哲學研究 第二百九十九號 第二十六巻 第二冊

空間の數學と形而上學

下村寅太郎

I

初めに主題の意圖を明かにして置きたい。今日では、數學と哲學とは互に獨立な領域と方法とをもち、直接的な關係をもつてゐない。しかしこのやうな關係は豫め始めから存在してゐたのではなく、生成し、成立したものであることとは、古代に於いても近代に於いても渝らない。例へば、希臘に於いて、數學が數學として成立し、哲學から獨立したのは、プラトンの晩年、正確にはアリストテレスの學派に於いてゞある。今日の「數學」の原語たる Mathematike が數學を意味するやうになつたのはアリストテレスの學派に於いてゞある。周知の如く、ピュタゴラス派では數學は同時に自然學にして又形而上學であつた。プラトンの晩年の「イデア數論」も必しも數學の獨立を豫想してそれに對して哲學的思辨を逍れるものとは言へない。プラトンの後繼者、特にスペウシッポスに於いては數學は依然として Zahlenmystik である。然る後にエウクレイデスの『ストイケイア』は——種々なる前史をもつにしても——然る後

に成立し得た。この事態は近世に於いても同様である。周知の如く、デカルト、ライプニッツの時代に於いては數學は普遍的方法であつた、それは同時に數學にして自然學であり、更に形而上學であることを理念とした。このことは他の言葉で云へば、數學と自然學と形而上學とは未だ原理的に區別せられず、分岐獨立してゐないことを意味する。數學と哲學との區別が問題にされたのはカントの時代に於いてゞある。周知の如く『純粹理性批判』先驗的方法論の中心問題の一つはそれである。數學と哲學との區別がもはや問題でなく事實になつたのは十九世紀のことである――。

それ故、數學の歴史には、數學の發展の外に數學への發展――數學としての數學の形成が區別されねばならぬ。そうしてこの數學としての數學の成立が同時に哲學が哲學として――形而上學として成立することである。從つて數學の展開には謂はゞ Vor-mathematik と Mathematik と Meta-mathematik との三つの段階が區別される。所でこの Vor-mathematik の段階に於いては、哲學は未だ必しも Meta-physik といふ性格をもたず、Physik も亦 Meta-physik と區別された Physik ではない。自然學としての自然學、形而上學としての形而上學の成立は實は數學としての數學の成立と同時的である。

それ故一般に、數學の生成或は成立は單に數學の生成、成立に止らないで、數學の生成は同時に哲學の生成であり、數學の成立に於いて哲學も亦自己自身の性格を形成する。數學としての數學の成立と哲學としての哲學――形而上學の成立とは互に媒介的であると言はねばならない。この意味に於いて數學の形而上學的系譜が求められ得るであらう。このやうな性格をもつた哲學や數學は確かに西洋の哲學乃至數學に獨自のものであり、西洋に於ける學問の理念或は性格を特色付けるものと言はねばならぬ――。

我々はこのやうな立場でこの問題を近世に於ける空間の數學即ち幾何學の形成に關して追究して見ようとする。これは單に歷史的な問題たるに止らないで、一般に數學と哲學との歷史的內面的な關係と、更に、それによつて數學の本性に關する若干の洞察を期待したいと思ふ。又哲學史乃至科學史の方法の一つの問題ともなり得ないかと思ふ。

猶ほ、此處で特に幾何學を問題にするのは――。今日では幾何學は單に數學の一部門にすぎないが、しかし近世の始めに於いては、「幾何學的方法」が同時に學問一般の方法を意味し、普遍的世界的――universal な意味をもつてゐた、即ち幾何學は單に數學の一部門ではなく、數學そのものであり、或は寧ろ世界の數學といふ性格をもつてゐた。そうして、幾何學的神祕主義とも稱すべきものがその根底に前提されてゐる。幾何學が純粹に數學となり、更にその一部門と解せられるやうになつたのは幾何學の生成の結果である。我々は正にその生成を問題にするのである。

II

我々は一般に幾何學を「空間の數學」と解してゐる。しかし幾何學を空間の數學と解するのは恐らく近世のことであつて、希臘では幾何學は果して空間の數學と解されたか否かは一應問題である。希臘の幾何學は一般に三角形、矩形、圓、等々の個々の空間的形態を問題としてゐる。これは未だ必しも空間そのものゝ數學とは言はれない如く見える。しかしそれに對して近世の幾何學は――特に近世的と呼ばれる幾何學、例へば射影幾何學に於いては、固定した空間的形態は問題でなく、形態の大きさ・角・直角性・平行性をいかに變換しても猶ほ不變である如き空間的構造

——或は寧ろ空間そのものゝ構造を問題にしてゐる。更に位相幾何學と呼ばれるものに於いては空間は單にN次元の連續體として取り扱はれる。このやうな幾何學に於いて始めて空間的形態のでなく、空間そのものゝ數學と呼ばれ得る如く見える。

確かに古代と近世の幾何學にはこのやうな性格或は類型の相違が認められる。しかし希臘の幾何學も空間を形態的なるものに於いて把えてゐるのであつて、その意味に於いて空間の數學と言ひ得るし、又言はねばならない。それに對して近世の幾何學は唯〻それとは異つた仕方に於いて空間を把えてゐると言ふべきであらう。それ故古代と近世の幾何學との相違は空間の把え方の相違に外ならぬ。從つて古代の幾何學と近世の幾何學との性格の相違は、それの根底になつてゐる空間の性格の相違に基づくと解し得るであらう。即ち古代の空間は形態に於いて把えられる空間、從つて有限なる空間であるに對して、近世の空間はそれ自身定形をもたざる空間、即ち無限なる空間である。近世の幾何學の性格は近世の空間の性格に基づく。

實際に、古代の空間概念は、例へばデモクリトスの *κενόν* にせよ、プラトンの *χώρα* にせよ、アリストテレスの *τόπος* にせよ、何れも近世の空間概念に直接に對應するものではない。*χώρα* は『ティマイオス』篇によれば、それに於いて物體が存在する所の個所である。近代語の room に當ると言はれる。それは物の存在せざる「空虚」ではなく、又それから物體が形成される「質料」でもなく、それに於いて物が存在する場所である。單なる容器、單なる受容者——*ὑποδοχή* である。

アリストテレスの τόπος も "place" の意味であり、「圍まれたるものを圍でゐる限界」として規定される。そこで一切の物を包むもの、トポスのトポスとして天が考へられ、天は一切の物を包む限界として天自身にはトポスはないと言はれる。所で天は限界付けるものとしてそれ自身も限界されてゐる。從つて天も有限である。

最後に κενόν は void 即ち空虛を意味する。空虛としての空間は ἄπειρον として無限と稱せられる。固より ἄπειρον は限界のないもの、限定されてゐないものを意味するけれども必しも無限の延長を意味しない。文獻學者によれば、寧ろ始めは、圓形、球形を意味しさへした。圓形や球形は始めも終りもなく、諸部分の限界もない故にアペイロン——無限と呼ばれた。固より極めて具象的な形であり、有限者である——。所で κενόν は最初「空氣」を意味した。空氣しか這入つてゐない容器を我々は通常空虛と言ふ、その意味に於いてケノンは空氣と同一視された。しかし空氣は固より何物かであつて無ではない。空氣と空虛とは區別されねばならない。眞に空虛としての空間が考へられたのはデモクリトスであると言はれる。デモクリトスは物と物とを差別し、物の多を可能ならしめるために空虛の存在を認め、物の運動が可能であるために空虛な場所の存在を認めた。そうして無數の原子の存在とそれの運動とを理解するために無限な空虛な空間の存在を導入した。希臘に於ける無限な空間の思想の傳統がこゝに成立した。周知の如く、この思想はプラトン、アリストテレスによつて拒否されたが、エピクロスによつて復活、保持された。エウクレイデスの幾何學に於いては平行線の概念や公理は實際に無限な直線の延長、從つて無限な空間を承認してゐる。實際にエウクレイデスはエピクロスと同時代である——。我々は此處に希臘に於いても無限なる空間が積極的に樹立されてゐることを認めねばならないやうに見える。

しかしこの無限は依然として消極的な無限であり、單に indefinitum としての無限にすぎない。單に消極的に限界がないと言ふ丈の無限である。加之、抑〻空虛が有限であるか、無限であるかは、凡そ意味のない問題であると言はねばならない。

結局、古代の空間は、存在でなく、存在の限界であるか、若しくは非存在である。假令その空間が無限と言はれても空虛な無限であり、非存在の無限である。積極的な無限、卽ち實在的な無限、無限なる存在としての空間は古代では考へられなかつた——。

indefinitum と區別された infinitum が考へられたのは、近世——古代に對する近世である。眞の無限は有限の延長でなく、有限の否定であること、永遠は長き時間でなく、時間の超越であること、——無限は Ende-los でなく、un-endlich であるといふ「無限の論理」が自覺されたのは、哲學史の上では、ニコラウス・クザヌスに始まると言はれる。こゝに始めて世界の無限性、實在的に無限なる世界の概念が成立することになる。さうしてこの立場に於いて始めて、空虛な無限な空間でなく、實在的にして而も無限なる空間が考へられるやうになる。近世に於いて始めて空間の問題が同時に世界の問題になり、空間卽世界となる如き謂はゞ「空間の形而上學」が成立するためには、世界を無限とする新らしき形而上學が豫想されてゐるのである。

けだし、空間が存在に對して空虛を意味する場合には、存在は限界をもつことを豫想し、存在の限界の彼方に空虛が考へられるのである故、その場合世界は有限と解されてゐる。しかし無限な世界に於いては世界には限界は考へら

れ得ず、從つて世界に對して空虚な空間の存在は認められ得ない。世界即空間となる。

近世の空間論には確かにこのやうな謂はゞ空間の形而上學が背景になつて居り、この空間の形而上學はやがて世界を無限とする形而上學を豫想してゐる。

Ⅲ

近世の始めに哲學者が「幾何學的方法」を學問一般の方法とし、*die* Methode と解した根底にはこの空間の形而上學が豫想されてゐる。

尤も、デカルトやスピノザが「幾何學的方法」として實際に行つたものは外面的には必しも幾何學的な性格をもつてゐたとは言へない如く見える。寧ろ單にエウクレイデスが幾何學を組織した方法を範型としてゐるに止るやうに見える。それは幾何學的と言ふよりも axiomatisch ——公理論的と言はるべきであらう。卽ち論證の究極的原理たる公理を形成して、それから演繹的に論證する方法である。これだけならば單に幾何學に於いて適用されたる方法といふに止まり、必しも幾何學的方法とは言はれない。しかしデカルト、スピノザの方法には單にかゝる外面的方法の形式に於いてゞなくそれの本質に於いてあくまで幾何學的と言はるべきものがある。デカルト、スピノザの方法の本質或は原理となつてゐるものは明證（Evidenz）であり、存在の構造の純粹なる直觀にある。彼らに於いては intellectio は intuitio の性格をもつてゐる。これは何らかの意味に於いて幾何學的と言はれてよいであらう。しかし彼らの方法が積極的に本來的に特に幾何學的と言はれるのは、より實質的內容的に空間の問題に聯關するによる。

デカルトでは自然學は幾何學に還元さるべきものであり、更にスピノザに於いては空間性はやがて神の屬性の一つであり、從つて「幾何學的秩序」は直接に世界の神的な秩序であり、世界の實在的なあり方である——。このやうな立場に於いては幾何學的方法は單なる論證の方法といふ如き單に形式的外面的なるものでなく、直接に世界の本質に係はるものであり、世界の本質を洞察する方法である。實際に空間の問題は十七、八世紀を通じて單に數學の問題でなく、世界の本質の問題であり、從つて哲學、神學の問題であつた。實際にデカルトやヘンリ・モーアの時代からニュートン、カントの時代に到るまで空間論は形而上學的な問題であつた。ニュートンが空間を sensorium dei としたのもかゝる狀況を示すものである。ヘンリ・モーアは、デカルトが空間を延長的とすることから空間と物質とが同一視されることに反對して、空間の精神性を力說する！しかしデカルトに於いても精神と物體との二元性は說かれるけれども、その物體は精神と同じく實體なのであつて、兩者は實在性に於いて同位的であり、價値的な相違はない。延長的な空間は cogitatio を本性とする精神と同一の實在性をもつ。唯〻その存在の樣相を異にするに止まるのみである——。

もし斯くの如き歷史的事實が認められるとすれば、近世の所謂幾何學的方法には何らかの意味に於ける空間の形而上學が背景になつてゐると言つてよいであらう。寧ろ端的に「幾何學的神祕主義」とも稱せらるべきものがその根底にある。所謂「批判的精神」たるカントにすらこの幾何學的神祕主義の系統が、單に前批判期丈でなく、批判期に於いても、否最後に到るまで存續することが最近の（特に遺稿の）研究者によつて指摘されてゐる。

この段階に於いては、幾何學は數學にして同時に自然學であり、同時に又形而上學である。別の言葉で言へば、こ

とには純粹な數學としての幾何學は未だ存在しない。同樣に數學或は自然學と區別された形而上學も存在してゐない。何れも生成の過程に於いてある。哲學史的公式に從つて通常これは Rationalismus として定式化されるが、しかしそれは一つの哲學の學派或は體系の性格ではなく、哲學の一つの段階の性格である。

Ⅳ

我々はこゝに近世の幾何學の形而上學的系譜を索め得るであらう。

先きに、近世の論理學として無限の論理がニコラウス・クザヌスに於いて樹立されたことが述べられたが、ニコラウス・クザヌスの思想の源泉は周知の如く直接にマイスター・エックハルトにある。エックハルトを中心とする獨逸神祕主義は言ふまでもなく新プラトン哲學を主流とする神祕主義の系統を延くものではあるが、しかしこの獨逸神祕主義が古き神祕主義に對して自己を區別する特色となるものは、その新らしき世界概念である。

それは創造者としての神の概念を徹底せしめることによつて、新プラトン哲學にも猶ほ殘存してゐる希臘的二元論からの脱却に於いて成立する。希臘哲學に於いては、例へばプラトンの『ティマイオス』に於いて、神は Demiurgos として形成者であつて創造者ではない。デミウルゴスは萬能者ではない、彼に對して質料は既に與へられてゐる。神は唯、質料に形相を、渾沌に秩序を與へるものである。單に形成者であるに止まる。アリストテレスの「原動者」としての神も決して創造者ではない。始めて神を無限者と呼んだのは猶太人アレクサンドリアのフィロンであると云はれる。調和的な「美」を超えた「崇高美」が說かれるのも古典希臘ではない。

神を形成者でなく創造者と解することは世界を無からの創造――creatio ex nihilo と解することである。この立場に於いては神とその被造物としての世界の外には何ものもない。神の世界創造は質料から形相への發展でもなく、根源的一者からの流出下降でもなく、正に神の展開――explicatio である。寧ろ後の辯證法に於いて形成さるべき概念で言へば、自覺である。世界創造に於いて "gotheit" が "got" になることであるからである。從つて、創造されたる世界は創造者と固より同一ではないが、しかし兩者の間には價値的な位階的な區別はない。これは確かに新らしき形而上學であり、新らしき世界概念である。この世界の原理はプラトン的な質料と形相との峻別、アリストテレス的な發展、プロティノス的な流出・下降に對して近世的な獨自性を有することを認めねばならない――。世界はこゝに始めて無限となる。

固より世界は直ちに神ではない。ニコラウス・クザヌスも世界は infinitum ではなく indefinitum であると言ふ、しかしこの indefinitum は單なる非存在としての無限でなく、あくまで實在的な infinitum の repraesentatio である。infinitum としての神の explicatio であり、神の現象――apparitio である。現象は決して假象ではない。こゝで神秘主義の形で把握せられた無限がやがて近世の世界概念の原理となる。固より近世の世界概念が專ら直接に獨逸神秘主義から由來すると言ふのではないが、少くともかゝる獨逸神秘主義に於いて典型的に現はれてゐるものは、後に一應近世哲學の完結と見做し得る獨逸觀念論に於いて展開されたものゝ an sich な形態と云ひ得るであらう。この神秘主義に含蓄されてゐる形而上學は、ケプラー、ライプニッツ、カントに到り、やがてヘーゲル、ニーチ

エに繋がる所の一般に世界肯定の形而上學である。これらの人々に於ける神祕主義は古代中世の殘滓としての形而上學、淸算さるべき古き形而上學ではなく、寧ろ正に展開さるべき新らしき形而上學である。新らしきロゴスを自己の裡に含だ新らしき哲學の出發である。古代の形相の論理學に對し、無限の論理學を自己の論理學とする新らしき哲學である。このロゴスの自覺、卽ち新らしき論理學の形成がやがて近世哲學の課題に外ならぬ。近代科學もそれの一つの結果である。

近代科學が神祕主義を源泉とするといふのは奇妙に見えるかもしれない。常識的には寧ろ唯物論がそれの立場である如く考へられてゐるけれども、しかし實際に於いては、近世の唯物論者が積極的に近代科學の建設に貢獻してゐる所は却つて少ないのであつて、その實際の建設者には逆に前述の如き顯著な神祕主義の傾向が認められることは改めて注意されてよいであらう。十八世紀のフランス、ドイツの唯物論者はイギリスの唯物論の亞流であつてこれらの人人が近代科學の積極的な貢獻者でないことは改めて指摘するまでもないであらう。而もこのアルバート・ランゲの所謂 “das klassische Land des Materialismus” たるイギリスに於いては「宗敎的信仰と唯物論との獨特な混合は今日に到るまで保持されてゐる」のである。(Lange. Geschichte des Materialismus I, 10. Aufl. S. 291)。ランゲはその「今日の例」としてファラデーを指摘してゐるが、我々も亦今日、エディングトン（The Nature of the physical World）やジインス（Mysterious Universe）を指摘することが出來るであらう。しかしランゲがこゝに混合と言つてゐるものは實は別なる二者の外的な結合なのではなく、寧ろ未だ分離せざる一者であつて、既に別なるものが結合してゐるのではない。從つてそれは explicatio 以前の complicatio と云ふべきものである。宛も英語では最近まで physics

が Natural philosophy と稱せられてゐたのと同じ事情である。

近代科學の方法となつてゐる「實驗」も、本來は推論的論證的な認識論に對して性格的に異なる新らしき認識論を前提するものであつて、「魔術」と共通の意欲と性格をもつものであつた。近世の實驗的方法の濫觴と稱せられるロージャー・ベーコンの意圖した「實驗」の概念を想起すべきである。やがて魔術は *magia profana* と *magia naturalis* とに區別されて來る。そうしてこの「自然的魔術」が運命的必然を前提する占星術を克服して因果的法則に立脚する實驗的方法となり、よつて以て運命を越える自由を獲得しようとするのである。近代的な「機械」の形成は嘗つて「魔術」が意圖したものゝ實現である。或は、魔術は機械の形成に於いて實現された。機械の本質は自然的存在の模倣ではなく、自然の再形成であり、自然の再創造である。實驗を方法とする認識は言語的ロゴスとは性格を異にする新らしき「理性」を前提してゐる。機械の形成は近代科學の結果である。或は機械の形成に於いて近代科學的認識は完結する――。

斯く無限性を特色とする近世的な世界に於いては、一般に對立者がないこと、卽ち世界は uni-versum であつて、位階的な層の區別がないこと――一樣性がそれの根本的性格である。それ故、近世に於いては形相に對する「質料」は非存在でなく、「物質」である。デカルトに於いて物體と精神とは對立せしめられても兩者は何れも實體であつて、兩者には何ら位階的な區別はない。加之、兩者は「何處かに於いて」結合してゐるのである。それ故スピノザに於いては物體は精神と同じく神そのものゝ樣相となる。結局、この物體と精神の二元性も對立的・否定的なる二者ではな

く、單に平行的・對應的たるに止まる。端的な二世界論と稱せられるカントに於いても、『純粹理性批判』の“Einleitung”の夫の個所に於いて、「感性」と「悟性」とは「恐らく共通な、しかし我々には知られてゐない一つの根Wurzelから生じたもの」(A. S. 15)である――。

近世の所謂二元論にはその根柢に常に自己同一的なるものが前提されてゐる。始め古代中世的な傳統の地盤に於いて二元論的な外觀をとりはしたが、それがあくまで近世的たる所以は兩者の間には位階級な價値的な差違がないことである。それの根柢に前提されてゐる自同的なるものゝ自覺が近世哲學の展開に外ならぬ。ルネサンスは古代の復活ではなくして古代からの復活、古代からの獨立である。

V

近世的な無限の世界に於いて始めて空間も空虛でなく存在となる。存在する物體に對して空虛な空間は存しない。無限な世界には限界がなく、從つてその限界の彼方に豫想される空虛なる空間なるものは認め得ないからである。世界は卽ち空間である。空間は無限にして而も存在である。世界の問題は同時に空間の問題である。我々はこゝに古代の非存在或は存在の限界としての空間に對する近世の空間の根本的性格の相違と由來とを認め得るであらう。かゝる世界の數學が近世の幾何學の目標である。近世の幾何學は無限な空間の數學である。空間の數學たる幾何學が同時に世界の數學である。幾何學的方法が普遍的・世界的方法であり*die* Methodeであり得た所以である。結局、「幾何學的」方法は世界を無限とするこの形而上學を前提してゐる。

我々はかゝる空間の概念を前提して始めて近世の幾何學の方法や性格を理解することが出來る。近世の幾何學が先づ「解析幾何學」として出發する理由或は必然性もこれから理解し得るであらう——。

「解析的」といふ概念は十七、八世紀に於いては一般に圖形を圖形として取り扱ふ方法を「綜合的」と言ふのに對して、圖形を記號的代數的に取り扱ふ方法を「解析的」と呼んだ。數學が一般に記號的代數的となるのは近世の根本的な特色である。古代の數學は一般に數を形態に還元して考へたのに對し、近世の數學は逆に形態を數に還元しようとする。これは言ふまでもなく、古代の數學は存在を限界付けられたものとして理解しようとする有限主義の存在論を基礎とするに對し、近世の數學は存在をすべて無限者の立場から理解しようとする無限主義の存在論に立つによるものと解すべきであらう。近世に於いては有限量も無限小の積分である。デテキントも有限を無限から定義した。(Was sind und Was sollen die Zahlen? § 5)。これは單なる心理學の問題ではなく、世界概念或は存在論の問題である。

古代の世界は有限であつた故に世界には中心があり、上下の層や位階があり得た、しかし近世の無限な世界に於いてはかくの如きものは原理的に不可能である。世界は必然的に一樣であり、等質的である。從つてかゝる無限な空間に於いては一定の形態が特に選ばれた意味をもつことは出來ない。古代では圓が完全な形態として特別な意味をもつたこと、プラトンでは三角形が空間的形態の要素と解されたことは周知の如くである。しかし無限な空間の要素は圓や三角形等々の如き形態的なるものではあり得ない。無限なる空間の要素は無限小である。幾何學的に云へば點であり、數論的に言へば零である。それ故幾何學の要素は點であり、數の單位は一でなく零である。

こゝに近世の幾何學は先づ記號的代數的となり、空間や空間的形象を點の集合に分解し、點の函數として再形成する。近世幾何學の出發としての「解析幾何學」がこれに於いて成立する。

解析幾何學は先づ座標を導入することによつて、無限の空間を制する。座標は無限の延長を前提する。空間の凡ゆる點がこれによつて捕捉される。これによつて空間も凡ゆる形態もこの點の集合に分解せられ得、然る後、點の函數として再形成される。（これは機械の理念と類比的である）。例へば、直線は $y=ax+b$ として、圓は $x^2+y^2=a^2$ として、楕圓は $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ としてetc. etc. こゝでxやyは點である。而もこれらのxやyは變數である。動く點である。こゝに固定的な空間的形態は動く點の Funktion に還元される。空間そのものは無限としてそれ自身の形態をもたず、單に點の集合として規定され、單に三次元の連續體とされる。

かくの如きものが解析幾何學の理念である。

しかしデカルトの解析幾何學――1637の“Géométrie”は未だこの方法を遂行してゐない。所謂「デカルト座標」も實際にはこれには導入されてゐない。デカルドの幾何學では未だ空間は點に分解されず、直線が空間の要素とされてゐる。直線は言ふまでもなく延長的なるものであり、直線は延長性の要素である。結局デカルトの幾何學は未だ點の幾何學ではなく未だ量の幾何學である。空間は延長に於いて解されてゐる。これは數論の立場で言へば、整數的な一が單位となつてゐることである。それ故實際にデカルトに於いては未だ無理數は形成されてゐない。

しかしかやうな延長的なるものによつては無限小としての點は把握され得ない。點或は無限小を把える方法がこゝ

に問題となる。これが微分法の動機である。微分法は今日では純粹な數學の一計算法にすぎないが、しかし微分法が純粹な數學理論として成立したのは漸く十九世紀になつてからである。それまでは微分法は無限小の問題として數學の問題にして同時に形而上學の問題であつた。

處で、無限小を把える論理學はデカルトの延長の論理學を越えねばならぬ。――甚だ小であることは未だ無限小ではない。いかに小なる延長に對しても常により小なる延長が可能である。それ故、延長には最小の延長なるものはあり得ない。空間の要素としての、無限小としての點は延長的なるもの、空間の部分ではあり得ない。部分と全體を根本範疇とする延長の論理學、量の論理學では、無限小或は點は把握され得ない。こゝから延長の論理學は monado-logie の論理學に移らねばならぬ。

空間的なるものの究極的要素は原理上 divisible なアトムでなく、――アトムは延長性をもつ限りアトム（不可分者）ではない――既に分割されたるもの（divisée）、個體としてのモナドでなければならぬ。モナドは空間の部分ではなく、空間に於いて自己の位置――situation をもち、位置を表出するものである。かくの如きものとして點は關係を含み、關係を表出することをそれの本性とする。それ自身一であり乍ら克く全體を表出する。かくしてライプニッツは點を「位置を表出するもの」として規定した。古代の幾何學に於いては――エウクレイデスに於いては、點は單に消極的に「部分をもたざるもの」として定義されたが、今や近世に於いては、積極的に、位置を表出するものとして定義される。點は延長の限界や否定ではなく、逆に延長を表出するものである。點は空間の部分ではなく、却つて逆に、空間を表出するものである。空間そのものは却つて延長的實體でなく無限小的な個體に於いて表出されるも

の、現象となる。

こゝに幾何學は「解析幾何學」から「位置の幾何學」となる。こゝに始めて幾何學は形態の幾何學から點の幾何學となる。解析幾何學は未だ量の幾何學であつたが、位置の幾何學に於いて始めて點の幾何學となる。もし前述の如く、無限な空間の要素は無限小としての點であるとするならば、かゝる無限な空間の幾何學は正に位置の幾何學でなければならぬ。これがライプニッツが創建した analysis situs の理念である。

この解析幾何學から位置解析學への展開はデカルトの延長の哲學からライプニッツのモナドロジーの哲學への展開であること、或は cogito の哲學から expression の哲學への展開であることは既に明かであらう。我々は此處に幾何學の生成に於いて哲學の生成を見出し得るのであつて、この幾何學の生成には同時に哲學の生成が媒介になつてゐると云ひ得るであらう。

VI

空間の要素が點であり、點は空間の部分でなく、空間を表出するものであるとすれば、そしてかゝる點が——ライプニッツの所謂「形而上學的點」として實體的性格をもつとすれば、空間それ自身は豫めそれ自身に於いて存在する實體でなく、點に於いて表出されるものとして、現象となる。この空間概念の變革は同時に精神の概念の變革となる。

デカルトの解析幾何學の立場は形態と數との對應性を定立するものとして、形而上學の立場に於いては精神と物體との對應並行を認める立場である。ライプニッツに於いてこの對應の關係が表出の關係となる時、精神と物體とは表

出するものと表出されるものとの關係となる。物體はそれ自身に於いて存在する實體でなく、精神に對して存在するもの、卽ち現象となる。延長性はこゝに實體の屬性でなく、現象の秩序となる。精神自身も亦單に cogitatio を本性とするもの、單に意識するものでなく、自覺的なるものとなる。單なる perception でなく apperception がそれの特性となる。世界を represent することが同時に自己を express することである如き「精神」となる。

これが更にカントの先驗的演繹論に於ける "ich denke" の先驗的統覺の統一の原理となる時、それは "ein Actus der Spontaneität" (B. 132) として、"ursprüngliche Apperception" (ibid.) として、凡そいかなる對象もそれが對象となる限りこれの統一に從ふべき「根源的統覺」(ibid.) である。カントの "ich denke" はデカルトの "cogito" とは性格的に異なる。先驗的觀念論がここに成立する。そうして此處に空間は決定的に內在化される。空間は「直觀の形式」となる。この「直觀の形式」が——先驗的感性論から先驗的論理學に到つて——「形式的直觀」となる時、空間の內在化、主觀化は更に高まり、深まる。

それではこの先驗的觀念論に於いて幾何學自身はいかなるものとなるか——。

空間が內在化され、空間が real なるものから ideal なるものになることは、空間の學としての幾何學が real-physisch な意味を失ひ、專ら ideal-möglich なるものとなることである。換言すれば、幾何學が Physik から獨立して數學としての數學、純粹數學になることである。これ純粹數學としての幾何學の成立に外ならぬ。カントの先驗的觀念論は純粹數學としての幾何學の成立する地盤である。カントに於いて始めて、數學と自然學と形而上學との原理的區別、從つて夫々の獨立が成立する。

しかしカントに於いては數學と哲學との區別は未だ問題であつた。生成的であり、生成の過程に於いてあつた。カントに於いて空間は未だ直觀と關係せしめられてゐる。直觀はカントに於いてはあくまで所與性に係はるものである。このことは未だ空間が猶ほ何らかの意味に於いて physisch な性格を保持してゐることである。このことは、幾何學が未だPhysikから完全に獨立した數學としての數學となつてゐないことである。――先驗的感性論が同時に幾何學論であるではないか。實際に、カントでは幾何學は未だ猶ほ physisch である丈でなく更に metaphysisch-mystisch な性格をすらもつてゐる。例へば、空間を「無限なる量」として直接に感性に與へられてゐるとする如きことや、又 totum としての空間と Totalität としての空間とを區別して、認識の立場から Totalität としての空間を考へる外に、totum としての形而上學的な絶對的な空間の存在を認めてゐる――。

結局、カントに於いては幾何學は未だ Physik と完全に獨立した數學としての數學になつてはゐない。この純粹な數學としての幾何學は所謂 Metageometrie に於いて成立する。Metageometrie は所謂非ユークリッド幾何學として成立した。非ユークリッド幾何學は周知の如く先づ平行線の公理の否定に於いて成立した。これは直觀よりの獨立、直觀よりの超越である。専ら内的可能性に於いて成立する。ここに始めて積極的に所謂 "Geometrie" を超えた幾何學、Metageometrie が成立する。Metageometrie は數學としての數學たる幾何學に外ならぬ。この Metageometrie はカントの先驗的觀念論の徹底完成した時代、獨逸觀念論の完成の時代に於いて始めて成立した――。

VII

幾何學が純粋數學として完全に Physik 並びに Metaphysik から獨立するのは、空間が直觀から獨立し純粋思惟の所産とされるよりも徹底した觀念論の立場に於いてである。空間を完全に內在化し、主觀化する立場である。處で空間が內在化或は、主觀化されるといふことは、空間がもはや直ちに世界そのものでなく、世界そのものは却つて空間を內に含む "Geist" となることである。空間を內在せしめる場合の主觀は表象する精神でなく、主觀と客觀との對立に於いて自己を實現する如き Geist である。カント並びにカントを出發點とする獨逸觀念論はかゝる Geist の形而上學であること、Vorstellungsidealismus ではなく Geistesidealismus であることは既に言ふを俟たないであらう。この立場に於いて空間の學たる幾何學はPhysikから獨立して、Metageometrieとなり、純粋に內在的な立場に於いて構成され得ることになる。幾何學はア・プリオリな認識であり、*reine* Wissenschaft である。幾何學がPhysikから獨立することは同時に Physik が單に形式的整合的な立場を離れて實證的經驗的科學となることである。

一般に純粋數學は Idealismus の立場に於いて始めて成立する。古代希臘の場合に於いても純粋數學はプラトンの Idea-ismus に於いて始めて成立した。Idealismus は精神の自覺である。哲學の自覺である。これは一つの哲學の立場ではなく、哲學の自覺の段階である。哲學の自覺は哲學が Physik を越えた Meta-physik たることの自覺に外ならぬ。このことは同時に逆に Physik が Physik として形而上學から自己を區別し、獨立することである。結局、數學としての數學の成立は同時に自然學としての自然學、形而上學としての形而上學の成立と互に媒介的であり、同時的である。

かくして哲學の展開に應じて空間の數學たる幾何學はもはや直接に世界の數學ではなく、否、既に、現象の數學ですらなく、終に、純粹思惟の數學になる。卽ち直接的には實在性をもたない單に可能的な空間論となる。こゝに幾何學には *die* Geometrie は存せず、Geometrien が成立する。幾何學は本來の意味での "Geometrie" といふ性格を失ひ、Metageometrie となる。Metageometrie は純粹數學としての幾何學に外ならぬ。こゝに於いて我々の三次元の空間は單に特殊な一つの空間にすぎないことになる。空間の三次元性は單に經驗的にのみ規定され得るものであつてそれ自身としては單に偶然的なるものとなる。空間それ自身は一般に n 次元の多樣體、連續體として理解されることになる。

そうして斯くの如きものとして幾何學が形成されたのがリーマンの幾何學である。リーマンは一八五四年の有名な就職講義 "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" に於いて、n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit の幾何學を形成した。これは空間的形態の幾何學でなく、空間そのものゝ幾何學である。特に近世的な空間――それ自身一定の形態のない無限な空間、卽ち單に n 次元の連續體としての空間――の幾何學がこゝに始めて形成された。こゝでは空間は個々の形態に於いてゞなく、無限小の構造に於いて考察されてゐる。こゝで始めて近世的な空間の數學は「眞に universal な見地から展開された」(ワイル) のである。

通常 Metageometrie の成立の動機は所謂非ユークリッド幾何學の建設にあるとされてゐる。そして非ユークリッド幾何學の成立はガウス、ロバチェフスキー、ボリアイに始まるとされてゐる。しかし實際に於いてはこれらの人々は原理的には未だエウクレイデスの立場を越えてゐず、單に非ユークリッド的幾何學の可能性を示したに止まる。ユ

ークリッド的な幾何學から眞に獨立した、積極的に非ユークリッド的と云はるべき幾何學はリーマンに於いて始めて成立した。しかしこの非ユークリッド幾何學はユークリッド幾何學に相對立し並立するものでなく、ユークリッド幾何學をそれの特殊な場合として含む如きより普遍的な幾何學である。

リーマンは、ロバチェフスキー・ボリアイの如く平行線の公理の問題からは出發しない。平行線を引くこと、一般に直線を引くことが可能であることは確かに一つのPostulatである。凡ゆる方向に任意に直線を引きうることは空間が等質性、等方性であることを前提してゐる。それは單なる前提である。我々の現實の空間は――例へば近時の心理學に於ける所謂Lebensraum――は必しも等質的等方的ではない。例へば「我々が歩く」ことは數學的には「線を引く」ことであるとして、例へば、我々が教室へ這入る時、前から這入るか、後から這入るかは、等しく可能であるに係らず、實際には心理的にはそうでない。加之、人の充ちてゐる教室とそうでない場合とでは更に異るであらう。これらのことは現實の空間が等質的等方的ではなく、從つて必しも凡ゆる方面に直線が延けないことを意味する。換言すれば、空間は歪曲してゐる。等質的等方的な、歪みのないユークリッド幾何學的空間は、存在する空間ではなく、一つの構成せられた可能的な空間であり、形成の所産としての空間である。それ故、平行線の公理から出發することは一定の空間を前提とすることであり、或は、一定の性質を空間に前提することである。それ自身として必然性をもつものでなく、又唯一のものではない。それ故眞に一般的な空間は平行線の公理を前提しない。リーマンの幾何學はユークリッド的空間を特殊な一つの場合とする如き普遍的空間を考へる。普遍的空間は一般に曲率をもつた空間である。この立場から云へば等質的等方的空間は曲率が零である場合の特殊な空間である。更に曲率には正と負の曲率

が可能であり、更に、曲率の一定なる空間と凡ゆる點に於いて曲率の異なる空間が可能である。この凡ゆる點に於いて曲率の變る空間が最も一般的な場合であることは云ふまでもない。かゝる空間はそれの無限小的構造に於いて研究されねばならない。これが微分幾何學の理念であり、やがてリーマン幾何學の理念である。

それ故、リーマンは空間を點の系列から構成し、空間そのものを一般にn次元の多様體に於いて理解する。我々の三次元の空間は、或は空間の三次元性はそこから經驗的に導出される――。

猶ほ此處で空間の Unbegrenztheit は必しも Unendlichkeit ではないこと、unbegrenzt にして endlich であることは可能であることが示される――。世界は有限にして而も無限であり得る。

ヘーゲルが單に Ende-los なる無限を惡無限とし、眞の無限は un-endlich にして、單に際限なきものでなく寧ろ逆に完結統一せるものであること、眞の無限は量の範疇でなく質のそれであることを明にしたのは周知の如くである。

しかしこれらの Metageometrie 或は純粋な幾何學が成立し得るためには、前述の如き哲學的な空間論の展開が豫想されるのであつて、寧ろその發展の成果と言ふべきである。實際にリーマンに於いても未だ哲學的な動機や色彩が顯著である。彼の Mannigfaltigkeit の概念はヘルバルトから由來し、これは更にライプニッツ、カントから來てゐる。實際にこれらの Metageometrie としての非ユークリッド幾何學の確立の時代が獨逸觀念論の完成の時期に當るのは偶然ではない。ロバチェフスキーの論文が出現したのは 1829–30 であり、1831 はヘーゲルの死の年であり、ボリ

アイの論文が出たのは 1832 である。上述のリーマンの就職講義が行はれたのは 1854 であり、それはシェリングの死の年に當る――。

VIII

非ユークリッド幾何學は當初、ユークリッド幾何學が直觀性若しくは實在性を有するに反してこれをもたないものとして、その意味に於いて Metageometrie と稱せられたが、幾何學の公理論的反省から、兩幾何學の間にはかゝる質的相違が存するのではなく、論理的には齊しく可能にしてユークリッド幾何學は單に曲率零なる場合の特殊な幾何學であることが自覺される。これによつて幾何學と超幾何學とには本質的な區別は存せず、何れも直接には何ら實在性に係はるものでなく、從つて幾何學それ自身が一般に Metageometrie となる。幾何學が斯く一般に Metageometrie の性格をもつことはそれが自然學や形而上學から獨立した純粹數學となることとである。これによつて、幾何學ももはやGeometrieでなくなり、自由なる思惟の形成となると同時に「超幾何學」も今や専ら數學プロパーの技術的な發展に委せられ得ることになる。それ故リーマンに未だ存した哲學的色彩はリーマン以後――例へばケーリー、クラインに到ればもはや見出し得なくなる。幾何學が純粹な數學として自由な思惟の形成であるといふ性格は、實際に「十九世紀は幾何學の世紀である」とすら稱せられる如く幾何學が この世紀の始め以來極はめて 多様な方法と多岐な領域に亙つて展開された事實がこれを示す。その結果この五、六十年代に於いてはこれらの幾何學の諸方法や諸領域は互に分離對立する觀を呈して來た。例へば佛蘭西に於けるモンジュ、ポンスレの射影幾何學の系統、獨逸に於ける

プリュッカーの新解析幾何學、シュタイナーの新綜合幾何學、フオン・シュタウトの位置の幾何學、ロバチエフスキー、ボリアイの非ユークリッド幾何學、ガウス、リーマンの面の理論、ハミルトン、グラースマンの多次元空間論、ケーリー、シルヴェスターの代數幾何學、リスティング、モェビウス、リーマンの位置解析等の如きはその種なるものである。これらの中の何れが特に die Geometrie 或は die geometrische Methode と稱せられるべきものではない。ここで改めてこれらのものを特に幾何學たらしめるものは何かの反省が要求される。これに對してすべての幾何學が「群」の――變換群の研究に歸するといふ決定的な自覺が成立する。周知の如く、フエリックス・クラインの所謂「エルランゲン綱要」たる "Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen" 1872 がこれを確立した。これに於いて凡ての種類の幾何學を、而も極はめて端的に包括し、統一する原理が形成された。ここに幾何學とは――クライン自身の言葉で云へば――『多様體とそれに於いて變換群が與へられ、その多様體に屬する形象を、その群の變換によつて變ぜられない如き性質に關して研究すること』、より簡單に云へば、『多様體とそれに於いて變換群が與へられ、その群に關する不變式論を展開すること』である。

單純な例で言へば、所謂初等幾何學は、空間的形態の位置や大きさを如何に變換しても不變である如き空間的構造を研究するものとして相似變換群論である。それに對し、位置、大きさ、及び直角性を變換しても不變である如き空間的構造の研究として擬似變換群論が擬似幾何學である。更に、位置、大きさ、直角性、平行性の變換に於いても不變なる如き空間的構造（即ち、單に點と直線との結合關係のみを問題とするもの）――射影變換群の研究が、射影幾何學である――。斯く凡る群に一つの特殊な幾何學が對應する。

この理論はその後更に種々なる展開をしたが、そして近年に到つてその制限を見出したが、それは今の我々の問題ではない。此處ではこの群の性格と、それが幾何學の本質をなすことの意味が問題である。

群とは、數學的な嚴密な定義を離れて一般的な言葉で云へば、それの要素がすべて單なる factor でなく actor である如き體系である。換言すれば單なる要素の集合ではなく、各の要素はすべて act に於いて成立し、act によつてそれの要素となる、從つて要素はすべて actor にして同時に acted である如き體系である。群の要素はすべて act に於いてそれの要素となるのである故に、要素はすべて act によつて相結合し、よつて以て群を形成する。かくして群自身は actor を要素とし、act に於いて成立し、act に於いて自己を保持する如き體系である。變換に於いて不變なるもの、變換を通じて自己同一性を保持する體系である。哲學者の所謂變じて變ぜざる體系である。單に自己同一的なるものでなく、變換に於いて或は變換を通じて自己同一的なるものである。

今、幾何學がかかる變換群論として特色付けられる時、かかる幾何學に豫想される空間はいかなる性格をもつであらうか。群論としての幾何學は固より「延長の幾何學」でもなく、「位置の幾何學」でもなく、單に「多樣體の幾何學」でもなく、正に「運動の幾何學」である。寧ろそれはもはや Geometrie ではなく Algebra である。空間の數學でなく、操作の數學である。それに於いて理解される空間はもはや延長性を本性とする物體的空間でもなく、表出性に於いて理解される現象的空間でもなく、正に Geist の空間である。單に客觀としてある空間、或は單に主觀的に存する空間でもなく、基體的にして主體的、主體的卽基體的なる如き性格をもつ空間である。かかる空間の數學はもはや單なる空間の數學ではなく、空間・時間の數學である。もはや「幾何學」ではなく操作に於いて成立する「代數學」

である。群論は最も純粋な形に於ける代數的操作の理論である。群論は Geist の數學である。

しかし幾何學がかくの如き性格を自覺することによつて始めて近世の幾何學の動機であり源泉であつた幾何學的神秘主義の完全な數學化、或は空間の形而上學の數學的形成がそれの本來の面目に於いて實現せられたと言ひ得るであらう。これは正しく Geistesidealismus の數學である。

勿論このことは群論そのものが直接にこのやうな意味をもつてゐると云ふのではない。寧ろこのやうな直接的な意味から獨立する所に始めて純粋數學として成立する。今日の幾何學はあくまで形而上學や自然學から獨立な、それ自身に於いて存立してゐる純粋に抽象的形式的な數學である。しかし形而上學と數學とが互に獨立であることは無關係であることではない。兩者の關係は宛も同一の溪を距てて互に聳えてゐる二つの峰である。互に相離れ、相獨立することによつて愈〻互に自己の姿を顯はにし、自己を高めてゆくが、しかしあくまでその根底に於ては常に同一の共通の地盤をもち相連結してゐる。兩者は直接的に類似した Abbild ではなく、象徵的に —— symbolisch に相對應してゐるのである。

Bjerknes が書いたアーベルの傳記に——アーベルは周知の如く群論の創始者の一人である——アーベルがベルリンで假泊してゐた同じ屋根の下にヘーゲルが住んでゐたといふエピソードを記してゐる。固より兩者は互に相識ることなくして別れたであらうが、しかし個人の意識に於いて無關係であつたといふことは、何ら歷史に於いて無關係であるといふことにはならない。我々は哲學と數學との間に直接の意識的な關聯でなく、謂はば精神史的な關聯を認めようとするのである。

もし前述の如き精神史的な關係が數學と哲學との間に認め得るならば、その歸結として數學は本來、世界の數學であり、文字通り Mathesis Universalis である。我々が數學の形而上學的系譜を索めることは數學の世界性、universal な性格を索めることに外ならぬ。それは單に形式的な普遍性ではなく、世界の形式的形成である。かくの如き性格をもつた數學は單なる技術知或は單なる遊びとしての數學と嚴に區別さるべきであつて、常に哲學と聯關して學問として追究せられた西洋の數學の傳統と獨自性を形成するものである。それは嘗つて哲人の或は哲人王の豫備學とすら解された。

數學は數による世界の構想である。これは世界を抽象することに外ならぬ。數學的精神は「抽象の精神」である。しかし抽象する精神は直ちに抽象的な精神ではない。抽象は積極的に抽象することによつて始めて形成される。單に抽象的なるものは單に空虚なるものと同じく意味がない。數學的抽象は積極的な形成であり、形成の結果である。獲得せられたる抽象である。抽象が豫め抽象として存在するものでないと同樣に豫め具體的なるものが存在するわけではない。抽象は具體化への抽象化である。抽象化を媒介にしない具體的なるものは實は具體的なるものではなくして單に素朴であるにすぎない。數學のもつてゐる高度の抽象性は單なる日常的技術的精神からは出て來ない。近代の數學のもつてゐる如き高度の抽象を形成した精神の高さと深さとを思ふべきである。數學の抽象性は高貴なる抽象性である。數學的に何處まで抽象し得るかは何處まで我々の精神が棲むに堪える高所に登り得るかである。

一旦形成された抽象はそれ自身に於いては固より抽象的であり、それを行ることは容易である。しかしそれは固よ

り抽象が容易だといふことではない。三段論法の形式はそれの形成に少くともソクラテス、プラトン、アリストテレスの三代の思索を費さねばならなかつた。悟道や救濟の路は宗教的天才を俟つて始めて打開され得た。しかし一度拓かれるや無數の平俗人がその路を歩くことが出來る。これらの形成せられた形式はそれ自身としては確かに平明にして形式的である。しかしその故にこの形成を容易とし、單に形式的抽象的とする者はないであらう。數學を抽象性、形式性の故に形而上學や哲學と無關係の如く解するのはこれと略〻同様な誤謬である。固より兩者には直接の相似性はない。哲學は世界の具體的な把握を意圖し、數學はそれの抽象的な形成を意圖するからである。しかしその「具體的」は常に「抽象的」を媒介にし、抽象化は常に具象化を媒介にして始めて遂行される。我々はそれぞれの結果に於いてでなくそれの根源に於いて、又それの形成の過程に於いて數學の形而上學的系譜或は形而上學の數學的媒介を索めねばならぬ。數學は世界の模像ではなく、敢て言ふならば、世界の象徴である。昔の哲學者が「神々は幾何學する」と云ひ、又“Mathesis Divina”と呼んだ所以である。（一五・一一・二〇）

この小篇は始め『空間の數學と自然學と形而上學』として企圖されたものである。從つて小篇に後續する「自然學」の部分を付加することによつて完結するのであるが、こゝでは除去した。