多値論理學

杉原丈夫

多値論理學の意義

舊來の論理學では命題は眞かもしくは僞であつて、眞僞以外の値をとることは考えられなかつた。しかし命題の値が眞と僞との二つの値のうちいずれか一つでなければならぬという先天的必然性はどこにもない。命題が眞僞二値のほかに更に第三第四の値をとると考えても理論的には何らの矛盾も生じない。故に命題の値が二つのみの場合のほか三つ以上の場合をも考え、これらを總稱して多値論理學（many-valued logic）という。

これに對し次のような反問が出されるかもしれない。「多値論理學を構成することは理論的には可能であろうが、現實的には不必要ではないか。現實に必要のない論理學は學者の單なる數學的觀念遊戲にすぎない。」かかる反問には、純粹に形式的で理論的な學問にあつてはその形式を滿足させる具體的實例の有無は問題でないと答えてよいのであるが、幸にして多値論理學の場合には現實的に必要性がありその具體的實例もいくつかある。しかし多値論理學の實例について述べる前に、形式論理學の最近の發達について概觀しておく必要があるように思われる。なぜならば我が國においては形式論理學の新しい發展について殆ど紹介されておらないので、あらかじめこれらについて概觀することなくしては多値論理學を論ずることは困難であろう。

形式論理學はアリストテレス以來約二千年間殆ど何らの進歩も變化も示さなかつた。しかるにそれが最近百年の間に急激に飛躍的發達をなし、かつ今もなお發展が進行しつつある。この發展の經過は四つの段階に分かれている。そ

の第一段は一八五〇年前後論理學に數學的記號が採用され、いわゆる記號論理學が生じたことである。發達の第二の段階は一八八〇年頃から命題論理學が體系化されたことである。第三は一九三〇年頃から抽象代數學において束論が發達したことにより形式論理學が束論的に組織しなおされ、それと同時にいわゆる古典論理學に對し非古典論理學が束論的な構成により提示されたことである。第四段階は現在の段階であつて、束論的論理學よりも一層普遍的な論理學として多値論理學の研究が始められた時期である。

ブール論理學

形式論理學の革新の第一段階は一八五〇年頃ブールその他の學者によつて始められた。周知のごとく舊來のアリストテレスの論理學において三段論法の格式論は甚だ煩瑣であつて、學生達は無意味なラテン詩の助けによつて暗記に努める始末であつた。しかし論理學が眞に論理的であるならば、論理學の諸定理は數學において定理が公理から演繹されるごとく少數の原理から數學的明晰さをもつて理論的に演繹されるべきである。この目的のためブールらは論理學にも數學的記號を使用し、論理學における概念を數學における集合にふりあて、從つて命題を集合間の包含關係に對應せしめた。例えば「人間」という概念を小さい圓、「動物」という概念を大きい圓で表せば「人間は動物なり」という命題は小圓が大圓の中に含まれているという數學的關係に對應する。かかる方法によつてブールらは煩瑣なアリストテレスの論理學を單純な數學的計算に還元することに成功した。よつてこの論理學をブール論理學という。(註一)

人は或は言うかもしれない、通常の言語も本來一つの記號であつてアリストテレスの論理學のごとく通常の言語で記述したものもブール論理學のごとく數學的記號を用いたものも本質的に同じであると。しかし通常の言語で記述された古代ギリシヤの數學と代數的記號を使用したアラビヤ的近世數學とを較べてみて、記號の使用が我々の思惟をいかに簡便化し數學の新しい領域の開發をいかに促進させたかを考えると、記號化ということは單に表現形式の技術的問題たるにとどまらず思惟の本質に關するものを含んでいるように思われる。事實これ以後の論理學はすべて數學的

記號を用いており、いわゆる記號論理學として發達しているのである。

ラッセル論理學

形式論理學の革新の第二段階は命題論理學の發達にある。アリストテレスの論理學は（從つてそれを記號化したブール論理學もまた）「SはPである」という形式の命題のみを取りあつかい、主概念Sと客概念Pとの關係を媒概念Mを介して推論するという形式の論理學であつた。このような專ら概念間の論理的關係について考究する論理學を概念論理學と呼ぶことにすれば、アリストテレスの論理學は（從つてまたブール論理學は）概念論理學である。これに對し專ら命題間の論理的關係を考究する論理學すなわち命題論理學は公理主義的數學者の手によつて一八八〇年頃から研究されはじめた。公理主義者たちは數學の各部門を嚴密に公理體系化しようとしたのであるが、數學の公理のみいかに嚴密にしても公理から定理を演繹するときの論理に曖昧さがあつては無意味であるから、進んで數學の證明に用いる論理そのものの公理體系化を考えるに至つた。ところが數學の證明に用いる論理學はアリストテレス的概念論理學ではない。例えば數學でしばしば使用する歸謬法は命題bが眞であることを證明するために適當な命題aをさがし、「もし命題bが眞でないとすれば命題aは眞でない、しかるに命題aは眞である、故に命題bは眞である」という形式をとる。この推論において取りあつかわれるものは命題aと命題bとの間の論理的關係であつて、概念間の論理的關係を取りあつかう概念論理學とは別個の新しい領域である。

公理主義者の手によつて開發された命題論理學は概念論理學と異なつた新しい領域であるのみならず、更に命題函數を媒介とすることにより命題論理學から概念論理學が演繹されることを彼らは明らかにした。命題函數とはその値が命題であるごとき函數のことであつて、これを假に fx で表わす。命題函數 fx に對しこれを滿足せしめる（すなわち fx を眞ならしめる）xの集合を考えると、これは一つの概念を與える。例えば fx が「xは美しい」であれば、fx を滿足させるxの集合は「美しいもの」という概念になる。かくて一つの命題函數には必ず一つの概念が對應する

から、命題論理學からそれと對應的に概念論理學を構成することができる。

かかる命題論理學はラッセルによつて一應集大成されたので、これをラッセル論理學と呼ぶことにしよう。ラッセル論理學は命題論理學とそれより演繹される概念論理學とを含むものであるから、ブール論理學は（從つてアリストテレスの論理學は）すべてラッセル論理學に包括されている（註二）。

束論的論理學

形式論理學の第三の發展は一九三〇年以後束論の發達によつてもたらされた。抽象代數學は數もしくは幾何學的圖形間にある關係を抽象化して研究する數學であるから、抽象を極度に推し進めれば事象間の一般的關係についての學となる。從つて抽象代數學がどこかで形式論理學と重なりあう部分があることは今から思えば當然考えられるのであるが、抽象代數學のうち十九世紀にまず發達したのは群論であつて、不幸にして論理學における概念も命題も群でなかつたため、論理學を抽象代數學的に構成しようとは誰も考え至らなかつた。しかるに一九三〇年前後から抽象代數學の一部門として束論が發達したところ、論理學における概念も命題もともに束であり、從つて概念論理學および命題論理學がともにその理論の形式において束論と同型であることが明らかとなつた。概念論理學と命題論理學とが同型であることはラッセル論理學においても既にわかつていたことであるから、結局問題は命題論理學と束論との關係にある。

束論では順序という抽象的關係を考え、これを記號$\leqq$で表わす。順序は抽象化された關係であるから具體的に何を意味するかは自由であつて、ただ次の三つの公理（P1ないしP3）を滿足させさえすれば何であつてもよい。なお式中の等號も二つの値の等しいことを意味するだけで、それ以上は具體的に何を意味してもさしつかいない。

P1　$a \leqq a$

P2　$a \leqq b$ かつ $b \leqq a$ ならば $a = b$

P3　$a \leqq b$ かつ $b \leqq c$ ならば $a \leqq c$

束論ではまた二つの抽象的關係結と交とを考え、これを記號∪および∩で表わす。結および交が具體的に何を意味するかは全く自由であつて、ただ次の三つの公理（L1ないしL3）を滿足させさえすればよい。

L1　$a \cup b = b \cup a$

$a \cap b = b \cap a$

L2　$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$

$a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$

L3　$a \cup (a \cap b) = a$

$a \cap (a \cup b) = a$

ある集合のどの二つの元（例えば a と b）をとつてもその結と交（すなわち $a \cup b$ および $a \cap b$）が必ず存在するとき、その集合を束という。束において $a \cup b = b$ なるとき $a \leqq b$ であると定義すればL1ないしL3よりP1ないしP3を導きうる。

束においてL1ないしL3のほかに更にL4が成立するとき、この束をモヅル束といい、更にL5（これを分配律という）が成立するとき、この束を分配束といふ。分配束は必ずモヅル束であることが束論で證明されている。

L4　$a \cap [b \cup (a \cap c)] = (a \cap b) \cup (a \cap c)$

L5　$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$

$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$

束のすべての元を順序に從つて上下に配列したとき最上端および最下端の元がある場合、この元を最大元および最小元といい、1および0で表わす。最大元および最小元が存在する束においてどの任意の元 a に對してもL6（これ

を相補律という）を滿足させる元a'が必ずあるとき、この束を相補束といい、a'をaの補元という。相補束において更にL7が成立するとき、この束を正相補束という。最大元最小元および補元も抽象的關係であつて具體的に何を意味するかは自由である。

L6　$a \cup a' = 1$

　　$a \cap a' = 0$

L7　$(a')' = a$

　　$(a \cup b)' = a' \cap b'$

　　$(a \cap b)' = a' \cup b'$

さて束論における諸記號はそれぞれ抽象的關係であつて具體的に何を意味するかは自由であるから、論理學ではこれらを次の表のように讀みかえる。

記號	束論	論理學	通常の言語
a'	補元	否定	aならず
$a\ b\cap$	交	連言	aかつb
$a \cup b$	結	選言	aかb
$a \leqq b$	順序	含意	aならばb
$a = b$	等號	等値	
1	最大元	眞	
0	最小元	僞	

また論理學では讀みかえによりL6およびL7の諸式に次のごとき名稱を與える。

排中律　L6第一式

矛盾律　L6第二式

二重否定律　L7第一式

ドモルガンの定理　L7第二第三式

なぜならばL6第一式は「aかaならずは眞である」と讀めるから、いわゆる排中律に相當し、第二式は「aかつaならずは僞である」と讀めるから、いわゆる矛盾律に相當する。

束論の記號をかくのごとく論理學的に讀みかえ、L1ないしL7が論理學においても成立するか否か一つ一つ檢討してみると、これらの公理はラッセル論理學においてすべて定理として成立していることを知りうる。(註三) 從つてラッセル論理學は正相補分配束であり、束論の諸理論は讀みかえによりそのままラッセル論理學の理論とすることができる。(註四)

バークホフ論理學

論理學が束論的に構成されたことは次のような意義を有する。第一に抽象代數學と論理學とが一つの理論にまとめられ、理論に普遍性と抽象性を增した。第二にその結果論理の構造が數學的に見易くなり諸定理間の關係が明晰となつた。ラッセル論理學でかなり複雜な證明を要した定理も束論的には甚だ簡單に理解されることが多い。しかし最も重要な意義は論理學の束論化がラッセル論理學から非ラッセル論理學へ飛躍するためのよい足場となつたことである。ラッセル論理學は束の中でもかなり特殊な正相補分配束の理論と同型であるから、これより一般的な束例えば正相補モヂュル束やただの分配束と同型の論理學がラッセル論理學よりは一層普遍的な論理學として可能なはずである。

このような非ラッセル論理學の具體的實例が最初に發見されたのは量子力學においてである。束論が發達した一九三〇年前後にはちようど物理學では量子力學が發達し從來の物の考え方に根本的變革を與えた。そこで束論の研究者バークホフらは量子力學に使用される形式論理學を檢討して、L1ないしL7のうちL5（すなわち分配律）を除くほかはことごとく成立するが分配律だけは一般には成立しない、從つて量子力學における形式論理學は正相補モヂュル束の理論と同型であることを明らかにした。この論理學を假にバークホフ論理學と呼ぶことにする。(註五)

周知のごとく量子力學では例えば電子の位置と運動量とを同時に精密に測定することができない。言葉を變えれば電子の位置に關する記述aと運動量に關する記述bとがあつて、一方の記述の眞なることが觀測によつて確められるや、他方はもはや眞でも僞でもあり得ず、そもそもそのような記述自體が無意味となつてしまうのである。いま分配

律（L5）の c に b の補元 b' を代入すると式(1)を得る。

(1)　$a \cap (b \cup b') = (a \cap b) \cup (a \cap b')$

左邊の $(b \cup b')$ は相補律（L6）により1に等しいからこれを式(1)に代入し、かつ $a \cap 1 = a$ なることは別に容易に證明できるから、これを左邊に適用すれば式(1)は次のように變形される。

(2)　$a = (a \cap b) \cup (a \cap b')$

しかるに量子力學において a と b の同時觀測が不可能ならば、a が眞なるとき b は眞でも僞でもあり得ないから、$a \cap b$ すなわち a と b とが共に眞であるということは眞でなく、$a \cap b'$ すなわち a が眞で b が僞であるということも眞でない。よつて式(2)の左邊が眞であるとき右邊は眞でなく、式(2)は恒等式としては成立しない。式(2)が成立しなければ式(1)が成立せず、從つてまた分配律が一般には成立しない。かくて分配律の成立しない非ラッセル論理學が具體的に提示されたのである。

ブラウエル論理學

バークホフ論理學によつて非ラッセル論理學の可能性が具體的に示されるや、人々が直ちに思い出したのはいわゆるブラウエル論理學もしくは直觀主義論理學と稱されるものである。ブラウエルらの直觀主義者は既に一九一〇年頃からラッセル論理學に反對し、無限に關しては排中律および二重否定律を無制限に使用し得ぬことを主張していた。しかし彼らの新しい論理學は一つにはその理論が煩瑣なことと、今一つには彼らが新しい論理學の基礎づけとして提唱したいわゆる直觀主義哲學に災いされて、一般の哲學者や數學者の受入れるところとならなかつた。しかるに束論が發達した今日、束論的論理學の立場からブラウエル論理學を振返つてみると、それは排中律および二重否定律の成立を否定する論理學であるから、L6とL7のうち矛盾律とドモルガンの定理のみが成立する分配束と同型な論理學にほかならぬ。（註六）

かくて我々は非ラッセル論理學の具體的例を既に二つ有するわけであるが、一度非ラッセル論理學の可能性が明らかになるや、理論的にはこのほか種々の非ラッセル論理學が考えられ、それらはすべて(ラッセル論理學をも含めて)束論によつて統一的に記述される。それはちようどユークリッド幾何學に對する非ユークリッド幾何學がすべて（ユークリッド幾何學をも含めて）射影幾何學の立場から統一的に記述されるのと同じである。そして幾何學においてユークリッド幾何學と非ユークリッド幾何學のいずれが正しいかという議論は意味がなく、いずれも幾何學として成立し、ただ現實の空間がいずれの空間であるかは專ら物理學的經驗の問題であつて數學の問題でないごとく、この世紀の始めに大いに問題となつたラッセル論理學とブラウェル論理學との論爭も論理學としては意味がなく、いずれも論理學として成立しうるものである。ただ具體的な物理現象がいかなる論理に從つているかはもはや論理學を離れ專ら物理學的經驗の問題である。

多値論理學の成立

形式論理學の發達の第四の段階は多値論理學である。多値論理學は一九三〇年頃まず樣相論理學 (modal logic) の研究として始められた。通常の論理學では專ら「aなり」という形の命題のみを取りあつかうのであるが、このほか「必ずaなり」とか「多分aであろう」というような樣相を考え、これを記號化して體系づけたものが樣相論理學である。ところがこのような論理學は從來の眞僞二値のほかに必然性とか蓋然性とかいう命題値を第三の値として導入するから、これは多値論理學である。ただこれがあまり成功しなかつたのは、これらの樣相が束でなく形式的にきれいな結果が得られなかつたためである。いま命題が眞である確率をもつて命題の値とすると、眞は1、僞は0、蓋然は0から1までの間の數となる。そしてこれらの實數は和および積について明らかに束でない。從つて樣相論理學は多値論理學であるが束論的論理學とはならぬ。(註七)

しかるに先に述べた二つの非ラッセル論理學は束論的な多値論理學である。なぜならば非ラッセル論理學のうちブ

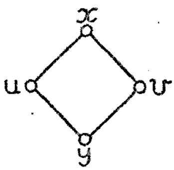
ラウエル論理學は排中律を否定する。排中律が成立せぬということは、命題の値が眞でないとき必しも僞であるとは限らないということであるから、結局眞でも僞でもない第三値が存することになり、ブラウエル論理學は多値論理學である。同様にバークホフ論理學では同時觀測の不可能な二つの記述aとbとにおいて、一方の値が觀測によつて眞なることが確められるや他方はもはや眞でも僞でもないのであるから、これも眞僞以外の第三値をとると考えざるを得ず、從つてバークホフ論理學は多値論理學である。この二つの束論的多値論理學により多値論理學の研究は新たに活氣を加えることとなつた。最初に述べたごとく、命題が眞僞の二値のほかに第三第四の値をとると考えても理論的には何らの矛盾をも生じないから多値論理學は理論的に可能であり、問題となるのはそのような論理學が實際的に必要であるか否かであつた。しかるに我々は様相論理學のほかに更に二つの束論的多値論理學の例を既に持つており、わけてもバークホフ論理學は現代物理學にその根據を有しているから、現代物理學を否認しない限りこれを否認することはできない。かくて我々は理論的にも現實的にも多値論理學が成立することを認めざるを得ない。

多値論理學は束論的論理學より一層普遍的な論理學である。ラッセル論理學は概念論理學のほかに命題論理學をも含むから、ブール論理學（從つてアリストテレスの論理學）より一層範圍の廣い論理學であつた。束論的論理學はそのラッセル論理學のほかに更に非ラッセル論理學をも含むから更に一層抽象化された論理學であつた。いまや多値論理學はその束論的論理學のほかに更に様相論理學のごとく束論的でない論理學をも含むから一層普遍的な論理學と考えることができる。

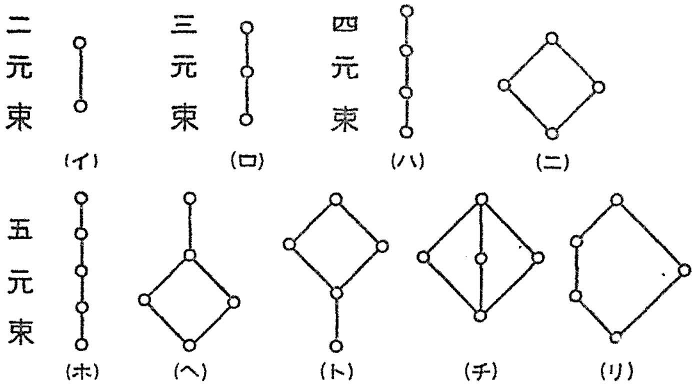
圖式法

これから多値論理學を理論的に構成するにあたり、論理學の方法につき一應反省しておく必要がある。一般に論理學もしくは數學を理論的に構成する方法は公理法である。公理法とは周知のごとく最初にいくつかの公理をかかげ、その公理から諸定理を演繹する方法である。この場合あらかじめ公理體系の無矛盾性が保證されている必要がある。

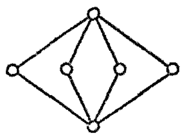
しかし一般には無矛盾性の證明は容易ではない。ただ對象が有限個の場合にはその對象をことごとく數えあげ、對象間の關係を一つ一つ調べることによつて無矛盾なるか否かを檢討できる。よつて對象が有限個の場合は、公理をかかげてしかる後對象を一つ一つ列擧檢討することにより公理の無矛盾性を證明するよりも、始めから對象を列擧した圖式をつくり、これをもつて公理に代える方が一層直接的でかつ直觀的に單純明瞭であることが多い。圖式法とはこの原理によつたもので有限個の對象に關し、その對象をことごとく列擧してそれらの對象間の關係を圖式的に表示することにより直觀的に理論を構成する方法である。從つて圖式法は有限集合にしか適用できぬという制限が



第一図



第二図


第三図

ある。しかし幸にして多値論理學で命題がとりうる値は三値とか四値とかいう有限數であるから、多値論理學に圖式法を用いることができる。

圖式法の一つの例は束論におけるハッセの圖式である。束の二つの異なつた元aとbとにおいて$a \leqq b$でかつ$a \leqq x \leqq b$なる第三の元が存在せぬとき、aを下に、bを上に書いて兩者を線分で結ぶ。例えば第一圖においてxはuの上にあるから$u \leqq x$で、かつ線分で結んであるから兩者の間に中間値はない。xとyではxはyの上にあるから$y \leqq x$であるが、兩者の間には中間値uがあるからxとyとを直接線分で結ぶことをしない。またuとvとの間には大小關係はない。束のすべての元をこの方法で結んだものをハッセの圖式という。そして$a \leqq x$かつ$b \leqq x$を滿足させる元xのうち最小のものを$a \cup b$として定義し、$x \leqq a$かつ$x \leqq b$を滿足させる元xのうち最大のものを$a \cap b$として定義する。第一圖の例では、$x \cup u$はxであり、$x \cap u$はuである。また$u \cup v$はxであり、$u \cap v$はyである。

さて束をかくのごとく圖式化するとき、元の數が有限個である束にいかなる種類があるかは簡單に圖示できる。二元束から五元束までの場合を第二圖に示した。すなわち二元束および三元束は各一種、四元束は二種、五元束は五種ある。なお六元束の場合には十五種となる。

第二圖の圖式はすべて束であり、L1ないしL3を滿足させることは言うまでもないが、L4およびL5が成立するか否かを檢討すると（各圖式においてすべての元につき一つ一つ檢討すると）、(イ)から(ト)まではすべて分配束であり、(チ)は分配束でないモヅル束、(リ)は分配束でもモヅル束でもない一般の束であることがわかる。またL6およびL7について檢討すると、各圖式において一番上の元は1、一番下の元は0となり、(イ)と(ニ)は正相補束であるが他は正相補束でないことがわかる。よつて正相補分配束（すなわちラッセル論理學）のもつとも簡單な例は(イ)の場合（すなわち二値論理學）である。また相補束でない分配束（すなわちブラウエル論理學）のもつとも簡單な例は(ロ)の場合（す

なわち三値論理學）である。分配束でない正相補モヅル束（すなわちバークホフ論理學）は五元束までにはない。束論の教える所によれば一般に束が分配束でないモヅル束であるためには、(チ)のごとき五元束をその部分束として含みかつ(リ)のごとき五元束を部分束として含まぬことである。また正相補束であるためには元の數が偶數であることが必要であるから、分配束でない正相補モヅル束（すなわちバークホフ論理學）のもつとも簡單な例は第三圖のごとき六元束（すなわち六値論理學）である。（註八）

多値論理學の圖式

ハッセの圖式は束論的論理學に用いて有效であるが、束論的でない一般的多値論理學には適用できない。また定理の成否を個々の元について檢討する際、心理的に見落しをする可能性がある。一般の多値論理學にも用いられ、かつ定理の檢討が見落しなく機械的にできる圖式として眞理函數圖式がある。（註九）

二値のラッセル論理學を眞理函數圖式により構成すれば第四圖となる。第四圖Aは否定の定義を與える。すなわち否定命題は原命題が眞なるとき僞で、僞なるとき眞であるものとして定義される。第四圖Bは連言、選言、含意、等値の定義を與える。第一欄には二つの命題aとbがそれぞれ眞および僞なる値をとるときの値の組合せ（みなで四通りある）を書き、第二欄以下にそれに對應する連言、選言、含意、等値の値を記してある。例えば連言はaとbとが共に眞であるときのみ眞で、その他の場合はすべて僞であるものとして定義される。選言以下も同樣である。

この定義圖式を用いれば諸定理の眞僞は圖式的に容易に計算できる。例えばL1第二式 $a \cap b = b \cap a$ は第五圖により、その値が常に眞であることを簡單に證明できる。第五圖の第一欄にはaとbの値の組合せをすべて書き、第二欄には第一欄に對應する $a \cap b$ の値を第四圖により記入する。第三欄には第一欄に對應する $b \cap a$ の値を第四圖においてaとbを入れかえたものにより記入する。第四欄には第二第三欄の値に對應する $a \cap b = b \cap a$ の値を第四圖の第五欄にもとづき記入する。しかるときは第四欄の値はすべて1となるから、この定理の常に眞であるこ

	否定
a	a′
1	0
0	1

第四圖

A

	連言	選言	含意	否定
a b	a∩b	a∪b	a≦b	a＝b
1 1	1	1	1	1
1 0	0	1	0	0
0 1	0	1	1	0
0 0	0	0	1	1

第四圖

B

a b	a∩b	b∩a	a∩b＝b∩a
1 1	1	1	1
1 0	0	0	1
0 1	0	0	1
0 0	0	0	1

第五圖

とが證明されたこととなる。かくのごとく、公理法によればその證明に非常に煩瑣な證明技巧を要する諸定理も、圖式法ではすべて機械的に簡單に證明できる。

かかる圖式計算によりL1ないしL7を檢討すると、これらの式の値はことごとく常に眞となることが容易に證明できる。從つて第四圖によつて定義された論理學は正相補分配束すなわちラッセル論理學である。

ブラウェル論理學の眞理函數圖式は第六圖によつて與えられる。命題のとりうる三つの値を1、0、tとし、1と0については第四圖がそのまま用いられ、第六圖ではtを含む場合のみが定義されている。この定義にもとづきL1ないしL7を圖式計算により檢討すると、L1ないしL5は常に眞であることが容易に證明されるから、この論理學は分配束である。しかしL6およびL7については矛盾律およびドモルガンの定理は成立するが、排中律および二重否定律は成立しない。從つて第六圖によつて定義された論理學はブラウェル論理學である。

バークホフ論理學の眞理函數圖式は第七圖によつて與えられる。命題のとりうる六つの値を1、0、s、t、u、 vとし、1と0については第四圖がそのまま用いられ、第七圖ではs、t、u、vを含む場合のみが定義されている。圖式中xおよびyはs、t、u、vを表わし、かつxとyは異なる元を表わすものとする。この定義にもとづきL1ないしL7を圖式計算により検討すると、L5すなわち分配律を除くほかはことごとく常に眞である。從つて第七圖によつて定義された論理學は正相補モヅル束すなわちバークホフ論理學である。

	否定
a	a′
t	0

第六圖 A

		連言	選言	含意	等値
a	b	$a \cap b$	$a \cup b$	$a \leqq b$	$a = b$
1	t	t	1	t	t
t	1	t	1	1	t
0	t	0	t	1	0
t	0	0	t	0	0
t	t	t	t	1	1

第六圖 B

	否定
a	a′
s	t
t	s
u	v
v	u

第七圖 A

		連言	選言	含意	等値
a	b	$a \cap b$	$a \cup b$	$a \leqq b$	$a = b$
1	x	x	1	0	0
x	1	x	1	1	0
0	x	0	x	1	0
x	0	0	x	0	0
x	y	0	1	0	0
x	x	x	x	1	1

第七圖 B

眞理函數

以上我々はラッセル論理學、ブラウエル論理學およびバークホフ論理學の三つについておのおのそのもつとも簡單な場合を多値論理學として圖式的に構成した。このほか第二圖の(チ)や(リ)に相當する種々の論理學が可能なことは明らかである。これらについて一般的に述べるために、眞理函數なる概念を導入す

る。いま命題がとりうる値の數がm個である多値論理學をm値論理學といい、そのm個の値を眞理値という。また獨立變數の數がn個ある函數 $f(a_1\ a_2 \cdots a_n)$ をn項函數という。次に函數 $f(a_1\ a_2 \cdots a_n)$ において $a_1\ a_2 \cdots a_n$ がすべて命題であり、函數f自身も命題であつて、かつ $a_1\ a_2 \cdots a_n$ の眞理値が確定すれば函數自體の眞理値も確定するとき、この函數を眞理函數という。

さてm値論理學においてn項眞理函數の種類はいくつあるであろうか。それは次のように簡單に計算できる。命題 $a_1\ a_2 \cdots a_n$ はそれぞれm通りの値をとりうるから、$a_1\ a_2 \cdots a_n$ がとりうる値の組合せの數は $k=m^n$ 通りある。このk通りの組合せに對し函數自體もm通りの値をとりうるから、可能な眞理函數の種類は m^k 通りとなる。

m^k という數は一般には莫大な數となるが、論理學的に重要なのは單項眞理數としての否定および二項眞理函數としての連言、選言、含意、等値の五つの眞理函數である。この五つの函數の意味は二値論理學の場合には古典的にはつきり定まつていて第四圖のごとく定義できるが、三値論理學以上の場合は莫大な數にのぼる眞理函數のうちどの五つを選んで否定、連言、選言、含意および等値にするか一義的には定まらない。この場合形式不變の原則を採用し、古典論理學の諸定理がなるべく多くそのまま一般の多値論理學においても成立するように五つの基本的眞理函數の定義を選ぶこととしても、それでもなお一義的決定はできない。試みにもつとも簡單な三値論理學について例示してみよう。

三値論理學

三値單項眞理函數は二十七通りある($k=3$, $3^k=27$)。いま連言および選言については第六圖Bの定義をそのまま用いることとし(從つてL1ないしL5は成立する)、否定のみを二十七通りの單項眞理函數の中から、L6およびL7の諸式をなるべく多く成立せしめるものという基準で選ぶと、第八圖に示す五通りのものが適當なものとして選ばれる。このうち初めの三つは1および0に關しては古典論理學と同じであるから、これを古典的否定といい、後の二つ

は否定により三つの値が循環されるから循環否定という。

	古典的否定			循環否定	
a	I	II	III	IV	V
1	0	0	0	t	0
0	1	1	1	1	t
t	1	0	t	0	1

第八圖

		古典的否定		
		I	II	III
L 6	排中律	○	×	×
	矛盾律	×	○	×
L 7	二重否定律	×	×	○
	ドモルガン律	○	○	○

○は成立　×は不成立

第九圖

古典的否定の場合L6およびL7の諸式のうちどれが成立しどれが成立しないかは第九圖に示されている。すなわちドモルガンの定理は三種の古典的否定においてすべて成立し、排中律は第一種においてのみ、矛盾律は第二種においてのみ、二重否定律は第三種においてのみそれぞれ成立する。このうち第二種は先に述べたブラウエル論理學であるが、第一種はこれと双對であるから、これも一種のブラウエル論理學と稱しうる。いずれにせよこの三種のうちどれを「否定」として定義するかは全く命名上の便宜の問題で、論理學的な優劣を定めることはできない。嚴密にはいずれも古典論理學的意味における否定でないから、むしろ全然別の名稱を用いる方が間違いがない。

循環否定においてはL6およびL7はそのままの形では成立しない。しかし三値であるから排中律および矛盾律の項を三つとして廣い意味の排中律および矛盾律とし、かつ三値であるから二重否定律のかわりに三重否定律をつくれば、次の三式となり、これらは循環否定においてことごとく成立し、やはりある意味において古典論理學に對し形式

不變である。

（3）排中律　$a \cup a' \cup a'' = 1$

（4）矛盾律　$a \cap a' \cap a'' = 0$

（5）三重否定律　$a''' = a$

次に三値二項眞理函數の種類は一萬九千六百八十三通りある（$k=3^2=9,\ 3^9=19683$）。この中から適當なものを連言、選言、含意、等値として選び出すと、幾百通りも可能である。例えば連言 $a \cap b$ は a と b がともに眞であるときのみ眞で他のときは眞でないものとして定義すると、これは a と b の値の組合せ（$k=3^2=9$）のうち a b がともに 1 である場合にのみ $a \cap b$ は 1 となり、他の八通りの場合は 0 もしくは t となるものと解されるから、連言の種類は二百五十六通り（$2^8=256$）も可能となる。ただし連言および選言について束をなすものは第六圖Bによつて定義されたものただ一通りしかない。このことはハツセの圖式により明らかである。この意味において連言および選言は三値論理學では一義的に決定される。しかし含意および等値は、束をなすという條件を加えてもなお八通りある。具體的に言えば第十圖の圖式中 x y z が 0 もしくは t であるものはすべて束の條件を滿たすから、その種類は八通り（2^3）となる。

		含意	等値
a	b	$a \leqq b$	$a = b$
1	1	1	1
1	t	x	x
1	0	y	y
t	1	1	x
t	t	1	1
t	0	z	z
0	1	1	y
0	t	1	z
0	0	1	1

第十圖

今後の課題

三値論理學の場合さえこれだけの複雑さをもつている。四値以上の場合眞理函數の種類は更に莫大なものとなり、事態が一層複雑となることは容易に推測できる。これらを統一的に見通しやすく一般化して述べることは今後の課題

であろう。

この小論では命題論理學のみを考究した。多値論理學における概念論理學を論ずることは次の課題であろう。數學基礎論で重要性を有する全稱命題および存在命題すなわち「すべてのXについて・・・である」、「・・・であるXは存在する」についての論理學はこの概念論理學の問題である。また多値論理學が數理哲學や認識論にいかなる影響をおよぼすかも今後の興味ある研究課題である。

（完）

註一　ブール論理學の代表的著述は次のものである。

Boole, G.: An Introduction of the Laws of Thought. London, 1854.

註二　ラッセル論理學の代表的著述に次のごときものがある。

Whitehead, A. N. & Russell, B.: Principia Mathematica, I. Cambridge, 1910.

Hilbert, D. & Ackermann, A.: Grundzüge der theoretischen Logik, 2 Aufl. Berlin, 1937.

註三　L1ないしL7の公理がラッセル論理學においてすべて定理として成立していることは、註二にあげた書を見れば明らかであるから、ここでは一つ一つ證明することを略する。

註四　形式論理學の束論的構成については次の書に述べてある。

Birkhoff, G.: Lattice Theory. New York, 1940.

註五　バークホフ論理學については、註四にあげたバークホフの著のほか次の論文がある。

Birkhoff, G. & Neumann, J. v.: The Logic of Quantum Mechanics. (Annales of Mathematics, Vol. 37, No. 4) 1936.

註六　ブラウエル論理學の束論的構成については註四にあげたバークホフの著に詳しい。ブラウエル論理學を束論以前の立場から說いたものとしてはハイティングの次の書が代表的である。最近我が國では黒田成勝氏がブラウエル論理學の強い主張者で

あるが、その立場も束論以前である。

Heyting, A.: Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie. Berlin, 1935.

澤田成勝：Aristotle の論理と Brouwer の論理に就いて。（科學，第18巻，第1號）昭和23年。

註七　様相論理學は次の書に詳しい。

Lewis, C. I. & Langford, C. H.: Symbolic Logic. New York, 1932.

註八　ライヘンバッハは次の書において量子力學の論理學を三値論理學として構成している。しかし彼の三値論理學は（ハッセの圖式よりみて當然のことであるが）分配束でありかつ正相補束でない。從つて彼の論理學は現實の量子力學と一致しない。

Reichenbach, H.: Philosophic Foundations of Quantum Mechanics. Berkeley & Losangeles, 1944.

註九　この圖式は二値のラッセル論理學を説明するためにヴイツゲンシュタインが次の書において始めて用いたという。

Wittgenstein, L.: Tractus Logico-philosophicus. London, 1922.

前號目次