及び＝記號の意義をインプリシットに規定して行くのである。

だが上記の公理を見るに、1を規定するために二とか三とかの數が含まれてゐる。二とか三とかの意味が公理以前に知られてゐない限り、上記の規定はまつたく理解されないだらう。かくて我々は公理主義數學論は、數學の基礎を論ずる數學論としては極めて不備であることを認めざるを得ない。

そればかりではない。數學が假言的演繹體系とすれば、何故に一定の數學體系が現實に有效であるか、といふ疑問に答へることが出來ないのである。

かくて我々は、數概念及び數學體系の成立を認識論的に究明することの必要さを否應なしに感じてくる。

二

さて數學が經驗主義によつても、公理主義、論理主義、等々によつても、本質が充分に把握され得ないのであるならば、我々は數學の構成の論理的進展自身の基礎に眼を轉じなければならないだらう。

我々は數學についての種々の「哲學的基礎付け」を知つてゐる。例へば純粹直觀の形式である時間形式と悟性概念との結合、あの所謂時間の圖式として數學を規定し、空間形式と悟性概念とを結合し媒介する空間の圖式の上に幾何學を基礎付けるカント。このカントが時空形

式を導入することによる（たとへそれが純粹であるにせよ）經驗主義への幾分の讓歩をも捨て去つて、純粹思惟の論理的生成の上に全數學を構成しようといふコーヘン、ナトルプのマールブルク學派。この學派からは、數の成立を「物を物に關係せしむる、物に物を對應せしむる、或は物を物によつて映寫する」精神の創造的な自由な能力に歸着させる數學者デデキントは、この上もなき理論的支柱としての待遇を受けてゐる。また高次對象として數の對象を考へるマイノング一派の對象論者。更に無内容な Etwas なる空虛な對象及びこの對象に對する志向作用の反省の上に數を構成して行くフッサール。或は、數學の對象のもつ普遍性と同質性を基礎付けるために、これら對象の基底に、あらゆる差異性を中和化する公分母的場合を要請する立場。また、マールブルク學派のうちから失はれた直觀性を、外的直觀としてではなく、體驗の内面的直觀として、回復しようといふ立場。等々。

我々はこれらの哲學的基礎付けの各々にそれぞれの特色を認めることが出來る。だがこれらの詳細な分析は別の機會に讓るとして、ここではそれらの立場に共通な特質を擧げておきたい。

これらの立場はいづれも、數學を現實から引離された純粹な形式的科學としてゐる。これは、ミルなどの經驗主義が數學を自然科學の一部門に編入するのと、全く鋭い對立をなしてゐる。「Faktum を豫想して Rechtsgrund を問ふ」（ナトルプ）のが先驗的方法であるが、これらイデアリスムスからは概ね數學の純粹形式性非經驗的性格が Faktum として豫想されてゐる。果してさうであらうか。だが他方に於ては我々は、數學の抽象性をまつたく見失つてゐるミル學徒ともなることは出來ない。

ではいづれに？

恐らくこの問ひは數學の史的發展自身の究明によつて決定さるべきであらう。哲學と哲學史との不可離の關係は、ヘーゲル以來既に我々の重要な、言はば常識となつてゐる。

ところで數理「哲學」に於ては？

プラトン、ライプニッツ、などでは、數學的命題は固定した永遠の眞理、下賤な現實を超絶せるイデーであつた。現實への歷史への道は切斷されてゐる。

論理學派に於ては、數學的眞理は現實とは全く無關係な規約的な定義から出發する假言的演繹體系であつた。

公理主義に於ても、現實とは無縁な形式的公理系から、形式的推論によつて進展する形式的命題のメカニズム、これが數學であり、現實への適用可能は、偶然、乃至は豫定調和にすぎなかつた。

對象論に於ける數學的なるもの、これは個物の上にきづきあげられた高次對象ではあるが、この高次對象自身は概念的なるものとして、それの史的現實的發展は無視されてゐる。

フッサールに於てはどうか。「算術の哲學」の時代の彼には、心理主義的な發生的見地が所々にうかがはれ、歷史的觀點が顧慮されてゐる。例へば數表象の成立を未開人の數表象と聯關させて說いてゐる。また現實性も、例へば計算器具も顧慮されてゐる。例へばインドに於ける零記號の導入を、ハンケルを引用しながら、算盤使用に基づけてゐる如く。然し彼の展望は極く初等的部分にのみ限られてゐる(進んだ展開は續卷に約束されてゐるが、これは實現しなかつた)。また極く簡單な初等的數表象のみが本格的(アイゲントリッヒ)數表象とされ、複雜な數表象は非本格的な象徵的(シンボリッシュ)數表象とされてゐるが、この象徵的數表象が何故に現實的に效力を發揮するかといふ問題、即ちその表象とレアリテートとの聯關の解明が不充分のままにとり殘されてゐる。これは何故であらうか。恐らく、象徵的數表象は、それが象徵的であり、言はば本格的表象の代用物ではありながら、しかもレアリテート自身を深く、その一側面に於て把へてゐるためではないのであらうか。或は、數學と現實との交渉を、算盤といふ如き初等的のものに限ることなく、自然科學、技術、特に物理學との交渉にまで展げる必要があるのではなからうか。

それはさておき、フッサールの觀點は、「算術の哲學」から「論理的研究」にうつると共に急角度に心理的發生的色彩を拭ひ去つて、數學の對象をイデー的統一とみる

傾向に進んでゐる。「論理研究」の初卷であるプロレゴーメナは心理主義との鬪爭に全力が注がれてゐる。色彩豐かな現實との交渉は、數學の對象には非本質的なものとして除去されて了ふ。ではどうして、この觀念形象が現實に適用されるのか。我々はかう問ひたい。

　カント、新カント派に於てはどうか。これらに於ては數學の對象は、純粹直觀形式として、圖式として、或は純粹思惟の措定せるものとして、主觀の中に（先驗的主觀とは言へ）のみ與へられてゐる。

　では何故にカントの時代に於て世界空間形式の唯一無二のものとしてのユークリッド空間が、相對性理論によつてリーマン空間にまで擴大されねばならなかつたのか。カントに於てはユークリッド幾何學とニュートン力學が科學の不變のモデルとして擧げられてゐた。だが現實の歷史はそれを覆した。カッシラーなどの新カント派は、この難點を除くために、Beisammen といふ如き、連續性といふ如き、ユークリッド幾何にも、リーマン幾何にも共通な性質のみを直觀形式としてゐる。これは明らかにカントの修正ではあるが、果してこれで救はれるであらうか。Beisammen といふ形式は實に抽象的ではある。だが何故にこの抽象的形式が主觀の形式としてのみ主張され、レアリテート自身の形式として許されないのであらうか。それは抽象的普遍的であるからと答へるかも知れない。では何故に現實それ自身に抽象性普遍性が許されないのだらうか。これに對してかう答へるであらう。感性的經驗的なるものは個別的であり普遍性を持たぬ單なる雜多にすぎず、主觀の形式がこれらを結合することにより、始めて普遍性が與へられると。ではこの主張を何によつて證明するのかと我々は問ひたい。

　この問ひに向つて、それは體驗が直證すると答へることも出來るだらう。然し知覺が感覺的多樣の、無連絡の雜多として與へられるといふ聯想心理學的考へは、今日の心理學では既に棄却されてゐる。知覺が具節的全體として與へられ、感覺的要素は却つてそれの人爲的分析抽象によつて折出されるのである。

　或はかう答へることも出來るかも知れない。例へば三

角形一般は現實には存在しない。存在する現實の三角形は一定の邊の長さと角の大きさを持つた一定の三角形のみと。故に三角形一般は現實のものではなく、純粹に概念的なものであると。だが我々は更に抗議したい。三角形一般は、一定の三角形から一定の邊の長さや角の大きさを捨象した、或はもつと精確に言へば、これらの大きさの變化にも拘らず、保持されるインヴァリアントな性質、これが三角形一般ではないかと。實のところ、三角形一般の性質が、現實の個々の三角形に本質的に含まれてゐない限り、この三角形自體が三角形としても認識されないのではないか。

或はかう言ひ得るかも知れない。かくの如く所與の三角形を三角形として認識するためには、三角形一般のイデアが前提されてゐなければ、この認識は不可能ではないか。即ちこの抽象的本質は、認識の前提として經驗的ではあり得ないと。

だが我々は次の如く問はう。認識の前提は何故に非經驗的なのかと。前提されるもの自身がレアリテート自體の普遍的規定ではあり得ないのか。普遍性と特殊性は個體自身に於て本源的に統一されてはゐないのか。

或はかう言ふかも知れぬ。例へば直線をとつてみる。幾何學に云ふ幅のない直線が、大さのない點が現實に存在するか。これこそ幾何學のイデア的性格を示すものではないのかと。だが我々はかう言ひたい。大さのない點は位置の表示のために、その大さは非本質的なものとして捨象され、また幅のない線に於ては、例へば長さ自身のみが本質として抽象され、それ以外の性質が捨象されたためではないかと。

我々は斯樣に、次から次へと疑問を發せざるを得ない。勿論、我々はこれらの數學の言はばイデアリスムスの主張を全面的に、無批判に反撃するのではない。ミル流に、素朴に數學の對象を、無媒介に自然の個物と同列におかうといふのではない。例へば物理學の對象と、數學の對象が同一のものであるといふのではない。熱傳導の問題で或種の偏微分方程式が有效に用ゐられるからといつて、その方程式自身は熱の傳導ではない筈である。

またペンドゥラムの問題に楕圓函數が用ゐられるからといつて、兩者が同一のものであるのではない。だがこの差異性を絶對化し、兩者を完全に何らの連絡もなき異質的なものとする主張、卽ち右に考察した數學のイデアリスムスの立場に無批判に贊同することも出來ないのである。

我々は自然數、實數、複素數などの理論に於て、これの結合法則の一つとして、例へば乘法の可換性を知つてゐる。これはハンケルなどによつて「形式不易の原理」として、永遠の形式的な眞理として主張されて來た。ところが、例へば結晶體の面の回轉によつて生ずる置換群に於ては結合の可換が不成立のことがある。また量子力學に於て操作をエレメントとする群に於ても結合の可換性が成立しない。斯樣にして、數學の展望自身が、普通の數から、現實自身の內部に喰ひ込むにつれて新しい關係が、法則が、展開されるのではなからうか。勿論これはいまのところ、單なる暗示にとどめておくが。

いづれにせよ、我々は數學の外部から、無批判に、數學自身を何らの立場におしつけるべきではないだらう。ヘーゲルの水練の譬喩にまつまでもなく、數學自身の本質は、それの具體的發展を追跡することによつて、それの內面的發展經過と、これと現實との交渉の發展史の究明を通じて、明かとされるべきであらう。哲學と哲學史との不可離の關係は、ヘーゲル以來既に我々の重要な、言はば常識となつてゐる。ところがわが數理哲學に於ては、この自明の原則が（勿論この原理がヘーゲルに於て認識されるまで幾千年の哲學史が必要ではあつたが）全く無視されてゐるか、それともあまりに史的事實が安易にとらへられてゐるため、例へば素朴な經驗主義に、例へばひたむきな先驗主義に傾斜しすぎてゐるのではなからうか。

我々は、數理哲學を（數學論を）數學の、及び數學と他の文化全領域との交渉の、全發展史を通じて再編成すべきであらう。

我々は次節以下に於て、數學論にとつて、興味ある數學史の事實をエピソード風にひろひ上げて行きたい。これらの事實は、數理哲學者自身によつて、餘りも輕率に扱はれ、乃至は無視されがちであつたからである。

（未完）