カムケの構想

町澤直治

序

新たな科學觀に於ける「眞理」の地位についてデュルクハイムは次の樣に言つてゐる。「眞理は合理主義時代の科學にとつて科學の意味を充足するものとして認められてゐた樣な絕對的な價値としての役割を今日は最早演じてゐない。けれども科學的認識の形式的な存立條件としての眞理は今日もなほ奉仕價値として搖ぎなき意義を保持してゐる。この樣な意味に於ける眞理は今日もなほ從來と同じく飽くまで形式的な價値である。而して形式的な價値が絕對的な價値となり得た點に過去の科學觀の特徵がある。すべての人間の行爲、從つてまた科學的行爲にとつて義務と考へられる最高の內容的價値は自己の屬する民族國家である」　この問題に關してこれ以上論議することは無用である。最高の內容的價値は學問論の對象ではなくて既に政策の對象である。學制改革、新教授要目の設定、研究機關の統制、學者の研究題目變更、科學敎育に於ける空想の役割の重視、其他枚擧するに暇がない。これに反して科學的認識の形式的な存立條件としての眞理についてはなほ若干の問題が殘されてゐるかのやうに思はれる。言葉を變へて言へばこれは抽象的理論體系の問題であると言へる。自由豁達な我國民が異邦科學の長所を普く攝取して渾然たる日本科學を築き上げつゝあるときにもこの抽象的理論體系なる概念の下に包

攝される極めて消化し悪い特に異邦の香りの高い或るものの濟むのを感ぜざるを得ないのである。私は今この或るものの今後の日本科學建設に對する功罪を豫め決定し得る明智を有しない。そこで私の企圖したことは西洋科學の中で體系化理論化が特に著しく且つ我々の思考形式と同化し悪いと思はれるものを取上げ何故にその樣な體系化とか理論化とかが必要であるかを闡明することであつた。以下の敍述に就いては豫め多くを語ることを止め、研究自體に全てを物語らせることにする。

　テュービンゲン大學教授カムケ氏の「實函數微分方程式論」、千九百三十年ライプチヒ學術出版社M・B・Hから「數學及びその應用」叢書第七卷として刊行されたもの、が研究の對象である。

　カムケが從來存在する微分方程式論と全く體裁を異にし且つ一見極めて煩瑣な實函數微分方程式論を書いた原因は學生當時氏が微分方程式の講議を聞いてそれを理解するのに非常に苦心をしたところにある。幾多の努力にも拘らず理解力の不足からいつも微分方程式の講議には追從して行くことが出來なかつたことを述懐し、其後講師となつてから皮肉にも云はゞそれに對する罰として微分方程式自身に關する講議を受持つ運命に立到つたと言ふ。これは我國にもあり勝ちなことであると思ふ。幾多の俊敏な頭腦が空しく學への志を失つて行く原因がその學の傳達の形式の不備に存する場合は尠くないであらう。更にカムケの言を聞かう。學生當時現存する幾多の文獻によつて除去することが出來なかつたところの理解力の不足は一體何處から來てゐるかと言へばそれは次の諸點に由來すると思はれる。即ち微分方程式論に於ては解析學の他の領域に見られるやうな概念構成及び證明の嚴密さが缺けてゐるために方法の適用範圍とか曖昧に形成された主張の正當性とかが確立されてゐないのである。その際氏は「學生としての私」と言つて特に私と言ふ點に重點を置いて主張の一般への擴張を遠慮してゐるかのやうに見受けられるがこのことは一般にも認められ得る事柄であらう。學生としてこの問題を解決することができなかつたために學生時代には微分方程式の勉强を一時放棄したと言ふことである。今日學生當時の氏と同樣の困難に悩む人達を救ふことが本書に於ける氏の念願に外ならない。微分方程式の諸理論の或るものにはその本性からして全體の統一を弛緩させる樣な雰圍氣がつ

き纏つてゐるために微分方程式の理論の到るところ完全に否の打ちどころのない敍述を定成するといふことは必ずしも期待し得ないが、幾分でもこの點について貢獻したいといふのが此の目標である。讀後の印象は極めて野心的である。體系を目指すと言へばさうも言へるであらうが前にも述べたやうにその本來の意圖は極めて實踐的なところにあるのであつて、完全に否の打ちどころのない敍述といふのも結局は先人が後人を指導するのに最も好適な形式に外ならないのであつて、所謂抽象的眞理、抽象的體系の建設自體が目標であるのではない。理解力の不足を除去するために何故に完全に否の打ちどころのない理論體系を構成しなければならないかと言ふ疑問への解答こそは本論文の目標とする課題の一つに外ならない。さて敎育といふ實際問題と絡んで實踐的意圖を有する氏の方法が、從來の微分方程式論と全く異る內容を有するであらうことは容易に豫測される。例へば若干の初等微分方程式の從來よりも遙に詳細な研究、解析函數に對するリンデレフの實領域中に於ける存在證明、詳細な一意性定理、非常に一般的な形式の依存性定理、或る積分のパラメターに就いての微分可能性に對する證明の完全なる遂行、函數行列式に關する主定理に就いての Knopp と R. Schmidt との證明、偏微分方程式に於ける各種存在定理の樣々の嚴密化等は他書には見られない獨自の取扱法を示してゐる。學者によつてはカムケのやり方は徒に神經が細かく積極的なものを缺き印象に殘る方法上の特性としては纔に存在定理に於て用ひられた gleichgradig stetig の概念位のものと言ふ人もあるが、必ずしもさう言ひ切れないものがある。敎育的に構成された理論（これはやさしいといふ意味ではない）がその學問自體に於て何等の積極的な役割をも演じ得ないと斷定することは速斷たるを免れない。特に從來オペレーショナルにのみ行はれて來た各種操作の幾何學的直觀を脊後に置いた首尾一貫せる理論こそ却つて總てが抽象化にのみ走り易いこの學問への一つの警鐘ともなり得るのではないか。「量子力學は實に良く敎育的にできてゐる」といふ東大の小谷敎授の言葉を阪大の伏見敎授が意味深い言葉として引用されてゐるが、この言葉はこの邊の事情を物語るに想應はしいものであると思ふ。プランクが有名な理論物理學五卷を書いた原因も矢張當時の獨逸の學生が物理學の本當の意味を把握し得ず徒に數理物理學にの

み走る傾きのあるのを變へてのことであつた。例へば電磁氣學に於てマックスウェルの方程式を無雑作にエネルギー保存則から導出して、全ての電磁氣的現象を完全に演繹的に取扱つた方法の如きは、單に教育的である以上にプランクの學自身の影像であると言へよう。

さて本論の大略を述べる。全體を次の十二部に分け、その各々に就き順次に批判と檢討とを續ける。

一、若干の特殊な一階陽微分方程式の解法に就いて。
微分方程式 $y'=f(x)g(y)$ の解法に就いて。
二、一般の一階陽微分方程式 $y'=f(x,y)$。
三、一階陰微分方程式。
四、n 個の函數に對する n 個の一階微分方程式の一般系。
五、線型分微方程式系。
六、特殊な微分方程式系に於ける積分曲線の經過(Verlauf)に就いて。
七、n 階微分方程式に關する一般論。
八、n 階線型微分方程式。
九、線型偏微分方程式 $f(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+g(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$。
十、一般的な線型偏微分方程式。
十一、二つの獨立變數を有する一般的な偏微分方程式。
十二、二つの獨立變數を有する二階偏微分方程式中の若干の特別な種類のものに就いて。

批判の要點は
第一、理論構成の目的を明白にすること。
第二、理論の論理的構造を詳細に分析すること。
第三、對象的認識の意義を明にすること。
この場合、私は出來るだけ淺く考へるようにした。對象とは何ぞと言ふ時にそれは境界條件、初期條件等が與へられてゐることであると言ふ程度以上には深入りをしない。
第四、オペレーション(操作)を可能ならしめる諸條件の檢討。
などである。

第一部

若干の特殊な一階陽微分方程式の解法に就いて。

此處では $y'=f(x)g(y)$ の型の微分方程式を取扱ふのである。

微分方程式の型は極めて簡單なもので所謂變數分離形としたオペレーショナルには卽座に演算され得るもので

ある。この特殊な微分方程式についての解法の研究は方程式は特殊とは云へ解法自體は極めて意味の深いもので後の研究の基礎となるものであるから相當念入りに檢討する必要がある。

先づ $y'=f(x)g(y)$ に於て $g(y)=1$ なる場合即ち $y'=f(x)$ を考へる。但し $f(x)$ は $a<x<b$ に於て連續であるとする。豫め方法上の特性を列擧するならば

第一に積分曲線は必ず定まつた一點を通る樣に決定されなければならない。即ち解は先づ定積分の形で與へられるのである。最も簡單なものからして既に初期條件が與へられたものとして取扱はれる。これは解に極めて明瞭な對象的性格を與へようとするものであるとともに後に述べる存在定理への準備工作とも見られる。即ちあり得べき解は現實的な或る一點を通る積分曲線であり、これこそ我々に最も直接的なもので先づ解をかゝるものとして定積分として與へるのである。つまり目的は一點を通る積分曲線を求めることで明確なる對象的認識たらんとするものである。

第二にかゝる一定點を通る積分曲線は唯一つであるか何うかを吟味しなければならない。これは極めて初等的な微分方程式に於ても解の唯一性の問題の在り方を明示して將來の研究への手引とすると同時に又論理的嚴密性への要望に答へんとするものである。我々はこれが最も簡單な微分方程式に於てさへ遂行されてゐるのを見る。

例へば $y'=f(x)$ $(a<x<b)$ の一點 ξ, η を通る解は $y=\int_{\xi}^{x} f(x)\,dx+\eta$ で與へられるが、これが唯一の解であることを初等的に識るには何うすればよいであらうか。これに對しては一應解析的な立場と幾何學的立場との二つの立場から調べることができる。解析的には次の樣にする。$y'=f(x)$ の總ての解は積分學から判るやうに $y=\int_{\xi}^{x} f(x)\,dx+c$ で與へられる。ところがこれが點 ξ, η を通る積分曲線であるためには當然 $\eta=\int_{\xi}^{\xi} f(x)\,dx+c=c$ でなければならない。c の一つの値によつて總ての解の中の一つが定まる以上 $y=\int_{\xi}^{x} f(x)\,dx+\eta$ はあり得べき唯一の解の表現となる。次に幾何學的立場からは何う取扱へばよいであらうか。一定點を通る積分曲線が唯一つであるといふことを

幾何學的に表現すれば「この定點を通る一切の積分曲線がその中に含まれる樣なこの定點を通る或る一つの積分曲線Kが存在する時にはこの定點を通る唯一の積分曲線が存在する」といふのである。曲線Kが同じ點を通る他の全ての曲線を含むと立論し得る以上はKはこの點を通る積分曲線の中で一番長いものでなければならない。この樣にKが最長のものであると斷定し得て初めて解の唯一性が立證されるのである。このことを前掲の例に適用するならば何うなるであらうか。$y=\int_{\xi}^{x} f(x)\,dx+\eta$ に於て積分端xの區間が與へられた微分方程式 $y'=f(x)$ の解として最大なものを選ばなければならない筈である。少くとも最大のものを選び得ることが明瞭にされなければならない。さうでないと何處から又この積分曲線が二つ又は三つ或はそれよりも多くに分岐するか判らないからである。即ち $y=\int_{\xi}^{x} f(x)\,dx+\eta$ が點 (ξ,η) を通る積分曲線の唯一の表現であるといふ解析的考察と積分端xの最大區間を定め得るといふ幾何學的考察とが兩立して、解の唯一性の立論が成立するのである。式では前記の表現が唯一であるが前に言つた樣なK中に全ての他の曲線が含まれるといふことを一應は明確にしなければならない。但しカムケ自身はこのことまで明にしなければならない義務を感じなかつたのであらう。敍述はある程度まで簡素でなければならない。その簡素な敍述から讀者が當然考へなければならないことが可能的なものとしてその中に含まれてゐるならば、それ以上語ることは不必要であつて、それは却つて全體の美的調和を妨げるものであると主張してゐるかの如くである。

さてxの最大區間を決定することができなければならないといふ幾何學的考察と結び付いて次の問題を提出する。

即ち第三に、微分方程式は變數の或る區間に於て與へられるのであるが、その變數の區間に對して積分曲線の變數の區間は如何に決定されるであらうか、と言ふ問題が起る。先づ $y'=f(x)$ の區間は $a<x<b$ で與へられてゐるが、これは開區間 (a,b) といふことになつてゐる。これは $f(x)$ が連續な區間であるが、a點、b點に於て $f(x)$ が連續であるとすれば、特にa點、b點で區間を限定する必要はなくなるし、又a點、b點で $f(x)$ が不連續であれば當然この區間は開區間でなければなら

ないのである。さてこの開區間に對し積分曲線の存在すべき變數の區間は何うなるであらうか。$y=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ が全區間 (a, b) に於て存在するといふ事實を幾何學的に言表はせば、積分曲線は帶 $a<x<b$, $-\infty<y<+\infty$ の內部で終るやうなことはなく兩周線 $x=a$, $x=b$ に幾らでも近づき得るといふことになる。このことを簡單に次のやうに表現する「積分曲線は帶 $a<x<b$, $-\infty<y<+\infty$ の內部に於て左の周緣から右の周緣に走る」 即ちこの例では x の最大區間を決定するといふ問題は事實としてあつけなく解決されてしまつた。積分曲線の最長のものは兩端を有しない極値的性格を有するものとして一應は定められたわけである。例題が餘りにも簡單であるがためにそれを通して唯一性の問題など取扱はうとすると却つて甚しく非論理的になり易い。我々はあくまでも構想が如何なるものであるかを洞察しつゝ一見平凡な敍述の中に含まれてゐるものを見逃してはならない。

以上により三つの事柄の說明を終へるが、今改めてそれらを纏めて見るならば、第一では解が一點を通るものとして求められ、第二では一點を通る解が一つであるか否かが檢討され、第三では與へられた區間に於ける積分曲線の狀態が調べられたのである。つまりカムケの方法は對象的認識といふことを極めて重視してゐる樣に思はれる。別の言葉で言へば背後の幾何學的直觀との一致を狙つてゐるとも言へよう。しかし例が餘り簡單であつたがためにその意圖を十分に示すことができない恨みもある。

次に $y'=f(x)g(y)$ に於て $f(x)=1$ とした場合、即ち $y'=g(y)$ を考へよう。但し $g(y)$ は $c<y<d$ に於て連續であるとする。この場合にも次の三つの事柄を注意しなければならない。その第一は變數を y として $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{g(y)}$ の形に與へられた微分方程式を變形して積分を行ふことに對する條件の吟味である。即ち普通はオペレーショナルに遂行して行く操作の條件を今考へるのである。何故にかかることをやるかと言ふ疑問に對しては二つの解答を以て臨むことができる。その一つはオペレーションが對象的認識の埒外にまで足を踏出すことに對する警告であり、他は $g(y)=0$ なる場合が後の一般論に於て極めて重大な役割を演ずることに對する豫備的

研究といふことである。例を擧げる迄もなく $g(y)$ が零になつては困るであらうことは容易に豫測される。從つて $g(y)$ が符號を變へないことが y を變數としうることの條件となるのではないかと推量される。これを今附加的前提といふことにしよう。

附加的前提、全區間 (c, d) に於て $g(y) > 0$ 又は $g(y) < 0$ の何れかである。

この附加的前提により $y' = g(y)$ の解法は $y' = f(x)$ の解法に歸着するのである。今 $y' = g(y)$ の解が存在するものと假定し、それを $y = \varphi(x)$ とすれば、$\varphi'(x) = g(\varphi(x))$ は附加的前提により常に正か常に負かの何れかであるから $y = \varphi(x)$ は x に就いて一意的に解かれうるのである。斯樣にして $y = \varphi(x)$ を x に就いて一意的に解いたものを $x = \psi(y)$ とすれば次式

$$\psi'(y) = \frac{1}{\varphi'(x)} = \frac{1}{g(y)}$$

が成立し $y = \varphi(x)$ に對して一意的に決定された逆函數 $x = \psi(y)$ は次の微分方程式

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{g(y)}$$

を滿足する。これは既に述べた微分方程式 $y' = f(x)$ と同型である。

圖　1

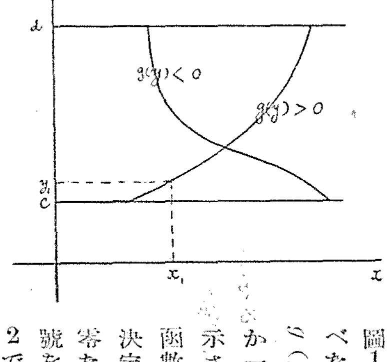


圖　2

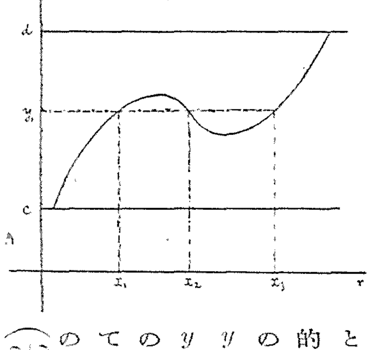


圖1と圖2とは以上述べたことの説明である。$g(y)$ が正か負か何れか一方の場合は圖1で示され逆函數はもとの函數に對して一意的に決定される。$g(y)$ が零なる値を通過して符號を變へうる場合は圖2で示され逆函數はもとの函數に對して一意的に決定されない。x の一値に對しては明に y の一値が對應するが、y の一値には x の三つの値が對應する。從つて $\frac{dy}{dx}$ が $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}$ の時に、逆函數の方で $\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_1}$ の方が取ら

れる様なことがあると明に $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ が成立しなくなるのである。この例では $g(y)$ が零を通過して符號を變へる場合を參考に擧げたのであるが、$g(y)$ が無限大を通過して符號を變へる場合もある。例へば

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}$$

なる微分方程式を考へて見よう。今 $y<o$ なる附加的前提を設けるならば原點を通る積分曲線として $y=\sqrt{2x}$ が得られる。即ち

圖 3 $y>o$

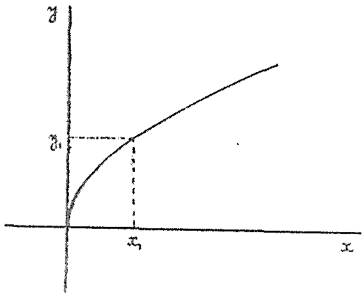
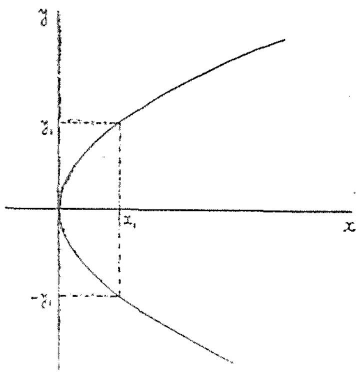


圖 4



$y>o$ の時 $\left\{\begin{array}{l} y=\sqrt{2x} \quad (y=\varphi(x)) \\ x=\frac{y^2}{2} \quad (x=\psi(y)) \end{array}\right.$ 明に $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

y 正負何れでもありうる場合 $\left\{\begin{array}{l} y=\pm\sqrt{2x} \quad (y=\varphi(x)), \quad \frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{y} \\ x=\frac{y^2}{2} \quad (x=\psi(y)), \quad \frac{dx}{dy}=y \end{array}\right.$

由つて $\frac{dy}{dx}\neq\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

これを圖で示すと次の様になる。

即ち $1/y$ が無限大を通過して正負何れの値をも取り得る場合には $\frac{dx}{dy}$ は二つあるが $\frac{dy}{dx}$ は一つしかないのであつて、明に $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ は成立しないのである。

さて以上により $g(y)$ が符號を變へないものとして $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{g(y)}$ が得られるならば問題は既述の $y'=f(x)$ の場合と全く同一となり、定點を通る唯一の積分曲線が存在することも自ら明になる。結局定點 ξ,η を通る積分曲線として次式

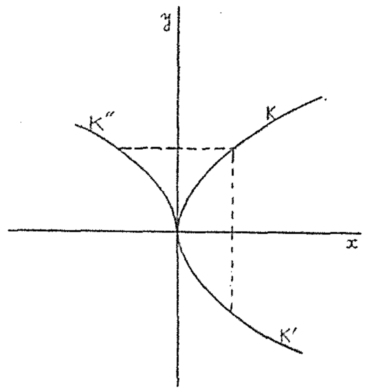
$$x = \xi + \int_{\eta}^{y} \frac{dy}{g(y)} \qquad (c < y < d)$$

が得られる。これをyに就いて解けば求める積分曲線が得られる。即ち積分曲線はyに就いてはインプリシットな形式で與へられたのである。ところが點ξ, ηを通る積分曲線は今の場合yに關してはその限界が與へられてゐるだけでxに就いては豫め何等の制限が與へられてゐなかつた。しかし$x = \xi + \int_{\eta}^{y} \frac{dy}{g(y)}$を$y$に就いて解いた時にはその$y$が存在すべき$x$の限界が與へられてゐなければならない。これは形式的整備とも云ふ可きものである。yの限界が$c < y < d$で與へられてゐるからこの整備は容易である。此處に$y' = g(y)$の解法についての第二の問題として形式的整備といふことに着目する理由がある。これは別の觀點からすれば逆の問題であるとも云へる。解$y = \varphi(x)$を假定すれば、$g(y)$の符號不變の故に$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{g(y)}$ $(c < y < d)$を得たのであるが、逆に$x = \xi + \int_{\eta}^{y} \frac{dy}{g(y)}$ $(c < y < d)$をyに就いて解いたものが解になることを立論し得るためにはこの式がyに就いて一意的に解かれる可きためのxの範圍が知られなければならない。ところが$x' = \frac{1}{g(y)}$は$c < y < d$に於て零となることがないから

$$\alpha = \xi + \underline{\mathrm{fin}}_{c<y<d} \int_{\eta}^{y} \frac{dy}{g(y)}, \quad \beta = \xi + \overline{\mathrm{fin}}_{c<y<d} \int_{\eta}^{y} \frac{dy}{g(y)}$$

と置けば$x = \xi + \int_{\eta}^{y} \frac{dy}{g(y)}$は$\alpha < x < \beta$に於て$y$に就いて一意的に解かれる。そしてそれが$y' = g(y)$, $c < y < d$を滿足する解となる。圖5に於てK'は$y = \varphi(x)$がxについて一意的に解かれうるといふことにより否定され、K''は$x = \xi + \int_{\eta}^{y} \frac{dy}{g(y)}$が$y$について一意的に解かれうるといふことによつて否定される。論理

圖 5

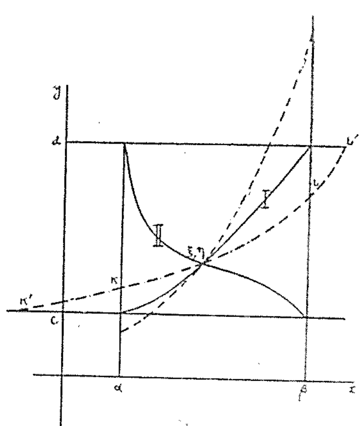


は對象的認識の立場から見るとあり得べからざる相手を豫想してそれを否定して行く場合があるのである。

さて以上の様にして α と β とを定めるならば $y'=g(y)$ の解に就いて次の立論を得る。「水平帶 $-\infty<x<+\infty$, $c<y<d$ の各點 ξ,η を過つて方程式 $y'=g(y)$ の丁度一つの解曲線が通る」。

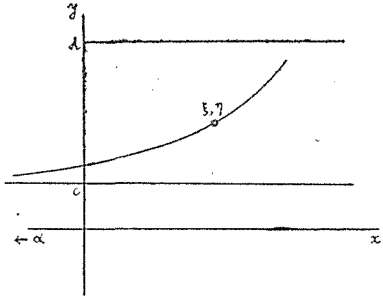
第三に考へることは點 ξ,η を通る解曲線の存在領域を明にするといふことである。さて y' が常に正であるか又は常に負であるかであることにより $\varphi(x)$ が $\alpha<x<\beta$ に於て單調であることは直に判るのであるが、點 ξ,η を通る積分曲線が今は問題であるといふ意味に於て $g(y)$ が $c<y<d$ で符號を變へないから $x=\xi+\int_\eta^y \frac{dy}{g(y)}$ はこの y の區間で單調であり從つてそれを y について解いた $\varphi(x)$ も亦 $\alpha<x<\beta$ に於て單調であると言つた方が論理的に嚴密である。さて $\varphi(x)$ は $\alpha<x<\beta$ で單調であるから、今 $\alpha>-\infty$ とすれば x が α に向ふ時に $\varphi(x)$ は c 又は d に向ふ。圖6に於てⅠの時には x が α に向ふ際 $\varphi(x)$ は c に向ひ、Ⅱの時には x が α に向ふ際 $\varphi(x)$ は d に向ふ。同樣なことが x が β に向ふ場合にも成立する。又圖6に於て點線で示される樣な積分曲線はあり得ない。何とならば今 $g(\eta)>0$ として $\beta=\xi+\lim_{c<y<d}\int_\eta^y \frac{dy}{g(y)}$ を考へると $\int_\eta^d \frac{dy}{g(y)}<\int_\eta^c \frac{dy}{g(y)}$ となるから β はもつと右に移動しなければならないことになるからである。以上に

圖 6

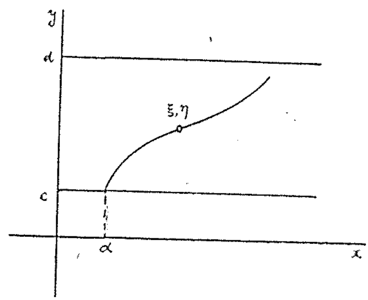


より $y'=g(y)$ の解曲線はそれを左方に追跡するならば、幾らでも遠く左方へ行くか、水平な帶の周緣に任意に近付くか、任意大の縦座標を取るか、である。同樣なことが曲線を右方に追跡する場合にも言へる。任意大の縦座

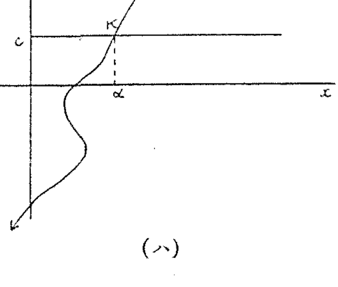
圖 7



(イ)



(ロ)



(ハ)

標を取るといふことは一寸變であるが、これは c 線或は d 線を越へることもあり得ることを言つたものである。圖7では解曲線を左方に追跡する場合について以上の三つの場合を現はす。イ、ロに於ては解曲線は周緣 $y=c$ に幾らでも近づくが、ハに於ては解曲線は $y=c$ を越へてしまふ。與へられた微分方程式 $y'=g(y)$ で $g(y)$ は $c<y<d$ で連續なものとしたが、それ以外の所では不連續とも連續とも何等のことはりがないのでハの樣な場合もあり得るわけである。ハの場合には解曲線と周緣とが交はるところに特色がある。イ、ロ、ハの場合を綜合して「解曲線は帶 $-\infty<x<+\infty$, $c<y<d$ に於て周緣から周緣へと走る」と言ふ。

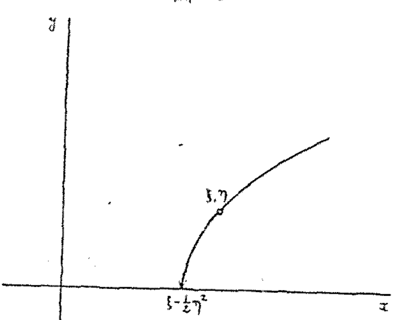
以上に於て $y'=g(y)$, $c<y<d$ の解法を三つの立場から論じたのであるが、第一には變數を y に取り得る場合を調べて $y'=g(y)$ の解法は $y'=f(x)$ の解法に歸することを述べ、第二には斯樣にしてインプリシットな形式で得られる解が x に對して一意的に定まる爲の x の範圍を求め、第三には積分曲線の存在區域を明瞭にしたのである。

不完全ではあるが以上により $y'=g(y)$ の解法の研

究を終るのであるが、次にこの解法を遵奉して實例 $y'=\frac{1}{y}$ $(0<y<+\infty)$ を解いて見よう。$g(y)=\frac{1}{y}$ は明に $0<y<+\infty$ で常に正であつて零となることはないからあり得べき積分曲線 $y=\varphi(x)$ に於て $\varphi'(x)$ は常に正となり、從つて $y=\varphi(x)$ は y のこの區間で x に就き一意的に解かれる。これを $x=\psi(y)$ とすれば $\psi(y)$ は $0<y<+\infty$ で一意的に決定される。即ち $\psi'(y)=\frac{1}{\varphi'(x)}$ が成立つ。又 $x'=\psi'(y)$, $\frac{1}{\varphi'(x)}=\frac{1}{y}$ であるから $x'=\frac{1}{y'}$ となり結局 $\frac{dx}{dy}=y$ を得る。故に求める解はインプリシットな形式では $y>0$ に對し $x=\xi+\int_{\eta}^{y} y\,dy=\xi+\frac{1}{2}(y^2-\eta^2)$ で與へられる。これを y に就いて解けば $x>\xi-\frac{1}{2}\eta^2$ に對して $y=\sqrt{\eta^2+2(x-\xi)}$ が得られる。$0<y<+\infty$ に對して一意的な解が存在すべき x の區間は $\alpha=\xi+\lim_{0<y}\frac{1}{2}(y^2-\eta^2)$ 及び $\beta=\xi+\lim_{0<y}\frac{1}{2}(y^2-\eta^2)$ によつて定まる。即ち α は上式で y が零なる時の値 $\xi-\frac{1}{2}\eta^2$ であり、β は上式で y が $+\infty$ の時の値 $+\infty$ である（圖8）。

以上により最も簡單な二つの微分方程式 $y'=f(x)$, $y'=g(y)$ に就き單なるオペレーショナルな解法ではなく論理的な且つ對象を考慮に入れた解法を一應檢討した。論理的とは例へば微分方程式が與へられた時の諸條件に對し、解の從ふべき條件を明示してゐること其他であり、對象的とは一點 ξ,η を通る積分曲線をそのまゝ求めて行くこと其他である。

圖 8



次に所謂變數分離型微分方程式 $y'=f(x)g(y)$ が如何に取扱はれるかを見よう。この微分方程式の解法に關する「定理一」を此處に轉載するならば「$f(x)$ は $a<x<b$ に對し $g(y)$ は $c<y<d$ に對し連續であり且つ常に $g(y)\neq 0$ とする。さうすると次の矩形 $\mathfrak{R}$: $a<x<b$, $c<y<d$ の各點 ξ,η を過つて微分方程式

$y'=f(x)\,g(y)$ の一つの積分曲線が通る。この積分曲線を得るには次の様にすればよい。先づ次の不等式

$$\varliminf_{c<y<d}\int_{\eta}^{y}\frac{dy}{g(y)}<\int_{\xi}^{x}f(x)\,dx<\varlimsup_{c<y<d}\int_{\eta}^{y}\frac{dy}{g(y)}$$

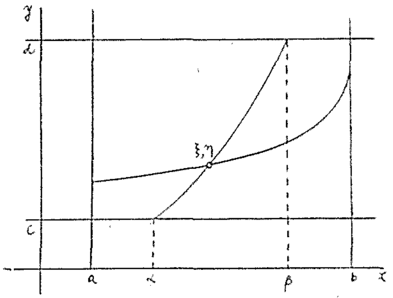
が $\alpha<x<\beta$ に對して成立する様な區間 (a, b) の最大部分區間 $\alpha<x<\beta$ を決定する。さうすると方程式

$$\int_{\eta}^{y}\frac{dy}{g(y)}=\int_{\xi}^{x}f(x)\,dx$$

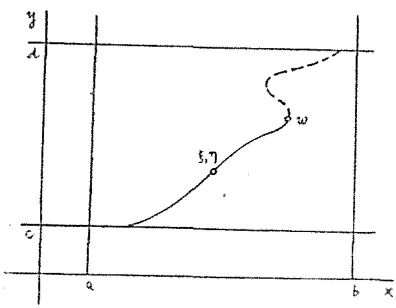
を y に就いて解くことが唯一つの仕方で $\alpha<x<\beta$ に對して可能になるのであるが、斯様にしてこの方程式を y に就いて解いたものが求める積分となるのである。この積分曲線 $y=\varphi(x)$ は區間 (α, β) の兩限界に於て R の周縁に任意に近づき得る」

普通には簡單に行はれてゐる變數分離の演算も嚴密に考へるとこの様な諸條件に制約される。今この定理の證明を三つに分けて考へて見よう。その第一はこの操作が事實點 ξ, η を通る解を與へることの證明である。第二は點 ξ, η を唯一つの積分曲線が通ることの證明である。

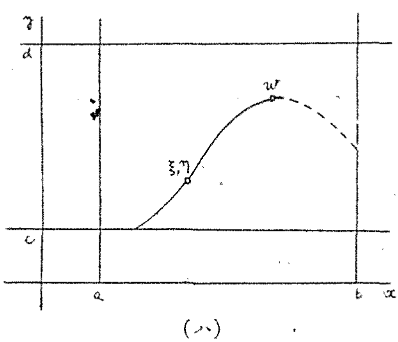
圖 9



(イ)



(ロ)



(ハ)

第三はこの積分曲線が G の周線に幾らでも近づき得ることの證明である。先づ第一から調べて行かう。問題は $g(y) \neq 0$ にある。この條件があるために解 $y = \varphi(x)$ は與へられた領域 G 内で y について一意的に定まるのである。ところで點 ξ, η を通る積分曲線が領域 G 内で y について一意的に定まる時、それが x の如何なる區間に於て存在するかと言ふことを明にしなければならない。結論は豫め言ふならば積分曲線は圖9のイの様になるが、ロ、ハの様にはなり得ない。これを立論するには何うすればよいであらうか。その爲にはロ、ハに於ける點 x が領域の周線上の點になることが判ればよい。そこで $\int_\eta^y \frac{dy}{g(y)} = \int_\xi^x f(x)\,dx$ を考へると y が c から d へ變化する時 $g(y) > 0$ とすれば左邊の積分の値は負から零を通過して正へと單調に増加する。

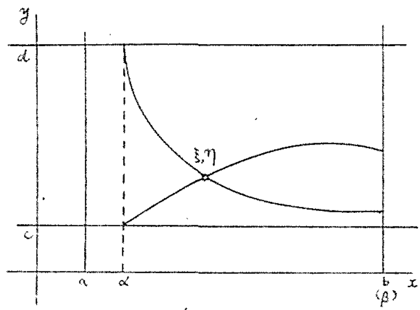
從つて右邊の積分の値も同様な變化の經路を辿らなければならない。しかるに若し積分曲線が x 點から先きに於て $(\xi, \eta$ 點から出發して x 點の方へ移動して行く時）圖9のロ又はハの様な狀態を示すならば、ロの場合には dx が負となることによりこれより先きに於ては積分の値は増加から減少へと移動し、ハの場合にも今度は $f(x)$ の符號が變ることによりこれより先きに於て積分の値は増加から減少へと移動し、何れの場合にも等式 $\int_\eta^y \frac{dy}{g(y)} = \int_\xi^x f(x)\,dx$ が x から先きで成立しなくなるのである。即ちこの等式が成立する限りは積分曲線はロ、ハの様にはなり得ないで、x 點は周線上に來なければならない。このことは $f(x)$ の形如何に拘らず成立する。これに對應して次の不等式

$$\text{(1)} \quad \varliminf_{c<y<d} \int_\eta^y \frac{dy}{g(y)} < \int_\xi^x f(x)\,dx < \varlimsup_{c<y<d} \int_\eta^y \frac{dy}{g(y)}$$

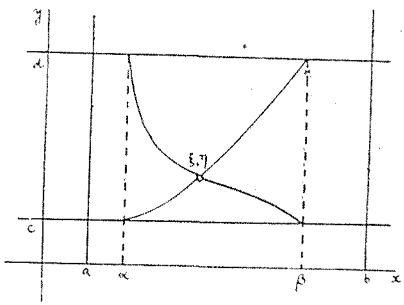
によつて x の範圍が定まる。この不等式に於て x の限界値は中央の項が最大値と最小値を取る時の x の値に外ならない。$f(x)$ が負になる時（誤解を起し易ければ符號を變へる時）は中央の項はその x の値から先きでは減少し始めるから、その x の値が限界値であり、又 dx が負になることは積分の取り方が變つて來ることゝなるので $\int_\xi^x$ の意味が失はれるので此處に又 x の限界値があるわけである。

ところで圖10のロ、ハに於ける ξ 點が矩形領域 R の内部に止まり得ず、周縁上に來なくてはならないことは如何にして立論され得るであらうか。即ち、右方限界に關して言へば $\beta=b$ であるか、$\beta<b$ で、且つ $\underline{\lim}_{x\to\beta-0}\varphi(x)=c$ 又は $\overline{\lim}_{x\to\beta-0}\varphi(x)=d$ であるか、$\beta=b$ で且つ $\underline{\lim}_{x\to\beta-0}\varphi(x)=c$ 又は $\overline{\lim}_{x\to\beta-0}\varphi(x)=d$ であるか、この三者の何れかであることを證明しなければならない。今 $\eta>c$ として β に就きこれらの關係を圖示するならば圖10が得られる。

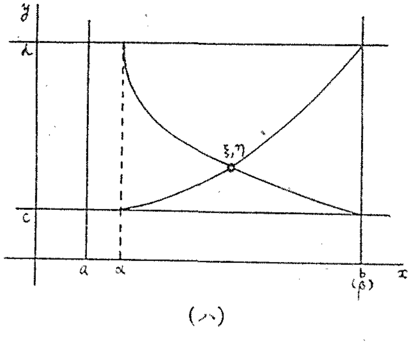
圖 10



(イ)



(ロ)

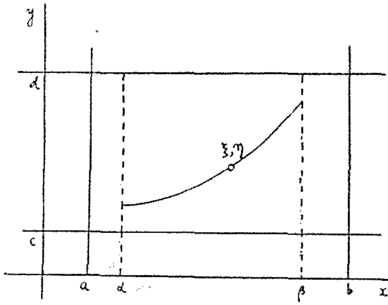


(ハ)

方程式 $\int_\eta^y \frac{dy}{g(y)}=\int_\xi^x f(x)\,dx$ に於て左邊の積分は當然 $\underline{\lim}_{c<y<d}\int_\eta^y \frac{dy}{g(y)}$ と $\overline{\lim}_{c<y<d}\int_\eta^y \frac{dy}{g(y)}$ との間にある。圖10のイでは $\int_\xi^x f(x)\,dx$ が右方に於て $\overline{\lim}_{c<y<d}\int_\eta^y \frac{dy}{g(y)}$、$\underline{\lim}_{c<y<d}\int_\eta^y \frac{dy}{g(y)}$ 等に到達し得ないので

ある。これは $f(x)$ の特性による。即ち點 ξ, η の附近で右方に $f(x)$ の變化が $\dfrac{1}{g(y)}$ の變化に對し緩漫である。ロに於ては $\displaystyle\int_{\xi}^{x} f(x)\,dx$ が左方、右方兩端に於てこれら $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$ の何れにも到達し得ることが示されてゐる。$f(x)$ の特性によることは言ふ迄もない。即ち點 ξ, η の附近で $f(x)$ の變化が $\dfrac{1}{g(y)}$ の變化に比して急激であると言へる。ハについては b に β が偶然一致したと言ふだけである。

圖 11

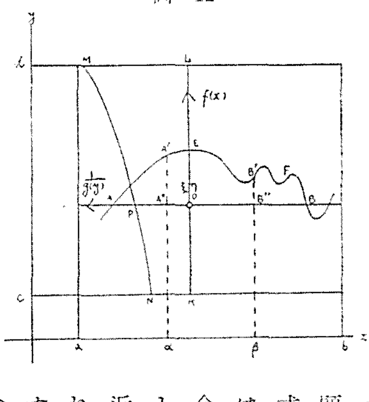


ところが前にも述べた樣に圖9ロ、ハの w 點が周縁上に來なければならないといふことに關聯して圖11の樣な場合はあり得ないのである。この最初から提出し來つた問題にいよいよ最後の斷を與へなければならなくなつた。

$$\int_{\eta}^{y} \frac{dy}{g(y)} = \int_{\xi}^{x} f(x)\,dx$$

は x と y とに關する方程式である。從て $g(y)$ と $f(x)$ とが全く無關係に與へられてゐても課題の形式でこの等式が成立することは言ふ迄もない。

圖 12



今 $g(y)$ と $f(x)$ とが點 ξ, η の附近で圖12で與へられる樣な形狀を有するものとする。$f(x)$ はA點B點に於て符號を變へるものとしよう。$\displaystyle\int_{\xi}^{x} f(x)\,dx$ は面積 OEA′A″O 又は面積 OB″B′EO で表はされ $\displaystyle\int_{\eta}^{y} \frac{dy}{g(y)}$ は面積 OPNKO 又は面積 OLMPO で表はされる。今面積 OEA′A″O = 面積 OPNKO 及び面積 OB″B′EO = 面積 OLMPO となる樣に x と y との關係を定め得れば圖9に於ける z 點は當然矩形領域の周縁上に來るので

ある。この樣な (α, β) を定め得ることは實例を以てすれば直に明となる。唯 $f(x)$ が ξ, η の近附で急激に振動する樣な函數の場合には少しく複雜になるだけである。これに關してはあまりにも數學的になるので本誌の性質上これを省略する。

以上により定理一の操作が事實點 ξ, η を通る解を與へ且つ $\beta = b$ であるか、$\beta < b$, $\underline{\lim}_{x \to \beta - 0} \varphi(x) = c$, $\overline{\lim}_{x \to \beta - 0} \varphi(x) = d$ であるか、又は $\beta = b$, $\lim_{x \to \beta - 0} \varphi(x) = c$, $\overline{\lim}_{x \to \beta - 0} \varphi(x) = d$ であるか、の何れかを說明したのである。以上についてのカムケの簡略な敍述は「$g(y) \neq 0$。であり、且つ連續であるからこの函數は符號を變へない。從つて $\int_\eta^y \frac{dy}{g(y)} = \int_\xi^x f(x)\,dx$ の左邊の積分はその一端の單調函數であつて、且つ積分は $y = \eta$ で消へるから、不等式（一）に於て第一項は負であり最後の項は正である。由つて ξ を內點として含むところの (a, b) の部分區間でそれに對して不等式（一）が滿足されるところの $\alpha_1 < x < \beta_1$ が存在する。全てのこれらの區間の中で最大なものを (α, β) で表はす。$\int_\eta^y \frac{dy}{g(y)} = \int_\xi^x f(x)\,dx$ の左邊は單調であるからこの方程式は $\alpha < x < \beta$ に對して一意的に解かれる。これが解である」。以上により定理一、の操作が事實點 ξ, η を通る解を與へることの說明を終り、次に第二の問題卽ち點 ξ, η を唯一つの積分曲線が通ることの證明を檢討しよう。さて一點を唯一つの積分曲線が通ることを證明するには旣に以前に定義したやうに「點 ξ, η を通る全ての積分曲線が同じく點 ξ, η を通る一つの積分曲線の中に含まれると」いふ立論を導けばよい。今の場合で言へば點 ξ, η を通る區間 (α_2, β_2) で定まつた或る積分曲線 $y = \varphi(x)$ に對して $\alpha \leqq \alpha_2 < \beta_2 \leqq \beta$ であり且つ $\alpha_2 < x < \beta_2$ に於て $\varphi(x) = \varphi(x)$ なることが證明されゝばよいわけである。そのためには次の二つ（イ、ロ）を證明すればよい。

(イ)　$\alpha_2 < x < \beta_2$ に對し $\int_\eta^{\varphi(x)} \frac{dy}{g(y)} = \int_\xi^x f(x)\,dx$ が成立することを證明すればよい。さうすれば $\varphi(x)$ は $y' = f(x)g(y)$ の積分として c と d との間にあるから (α, β) の定義から (α_2, β_2) は (α, β) に含まれることが判る。

(ロ)　方程式 $\int_{\eta}^{y}\frac{dy}{g(y)}=\int_{\xi}^{x}f(x)\,dx$ は y に就いて唯一つの解を有するから $a_2<x<\beta_2$ に對して $\psi(x)=\varphi(x)$ となる。この方程式が y について、唯一つの解を有するといふことは既に述べた。それが $g(y)\neq o$ なること、及び解が點 ξ,η を通ること、の必然的結果なることは第一の場合に關して説明した。

さうすると上記の(イ)、(ロ)に就いて説明す可きこととしては(イ)の場合に於て $\varphi(x)$ が $a_2<x<\beta_2$ に對する解である時 $\int_{\eta}^{\varphi(x)}\frac{dy}{g(y)}=\int_{\xi}^{x}f(x)\,dx$ が $a_2<x<\beta_2$ に對して成立することの證明だけとなる。そのために

(1)　$w(y)=\int_{\eta}^{y}\frac{dy}{g(y)}$　($c<y<d$ に對し)

と置けば、$\varphi(x)$ は $c<y<d$ の値のみを取るから

(2)　$\chi(x)=w(\varphi(x))$　($a_2<x<\beta_2$ に對し)

は x に關する微分可能な函數である。詳しく言へば

$$\chi'(x)=w'(y)\cdot\varphi'(x)=\frac{1}{g(\varphi(x))}\cdot f(x)g(\varphi(x))=f(x)$$

が成立し且つ $\chi(\xi)=w(\varphi(\xi))=o$ であるから

(3)　$\chi(x)=\int_{\xi}^{x}f(x)\,dx$

が得られる。(3) の右邊を (2) の左邊に代入し、又(2)の右邊の代りに (1) の右邊の y に $\varphi(x)$ を入れたものを用ひれば

$$\int_{\eta}^{\varphi(x)}\frac{dy}{g(y)}=\int_{\xi}^{x}f(x)\,dx\quad(a_2<x<\beta_2\text{ に對し})$$

が得られる。

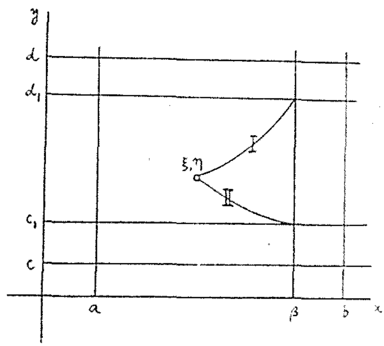
以上により第二の問題たる解の一意性が立證された。その際留意すべきことは以前に述べた一意性の幾何學的定義が巧に使用されてゐること、定理一の中で定義されてゐる最大區間 (α,β) が遺憾なく利用されてゐること、及び方程式 $\int_{\eta}^{y}\frac{dy}{g(y)}=\int_{\xi}^{x}f(x)\,dx$ が y に就き一意的に解かれること、等である。

第三の問題として積分曲線が矩形領域 r の周緣に幾らでも近づき得ること、即ち積分曲線とその存在領域との關係を檢討しよう。この際積分曲線を右方に追究する。$\beta=b$ であれば證明の必要はない。何となればこの時には曲線は矩形領域の周緣 $x=b$ に幾らでも近づき得る

からである。

β<b であると假定し、更に $\underset{x\to\beta-0}{\underline{\lim}}\,\varphi(x)=c$ 又は $\underset{x\to\beta-0}{\overline{\lim}}\,\varphi(x)=d$ が成立しないものとしよう。β<b であつてもこの二つの極値が得られれば積分曲線は當然領域の周縁に幾らでも近づく筈である。さて β<b であつて更に上記の二つの極値が得られないものとすれば、その關係は次の圖13によつて示される。

圖 13



即ち曲線は β 上の c_1 又は d_1 に向ふ。詳しく言へば $\alpha<x<\beta$ に對し $c_1<\varphi(x)<d_1$ が成立する様な二數 c_1, d_1 があつて、それに對して $c<c_1<d_1<d$ が成立しなければならない。即ち $\int_\xi^x f(x)\,dx$ は豫定の積分値 $\underset{c<y<d}{\underline{\lim}}\int_\eta^y \frac{dy}{g(y)}$ 及び $\underset{c<y<d}{\overline{\lim}}\int_\eta^y \frac{dy}{g(y)}$ に到達し得ないから上記の様な c_1, d_1 等に就いては次の不等式が $\xi=\varphi(x)$ 及び $\alpha<x<\beta$ に關して成立しなければならない。

$$\underbrace{\underset{c<y<d}{\underline{\lim}}\int_\eta^y \frac{dy}{g(y)} < \underset{c_1<y<d_1}{\underline{\lim}}\int_\eta^y \frac{dy}{g(y)} \leqq}_{\mathrm{II}} \underbrace{\int_\xi^x f(x)\,dx \leqq \underset{c_1<y<d_1}{\overline{\lim}}\int_\eta^y \frac{dy}{g(y)} < \underset{c<y<d}{\overline{\lim}}\int_\eta^y \frac{dy}{g(y)}}_{\mathrm{I}}$$

さうすると (α,β) はその中で $\varphi(x)$ が存在する最大區間とは言へなくなる。但し $g(y)\neq 0$ とし且つ $g(y)>0$ とした時上の不等式に於てⅠは圖13の積分曲線Ⅰについて成立するものでありⅡは圖13の積分曲線Ⅱについて成

立するものである。$g(y)<0$ の時はこれが反對になる。これによつて第三の説明を終る。

以上により $y'=f(x)g(y)$ の解法に關する説明を終つたのであるが、この解法の特色が從來の操作に重點を置いた方法と全く異るものであることは明であつて、カムケは斯る解法こそ眞の解法であること、少くとも一番理解し易い解法であることを主張するものである。形式こそ却つて複雜になるとは言へ、それを論理的に追究して行けば道が自ら拓けるものとすれば、寧ろ甘んじてこの方法を選ぶべきであると思ふ。それのみならず既に述べた様に $g(y)$ が零とならないで常に一定の符號を保つて行くといふ想定がこの方法の骨子となつてゐるのであつて、$g(y)$ が零になる場合が將來極めて大きな役割を演じて來る時の豫備的問題としての定理一で表現される解法の持つ積極的使命は、單に論理的である以上に大なるものがある。更に又定理一を用ひて各種の問題を解いて見ることは、甚だ興味深く且つ重大であるが餘りにも數學的であるため、これは本誌の性質上割愛することにして本論を進める。

既に $y'=f(x)$, $y'=g(y)$, $y'=f(x)g(y)$ なる三つの微分方程式について夫々獨自な解法を示したのであるが、言ふ迄もなく最初の二つは最後のものに包攝されるわけである。しかしながら敢へてこの二つの解法を別に示したのには十分の理由がある。即ち $y'=f(x)$ の様な簡單な場合に於てすら一意性の定義から一點を通る積分曲線の唯一つなることを證明したり、解曲線が周緣に任意に近づき得ることを證明したりして問題の重點が何處にあるかを明白にし、又 $y'=g(y)$ の場合には $\frac{dy}{dx}=g(y)$ を $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{g(y)}$ たらしめる爲の用意を敎へ且つ積分曲線の變數の限界 α と β とを y に關する積分の上限、下限から決定する方法を明白にして其後の研究への道を拓いてゐるのである。

さて $y'=f(x)g(y)$ に於て $g(y)$ は y の區間の何處に於ても零とならないものと假定して總ての論を進めたのであるが、次に $g(y)$ が y の區間の或る點で零になる様な場合を考へることにより問題を一般化する。此處はカムケが若干の基礎的な一階微分方程式を取扱つた場合に最大の苦心を拂つたところと想像される。今結論の概略を豫め述べるならば、$g(y)$ が y の區間の或る點で零となる場合には或る積分の收斂、發散を檢討するこ

とにより解の一意性の判定をすることが出來るのである。しかもこれは單にこの特殊な微分方程式 $y'=f(x)g(y)$ について役立つだけではなく、$y'=f\left(\dfrac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$、$y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$、$y'+yg(x)+h(x)=0$ 等の微分方程式の解法にも役立つとともに、今後の解の一意性の一般的研究の基礎をなすものである。

先づ $g(y)$ が區間の或る一點で零となる時如何なる現象が起るかを具體的な例について調べ、次に一般論に這入らう。$g(y)$ が y の區間のある一點で零になる場合にはその點で解の一意性が失はれる時と失はれない時とがある。

これを實例について說明し、次に一意性判定の一般定理に進む。

例題一、$y'=\sqrt{|y|}$　この例題では一定點を通る積分曲線が唯一つではなく無數に多いことが示される。この場合には $y'=g(y)$ の解法を適用すればよい。$g(y)=\sqrt{|y|}>0$ とすれば $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{|y|}$ から $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\sqrt{|y|}}$ を導くことが出來る。即ち一點 ξ,η を通る解は $x=\xi+\displaystyle\int_\eta^y\frac{dy}{\sqrt{|y|}}$ から得られる。但しこの式が y について一意的に解かれうる x の範圍は $\alpha=\xi+\displaystyle\varliminf_{c<y<d}\int_\eta^y\frac{dy}{g(y)}$, $\beta=\xi+\displaystyle\varlimsup_{c<y<d}\int_\eta^y\frac{dy}{g(y)}$ によつて定められる。ところで y には正負が考へられるから上半面についての微分方程式と下半面についての微分方程式と二通りを別々に考察する。上半面についての微分方程式の解は

$$x=\xi+\int_\eta^y\frac{dy}{\sqrt{|y|}}\qquad y>0$$

で與へられるが、これを解けば

$$x=\xi+2(\sqrt{y}-\sqrt{\eta})$$

が得られる。この式を y について一意的に解くことが出來るところの變數 x の範圍 (α,β) を求めると、α は y が零に向ふ時の x の値であるから $\alpha=\xi-2\sqrt{\eta}$ となり、又 β は y が $+\infty$ に向ふ時の x の値であるから $\beta\to+\infty$ となる。即ち $(\xi-2\sqrt{\eta},+\infty)$ の範圍內で上式は y に關し一意的に解かれ $y=\left\{\frac{1}{2}(x-\xi)+\sqrt{\eta}\right\}^2$ が得られる。上半面だからその內部の點 ξ,η について

はηには正負があるがηは正である。下半面（$\eta<0$）についての解はyを$|y|$で置きかへることにより

$$x=\xi-\int_{\eta}^{y}\frac{d|y|}{\sqrt{|y|}}\qquad y<0$$

から得られる　これを解くことにより

$$x=\xi-2(\sqrt{|y|}-\sqrt{|\eta|})$$

を得る。αとしては$y\to 0$なる時のxの値$\alpha=\xi+2\sqrt{|\eta|}$がβとしては$y\to-\infty$の時の$x$の値$\beta\to-\infty$が得られる。この時には$\xi$は正負の何れでもよいが$\eta$は負である。

上式をyについて解くと$y=-\left\{\frac{1}{2}(x-\xi)-\sqrt{|\eta|}\right\}^2$を得る。

結局

$$y=\begin{cases}\left\{\frac{1}{2}(x-\xi)+\sqrt{|\eta|}\right\}^2 & x>\xi-2\sqrt{|\eta|}\ \text{及び}\ \eta>0\ \text{に對し}\\ -\left\{\frac{1}{2}(x-\xi)-\sqrt{|\eta|}\right\}^2 & x<\xi+2\sqrt{|\eta|}\ \text{及び}\ \eta<0\ \text{に對し}\end{cases}$$

となる。

以上の$\eta>0$, $\eta<0$なる場合の積分曲線の經過は圖15で表はされる。

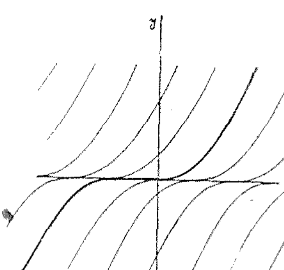


圖 14

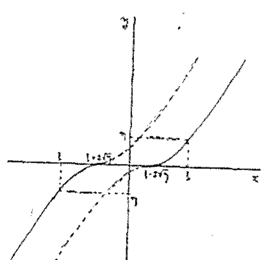


圖 15

次に$y=0$の場合、即ち$g(y)=0$の場合を調べる。この時には前記の解法を適用することが出來ない。しかも$y=0$が微分方程式の一つの解曲線であることは明である。即ち前記の解以外にx軸も一つの解となる（勿論ξ,ηを通る解ではないが）。さうすると圖14を見れば判る樣に原點を過り無數に多くの積分曲線が通ることが觀取される。上半面の任意の一つの拋物線上を下降して行つてx軸に達し、次にx軸上を任意の距離だけ左方に進んで、任意の

一點から下半面の或る拋物線に移行することが出來る。この進行操作の數は無數であるから原點を通る積分曲線は無數にあると言へる。特に原點と言はなくてもx軸上の全ての點について同樣なことが言へる。卽ち$\varphi(y)$が零となる樣な點を過り無數に多くの積分曲線が存在することとなり、斯樣な點については積分曲線の一意性が成立しないことになる。結局この例によつて$\varphi(y)$が零となる場合にはその樣な點を通る積分曲線の一意性が失はれるといふことが推定されたのである。この論法にはかなりの幸運を觀取せざるを得ない。$\varphi(y)=0$を滿足する點を通る積分曲線は目測によつて得られた。しかもこの積分曲線は巧に點ξ, ηを通る積分曲線と連絡される。

例題二、$y'=y$　この例では$\varphi(y)$が零となつてもその點を通る解の一意性が失はれないのである。先づ$\eta>0$。又は$\eta<0$として點ξ, ηを通る積分曲線を求める。當然$\frac{dy}{dx}=y$から$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}$と導き得る。

$x=\xi+\int_\eta^y \frac{dy}{y}$から$x=\xi+\log\frac{y}{\eta}$を過て$y=\eta e^{x-\xi}$が得られる。$x=\xi+\log\frac{y}{\eta}$を$y$について一意的に解き得る樣な$x$の區間は

$$\eta>0\left\{\begin{array}{l}\alpha=\xi+\lim\limits_{0<y}\log\frac{y}{\eta}\ (y\to 0)=-\infty\\ \beta=\xi+\lim\limits_{0<y}\log\frac{y}{\eta}\ (y\to+\infty)=+\infty\end{array}\right.$$

$$\eta<0\left\{\begin{array}{l}\alpha=\xi+\lim\limits_{y<0}\log\frac{y}{\eta}\ (y\to 0)=-\infty\\ \beta=\xi+\lim\limits_{y<0}\log\frac{y}{\eta}\ (y\to-\infty)=+\infty\ (\eta<0)\end{array}\right.$$

で與へらる。これで$\eta\neq 0$の時の解は得られたのであるが$\eta=0$の時には前の例題と同樣に$y=0$が積分曲線となることは目測によつて直に

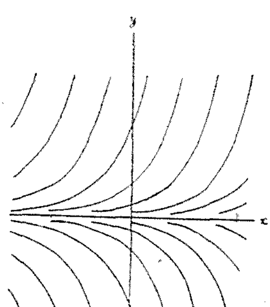


圖 16

明である。しかし今度は例題一の場合と異つて$\varphi(y)\neq 0$が成立しなくても積分曲線の一意性は保たれてゐるのである。卽ち圖16を見れば明である樣にx軸上の點を通る

積分曲線はx軸自身だけである。xが負の無限大に向ふ場合にのみyが零に向ふからx軸に幾らでも近い積分曲線は見出されるが、x軸上にその終點を有する確定した積分曲線は見出され得ない。要するに例題二では $\varphi(y)=0$を滿足する點に於ても解の一意性が保たれる場合があることが示された。以上の二つの例では$\varphi(y)=0$なる條件を滿す積分曲線は孤立した一點ではなくx軸自身であつた。次に $\varphi(y)=0$ を滿足する積分曲線はx軸でありながら $x>0, x<0$ の場合に一意性が成立し $x=0$ の點だけではそれが成立しない様な例を簡單に說明する。

例題三、 $y'=\frac{y^2}{x^2}$ 定理一を適用しようとすれば矢張$y\neq 0$ としなければならないが、それ以外にxも零にあらずと假定する。 $\int_{\eta}^{y}\frac{dy}{y^2}=\int_{\xi}^{x}\frac{dx}{x^2}$ から $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{\eta}-\frac{1}{\xi}=c$ が得られる。これがyについて一意的に解かれるためのxの區間は

$$\lim\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{\eta}\right)<\frac{1}{x}-\frac{1}{\xi}<\lim\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{\eta}\right)$$

から定められる。この際にはx, yの正負及びξ, ηの正負とその大小等により色々の場合があるので第一象限から第四象限まで別々に考へる必要がある。第一象限ではξもηも正で

$$\underset{\substack{\downarrow\\ +\infty}}{\frac{1}{y}}-\frac{1}{\eta}<\frac{1}{x}-\frac{1}{\xi}<\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{1}{y}}-\frac{1}{\eta}$$

$$-\frac{1}{\eta}<\frac{1}{x}-\frac{1}{\xi}<+\infty$$

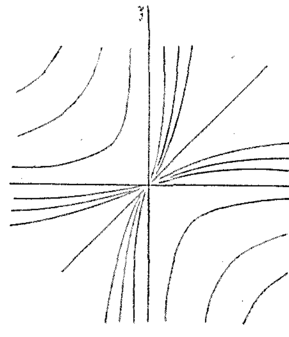
$$-c=\frac{1}{\xi}-\frac{1}{\eta}<\frac{1}{x}<+\infty$$

$\xi>\eta$ の時は $c>0$ であるから上記の不等式は文句なしに成立しxの値は零から $+\infty$ まで取り得る。即ちこの時には $\alpha=0, \beta=+\infty$ である。$\xi<\eta$ の時はcが負であるから $-c<\frac{1}{x}$ に於て左邊も右邊も正となり $x<\frac{1}{|c|}$ となる。即ち $\alpha=0, \beta=\frac{1}{c}$ となる。

次に第二象限を調べる。ξは負であるからcは正となり、 $-c<\frac{1}{x}$(但し$x<0$) からxの値は常に$-\frac{1}{c}$より小になる。従つて $\alpha=-\frac{1}{c}, \beta=-\infty$ が得られる。以上の様にして各象限につきαとβとが求められる。

この場合積分曲線は前記のもの以外に $y=0$ があることは目測により明であるが、原點に於ては原微分方程式に於て $x\to0, y\to0$ とすれば判る様に無數に多くの積分曲線が流入してゐる(圖17)。けれども原點を無限に多くの積分曲線が通過するとも云へない。兎角この例題では原點を除いて積分曲線の一意性は保たれる。

圖 17



以上三つの例題につき $g(y)$ が零になる場合には如何なる現象が起るかを調べたのである。第一の例では x 軸上の全ての點を無數に多くの積分曲線が通るのであつて、x 軸上の全ての點に於て積分曲線の一意性が失はれてゐる。

第二の例では x 軸上の全ての點に於て解曲線の一意性が保存されてゐる。一見 x 軸上の全ての點に無數に多くの積分曲線が流入してゐる様であるが、それ等は無限遠に於てのみ x 軸と交はり得るものである。第三の例では原點を除いてはあらゆる點で一意性は保たれてゐるが、原點には無數に多くの解曲線が流入してゐる。この原點については何も云へないのである。

さてこれ等の例題によつて得た結果を基礎にして $g(y)$ が零になる場合の一般論に這入る。即ち次に $y'=f(x)g(y)$ の解の一意性を或る積分の收斂、發散によつて判定する方法を考へる。それは「$y\to0$ 又は $y\to a$ の際に $g(y)\to0$ となる時の積分曲線の經過」といふ表題で論ぜられてゐる。先づ微分方程式 $y'=f(x)g(y)$ に於て $y\to0$ 又は $y\to a$ なる時に $g(y)\to0$ となると假定する。そして $g(y)$ がこの兩限界 $y=0$, 又は $y=a$ に於て零に向ふ時、矩形領域 R の水平限界の近傍に於ける積分曲線の經過(又は狀態)を研究する。即ち積分曲線が前に述べた例題一と同樣になる場合と、例題二と同樣になる場合とで如何なる解析的な相違があるかを見ようとする。例題一と同樣になる場合には積分曲線は $y=0$ なる水平限界に切しつゝ終るのであるが、例題二と同樣になる場合には積分曲線は $y=0$ 上に終ることがないのである。これは具體的に幾何學的に考察したのであるが、これを抽象的に且つ解析的に一般化して考

へると例題一の時には有限個所に於ける切斷が問題であり、例題二では無限遠に於ける切斷が問題である。從つてこれ等に對應する解析的方法は前者の場合には何等かの意味に於て有限確定なものに關聯があり、後者の場合には何等かの意味に於て無限なものに關聯があるであらうことは豫め想像し得られるところである。即ち解が一意的に定まらない場合にはそれに或る有限量が對應し、解が一意的に定まる場合にはそれに何か或る無限量が對應するのではないかと考へられる。ところで圖から想像して、例題一の時にはこの有限量を抛物線とx軸とが包む面積とし、例題二の時にはこの無限量を指數曲線とx軸との包む面積としたら何うであらうか。指數曲線の場合の面積も曲線が無限遠でx軸に近づくとは言へ矢張有限確定値を有することは明であるから斯る方法は役に立たない。即ち無限積分を用ひて一意性を判定することは不可能である。そこで今度は縫格積分を用ひて見よう（勿論これは本質的な區別ではないが）。例題一について次の縫格積分を計算する。簡單なので〃記號は省略する。

$$\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\left[y^{\frac{1}{2}}\right]_0^x = 2\sqrt{x} \quad \text{（有限確定）}$$

であるから、例題一では $\int_0^x \frac{dy}{g(y)}$（但しgは $\lim_{y \to 0} g(y) = 0$ の様な意味を持つ）なる縫格積分は確定値を有する。例題二について同樣な縫格積分を考へると

$$\int_0^x \frac{dy}{y} = [\log y]_0^x = \log x + \infty \quad \text{（發散）}$$

を得る。即ち例題二では縫格積分は確定値を有しない。言ひ變へれば發散となる。此處で當然豫測されることは、例題一の樣に解の一意性が失はれる場合には上記の縫格積分が確定値を有し、例題二の樣に解の一意性が保たれる場合には上記の縫格積分が發散するのではないかと言ふことである。これに對する基礎理論を以下に說明する。

（未完）