空間と幾何学 (一)

田村祐三

I 空間概念の構成要素

1 「空間」という概念によって人々の理解するところのものはさまざまである。それに応じて、空間の論じ方、諸空間の分類の仕方もさまざまである。だが、そのようなすべての空間概念も、概念とその構成要素という観点からみれば、ある一つの（単純な？）要素概念と同一視されるか、あるいはそれら要素概念の複合とみなされるか、のいずれかである。そして、最も多くの成分を含む空間の複合概念は、三つの要素概念から成る。「拡がり」とその拡がりの諸部分（つまり、拡がりの様態であるさまざまな形態）の間の「質的関係」と「量的関係」とからである。それ故、これまで数学者や物理学者や哲学者によって考えられてきた諸空間は、これら三つのエレメントのいくつかあるいは全部を含むものである。例えば、プラトンの「コーラ」は「拡がり」そのものだけであり、ライプニッツの「空間」は距離の可能的関係の集合、すなわち「量的関係」だけの集合であるが、デカルトの「延長」やカントの「純粋直観」、ニュートンの「絶対空間」等は、右の三つのエレメントをすべて含むものである。このように、右の観点にもとづいてすべての諸空間は分類可能なのである。そして、この分類は、空間に関する諸問題、諸論争・対立（例えば、ニュートンあるいはクラーク対ライプニッツ、ラッセル対ポアンカレ、ニュートンあるいはカント対アインシュタイン等）を考える上で有効な見通しを与えてくれるであろう。例えば、この観点からみれば、ニュートンとアイン

空間とその上の幾何学＼三つのエレメント	拡がり	質的関係	量的関係
抽象空間と抽象幾何学	不確定な対象	不確定な関係	不確定な関係
直観的に了解可能な空間と直観幾何学	直観的に了解可能な拡がり	位相的関係	約束によって決まる量的関係
経験空間と経験幾何学	経験的拡がり	位相的あるいは位置的関係	測定手続きによって決まる量的関係

表　1

シュタインとの空間に関する対立点は、「量的関係」にあることがわかる（それにともなってある種の質的関係も関係してくることはもちろんであるが）。ニュートンは、物理空間の「拡がり」にはユークリッド幾何学を成立せしめるようなメトリックが本来的に具わっている、と考えたのに対し、アインシュタインは、そのようなメトリックは、物理法則とペアになってある種の約束のもとに成立する測定をまってはじめて決定される、と主張したのである。そこで、われわれは、以下空間と幾何学の問題を考察するに際しても、右の観点を有力な手がかりとして出発することにしよう。

2　右の三つのエレメントにどのようなものを対応させるかによって、さまざまな空間とその上の幾何学が成立する（その時、例えば「拡がり」に対して拡がりのないものが対応させられることも許される）。その中で最も包括的なものは、「抽象空間」とその上に成立する「抽象幾何学」であり、残りのものは各々この空間と幾何学の一つのモデルである。そこで、われわれはまずこの抽象空間と抽象幾何学について考察し、次いでそれの諸モデルのうち「直観的に了解可能な空間」とその上の「直観幾何学」、「経験空間」とその上の「経験幾何学」についてみる。あらかじめ、三つのエレメントとこれらの空間および幾何学のそれらとの対応を示せば、表1のようになる。この表で、一般的に空間は少なくとも拡がりと質的関係に対応する二つのエレメントを含み、幾何学は空間と等しいかより多くのエレメントを含む。ところで、二番目の直観的に了解可能な空間と直観幾何学を想定することに対し

て、ある人々（特に経験主義者）は強い反対を唱えるであろう。だが、Ⅳで示すように拡がりのある物理空間を考えるとすれば、この空間は是非とも必要なのである。カルナップ、ただし『空間』[1]の著者としてのカルナップのような例外もあるが、現代の科学哲学者のほとんどは、抽象幾何学（純粋幾何学）と経験幾何学（物理幾何学）だけを認め直観幾何学は認めない。しかも同時に拡がりのある物理空間を考えているのである。このことは認識論的に不正確である。もし彼らが右の立場を保持しようとすれば、物理空間を、ホワイトヘッドやラッセルらがしたように、ある経験的なものから論理的に構成しなければならないのであるが、その時そのような物理空間は拡がりをもたないのである。

さらに話を数学だけに限っても、直観の重要性はしばしば数学者自身によって語られてきたし[2]、またわれわれは現在、いったん失ったかにみえた幾何学と直観との結びつきを再び取り戻しているのである。つまり、ユークリッド以来の伝統である幾何学と直観との結合は、次第にめばえてきた直観への不信とともに弱まり、われわれの時代に至って公理主義の出現により完全に消滅したかにみえたのだが、実は数学はその時、そのような厳密化と同時にあの幾何学本来の対象の復活をも用意していたのである。すなわち、空間的直観を尊ぶトポロジー（位相幾何学）の出現である。今世紀に入ってようやく学問としての体系を整え始めたこのトポロジーは、空間的直観を大事にする点でいかにも幾何学らしい幾何学にみえるのだが、これはある意味で当然のことでもある。というのは、われわれの直観は、位相的関係に関して多くの場合確定した判断をくだすことができるからである。以上のような理由から、これまで漠然と想定されているにすぎなかった直観的に了解可能な空間を明確にしておくことは、十分意味のあることと思われるのである。

Ⅱ　抽象空間と抽象幾何学

3　ギリシャ哲学は数学の論理的性格に刺激されて論理を発見したが、この論理の発見は、逆に数学に論理的連関の究明を要求し、この要求は、ユークリッドに至り数学的諸真理が彼以前の誰れの試みよりも完全に一つの体系にまとめ上げられたことによって充たされた。(3) その時、この二つの学問は、演繹的体系化という目標を共有していたのである。だが、この時代から十九世紀に至るまで、二つの学問の間には一つの大きな相違もあった。それは、論理学は最初から不特定なものを対象としていたが、数学は特定のもの――数、量、図形等――を対象としていた、(4) ということである。それ故、ユークリッドも『原論』において、巻頭の定義によりある程度直観的に了解可能な特定の諸対象を与えているのである。ところが、このユークリッドの定義のいくつかは諸定理の証明において一度も用いられていない。人々はこのことを不思議に思い、ユークリッドは何故これらの定義を掲げたのかを問題としたが、確定的な解答は未だ不明のままであるようだ。しかしここで一つ確かなことは、幾何学的対象を了解するために訴えられた直観が、そのまま証明の過程にも一部入り込んでいるということである。公理として掲げられていなくとも、直観的に明らかとみなされた事柄、少なくともユークリッドにとってそう思われた事柄が証明に際して用いられているのである。

この直観への過度の信頼は十九世紀半ば頃まで続く。しかし、その後関数理論の進歩にともなって直観への不信が次第にめばえてきた。その口火を切ったのがヴォルツァノ、ヴァイエルシュトラスのつくったあらゆる点で接線をもたない連続曲線の例である。(5) これ以後いわゆる数学の病理学が始まり、直観は数学のあらゆる領域から追放され始める。このことは幾何学においても例外ではありえなかった。それまでに、クラヴィウス、ライプニッツ、ガウスといった人々によってユークリッドの公理系の不完全さが指摘されており、それに対してヘルムホルツ、メレー、ウーエルといった人々がそれの部分的修正を試みていたのだが、そのような一連の単発的な企てを背景としながら、ここに登場した直観の追放というモメントに、さらに非ユークリッド幾何学の発見による公理体系そのものの自覚と論理学の飛躍的発展という二つのモメントが加わって、ユークリッド幾何学の完全なる演繹的体系化が開始されたのである。

そして、その目標はパッシュ、ペアノの試みを経て、ヒルベルトの『幾何学の基礎』において一応達成された。ここにギリシャ以来、論理学と幾何学との間に残されていた見かけ上の相違だけは完全に消滅し、幾何学もまた特定のものを対象としてもたなくてもよいものになったのである。

4　数学は公理化されることによって二つの長所を獲得した。第一に、それは論理に関する閉体系として厳密なものとなり、第二に、特定の対象を問題とせず構造（ブルバキ）のみを問題とすることから、体系間の関係が明確になり理論的に実り豊かなものとなったことである。(6) このことを具体的に理解するために、一つの公理体系を例にとってその構造を調べてみよう。そのような公理体系――ただしユークリッド幾何学の公理体系――としては、ヒルベルトの体系のほかにヴェブレン、ハンティントンの体系等多くのものがあるが、ここでは最も有名なヒルベルトの体系をとりあげる。(7) ヒルベルトは、体系化において意識的にユークリッドの体系をまね、その完全化をはかったのであるが、このことは、彼が直観というものを大切に考え、『幾何学の基礎』をわれわれの空間的直観の論理的分析であると考えていたことから、当然のことであろう。(8) そして、そのことは後のわれわれの議論にとっても都合のよいことなのである。

幾何学の公理体系は、「論理学」を暗黙の前提として「陰的定義」と「公理」と「定理」とから構成されている。

①　陰的定義（implicit definition）によって幾何学の不確定対象の集合と不確定対象間の不確定関係が指定される。ヒルベルトの体系では三つの不確定対象と三つの不確定関係があり、それらは「点」、「直線」、「平面」そして「横たわっている」、「の間に」、「合同的」という言葉で仮りに表わされる。これらのものが体系で使用される論理語以外の基本概念である。（これらの基本概念の数を切りつめるということに関しては、ヒルベルトは右に述べた理由から保守的でユークリッドの用語をそのまま受け継いだのであるが、他の数学者の体系では、基本概念の数はもっと少なくなっている。(9)）基本概念のほかには、記述の経済のために線分、角、円、平行、連続等の派生概念が導入されるが、

これらはすべて基本概念と論理語によって定義されるものである。

さて、これらの概念は、すべて確定した意味をもっていない、つまり特定の対象や特定の関係を表わしていないという意味で不確定概念（未定義概念）である。だが、これら不確定概念の不確定性は、無制限にそうであるというわけではなく、解集合 $\{x : F(x)=0\}$ が方程式 $F(x)=0$ によって決定されるように、不確定概念の意味の範囲、つまりそれの表わしうる対象や関係の範囲は諸公理によって決定される。すなわち、不確定概念は一群の公理によって陰的に定義されるのである。（この陰的定義そのものには、フレーゲが批判したようなやっかいな哲学的問題がからんでいるのだが、ここではそれにはふれない。[10]）

② ヒルベルトの体系では公理は二十個ある。「結合の公理」が八個、「順序の公理」が四個、「合同の公理」が五個、「平行の公理」が一個、「連続の公理」が二個である。そして「点」、「直線」、「平面」という不確定概念の意味の範囲はこれら二十個の公理によって、「横たわっている」、「の間に」、「合同的」のそれは、各々八個の結合の公理、四個の順序の公理、五個の合同の公理によって決定される。

これらの公理の中で後の経験空間との関連で興味あるのは、連続の公理の一つであるアルキメデスの公理であろう。この公理が独立であるということは次のことを意味する。すなわち、地球上の尺度によって宇宙空間や原子内の距離を測定しうるということは、ア・プリオリなことでも他のある幾何学的定理から導かれることでもなく、実験的に検証されねばならない事柄である、ということを。従って、実験の結果世界が非アルキメデス的であったということもありえたのである。[11]

ヒルベルトの体系が意識的にユークリッドの体系をまねてあることから、両者を比較することによってユークリッドの公理系（公準十公理）の不十分さが明瞭になる。両公理系を比較して表示すれば、表2のようになる。この表から明らかなようにユークリッドの公理系では必要なものがかなり不足している。従って、ユークリッドの体系におけ

公理＼体系	結合の公理	順序の公理	合同の公理	平行の公理	連続の公理	注
ヒルベルトの公理系	I_{1-8}	II_{1-4}	III_{1-5}	Ⅳ	V_{1-2}	ユークリッドの公準4はヒルベルトの定理21に相当する
ユークリッドの公理系	公準1（上のI_1に相当）	公準2（ほぼ上のII_2に相当）	公理1（上のIII_2に相当）公理2（上のIII_3に相当）公理3, 4, 5, 6 公理7（公理8）	公準5（上のⅣに相当）公理9	公準3？	

表　2

る公理から定理の導出は、純粋に形式論理だけによって行なわれているのではなく、そこにはある種の直観が密輸入されているのである。

例1、第1巻命題1の証明中二円が点Γで交わることが言われているが、これが言えるためには連続の公理が必要である。(12)

例2、第1巻命題7の証明において「同じ側」が直観的に自明なもののごとく扱われているが、これに対して正確にはヒルベルトの定理8（これは結合の公理と順序の公理とから導かれる）とそれに続く定義が必要である。

例3、第1巻命題4および8の証明において「合同」ということを「重ね合わせる」（ユークリッドの公理7）という操作に限定してしまっている。

このほかにも、注意深く『原論』を読んでゆくとある種の直観に頼った証明に多く出くわすが、これはすべて右に示したユークリッドの公理系の不十分さに起因するのである。

③　以上述べたことから当然そうと予想されるように、公理体系は記号論理学を用いて表現できる（このことは、フレーゲが彼の立場からヒルベルトを批判した際、すでに部分的に行なっていることでもある(13)）。

例えばI_1は次のように表現できる。

$$(x)(y)\{P(x)\wedge P(y)\supset(\exists z)(G(z)\wedge L(x,z)\wedge L(y,z))\}$$

但し　$P(x)$：xは「点」である

$G(x)$：xは「直線」である

$L(x, y)$: x は y の上に「横たわっている」

さて、ここで注目すべきことは、ヒルベルトの体系において連続の公理を除いた残りの公理は、すべて第一階の述語論理学で表現できるということ、つまりそれらは第一階の公理系（ヒルベルト）[14]を形成するということである。表現の仕方はいろいろあるが、ヒルベルトの基本概念を忠実に表現するように記号化してゆくとすれば、右のものに

$E(x)$: x は「平面」である

$Z(x, y, z)$: y は x と z と「の間に」ある

$K(x, y)$: x と y とは「合同」である

を付け加え、さらに新たに登場する派生概念についてもそれに対応する述語記号を付け加え、同時に右のものとの関係を書き加えてゆくようにすればよい。その時、その関係も第一階述語論理学で記述できるのである。

例、$S(x)$: x は「線分」である

$$(x)\{S(x) \supset (\exists y)(\exists s)(\exists t)(\exists u)(\exists v)(\exists w)\ (G(y) \wedge P(s) \wedge P(t) \wedge P(u) \wedge P(v) \wedge P(w) \wedge L(s, x) \wedge L(t, x) \wedge L(w, x) \wedge$$
$$\sim L(u, x) \wedge L(u, y) \wedge \sim L(v, x) \wedge L(v, y) \wedge Z(u, s, w) \wedge Z(w, t, v))\}$$

派生概念についてはもっと簡単に次のような四項関係と六項関係によって処理してもよい。

$R_4(x, y, z, u)$: 端点をそれぞれ x, y 及び z, u とする二つの線分は等しい

$R_6(x, y, z, u, v, w)$: 角 xyz と角 uvw とは等しい

かくして連続の公理を除いたヒルベルトの公理系は、第一階の公理系、つまり数学基礎論で言う「初等幾何学」を形成する。初等幾何学は、幾何学の超数学的考察において中心的役割を果たすものと思われるが、そのようなものとしてタルスキーは、連続の公理の代りに「初等連続公理」を付け加えた初等ユークリッド幾何学の公理系（E_2）を実際につくってみせた。[15] そして、それが完全で決定可能であることを示したのである。

（以上述べたことから、公理化された体系とは、それの基本命題がいくつかの不確定概念と論理学の用語だけで記述できるものであり、またそういうものだけが公理化された体系と呼ばれるべきであるということがはっきりしたと思うが、このことは、当然ながら最近示されたいくつかの古典物理学の公理体系[16]についても、そこに現われている基本概念をさらに基本的なもので定義するというふうにしてゆけば、あてはまることとなのである。）

④　諸公理がすべて論理学を使って記述できれば、派生公理＝定理はこれらの公理から論理学の推論規則を用いて演繹できる。このことは、デカルトがそれまでの綜合的方法にあの解析的方法を付け加えた時のように、証明方法に関して新たな方法を提供することになる。つまり、この方法によれば、証明が複雑になる場合もあるが、他方最も機械的でかつ簡単な場合もあるのである。

例、ヒルベルトとアッケルマンの示した例――「異なる二点を通って、たかだか一本の直線が引ける」という前提から「異なる二直線は、一点以上を共有しない」という結論の導出。[17]

次に、公理からの定理の導出が論理学の推論規則に依存することから、論理学のセマンティカルな面に注目すれば、公理体系における数学的真理というものは、公理そのものが真偽に関して中立的であるのだから、まさに論理的演繹の中にしかないということがわかる。ここで、公理が真偽に関して中立的であるということは、そこで採用されている論理学に依存して公理のとりうる真理値の範囲は定まっているが、その中でどの真理値をとるかまでは決っていないということである。例えば、採用されている論理学が古典論理学であるとすれば、公理の真理値域は1 or 0であるが、これのどちらをとるかは未定である。そして、公理の値が1 or 0に応じて定理の値も1 or 0になることは、そこで採用されている古典論理学によって保証されているのである。通常、数学の依存する論理学は、このような古典論理学であるのだが、しかし古典論理学以外の論理学を数学が採用するということも可能なのである。事実、直観主義者は古典論理学とは異なる論理学に従う数学の存在を示した。[18]そしてこのことは、数学的真理の問題が、公理の真理

性からさらに推論規則の真理性の問題にまで掘り下げられたことを示しているのである。
幾何学の公理が真偽に関して中立的であるということは、見方をかえて言えば、それらは論理的真とはなりえないということである。(またついでに言えば、それらが分析的か綜合的かを問うことも明らかに意味をなさない。)ヒルベルトの示した諸公理は確かにこのようなものである。さらに、最初の不確定概念をいかにうまく選んでみても、公理をその論理的形式のみの故に真であるようにすることはできないから(なぜなら、そのような体系は、すべてヒルベルトの体系と同型であるから)、幾何学の公理は全く論理的真理とはなりえないのである。この意味で、幾何学が論理学に完全に含まれてしまうということは決してないであろう。そして、右の一群の公理こそ幾何学固有の構造を示すものなのである。(すでに述べたように、数学は特定の対象の構造から構造そのものを研究する段階に達したが、最近ではさらに一歩登りつめて、カテゴリーやファンクターの概念の下に、構造の集合そのものの構造を研究するところまできている。そして、ここには一般にメタ言語が含むと同じ哲学的問題が含まれているのであるが、ここではそれについてふれない。)
⑤　公理体系において特定の対象は二次的なものとしていったん退いたが、しかし新たにモデルとして再登場する。例えば、ヒルベルトの公理系のモデルとしては、数空間、直観的に了解可能な空間、物理空間といったものがある。そして、このようなモデルによって諸公理は有意味に解釈され、またそれによって公理の相対的無矛盾性、独立性、完全性、さらにそれがカテゴリカルであるかどうかが証明されるのである。
ヒルベルトは、彼の体系の無矛盾性を、実数空間のモデルをつくることによって算術の無盾矛性に帰着させることができた。そしてさらに算術の無盾矛性の証明のために数学基礎論に入ってゆき、いわゆる形式主義を打ち立てたことは周知のことである。だが、そこでヒルベルトが遂行可能であると信じていたあの壮大な見通しは、実は思い違いであったことをわれわれはゲーデルによって知った。(幾何学だけに関して言えば、すでに述べたように、連続の公

理にかえて初等連続公理を採用した体系E_2は、無矛盾で完全でしかも決定可能である。）ヒルベルトは、数空間のモデルによって、体系の無矛盾性のほかに平行の公理、合同の公理III_5そして連続の公理の独立性を証明し、さらに公理系Ⅰ〜V_1はカテゴリカルではないが、V_2を付け加えた全公理系はカテゴリカルであることを示した。そして、このような全公理を満足するモデルの一つは、実数を基礎にして構成された解析幾何学すなわちデカルト幾何学であり、他のモデルはすべてこれと同型である。このことは、デカルト以来の、直線上の点と数との対応すなわち数直線の考えを基礎づけるものとしても重要である。

リーマンやポアンカレは、ユークリッド空間の中に非ユークリッド幾何学のモデルをつくったが、このことも、非ユークリッド幾何学の無矛盾性がユークリッド幾何学の無矛盾性に帰着できることを示している。なぜなら、この時両者は、右の算術の場合と同様「形式的に相互翻訳可能」[19]だからである。この翻訳は、言うまでもなく意味に関する翻訳ではないが、適当な解釈の下で一方が真（偽）であれば他方も真（偽）になるという真偽の同順対応だけは保たれている形式的翻訳である。

例、図1。ここでは、最も簡単なF・クラインの双曲的幾何学モデルを用いているが、しかしクラインのモデルでは、本来、最初の空間がここで示すようなユークリッド空間である必要は少しもない。

5 最後にいろいろな幾何学の相互関係を簡単にみておこう。公理系に関しては、右に示したヒルベルトの公理系は容易にn次元にまで拡張できる。ユークリッド幾何学以外の幾何学の公理系では、射影幾何学とアフィン幾何学のよくととのった公理系があり、双曲的幾何学についても二次元の場合の公理系はヒルベルトが示した。[20] しかし、これ以外の非ユークリッ

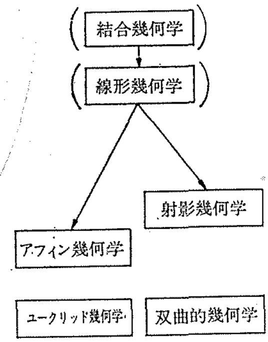
ユークリッド幾何学の命題 ⟷ 双曲的幾何学の命題

翻訳規則
円の内部 ⟷ 平面
円の内点 ⟷ 点
弦 ⟷ 直線

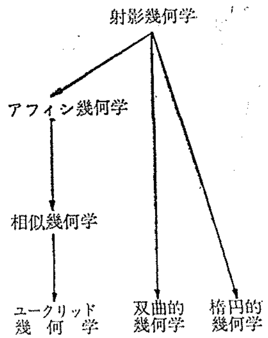
ユークリッド幾何学の命題：ある「円の内部」の「弦」に対して、その「弦」上にない「内点」を通りしかもその「弦」と交わらない「弦」は無数に存在する。

双曲的幾何学の命題：ある「平面」の「直線」に対して、その「直線」上にない「点」を通りしかもその「直線」と交わらない「直線」は無数に存在する。

図 1



a図．図中$\boxed{G_1}\rightarrow\boxed{G_2}$は，$G_1$の公理系にいくつかの公理を付け加えれば$G_2$になることを表わす



b図．図中$G_1\rightarrow G_2$は，G_1の中にG_2のモデルをつくることができることを表わす

図　2

ド幾何学については、よく組織だてられた公理系は知られていない（公理系が未だ知られていないものについては、モデルだけがあると考えればよい）。これらのいわゆる古典幾何学の間の相互関係を図示すれば、図2のようになる。

b図からわかるように、古典幾何学の中では射影幾何学が最も包括的で中心的役割を果たす。この射影幾何学は、一次元高いベクトル空間の中に構成された同型の射影幾何学を用いることによって、論理学とも密接な関係をもつある種の束（束の公理系も第一階の公理系である）と同じ構造をもつことがわかる。すなわち、n次元射影幾何学は既約なn次元可補モジュラー束なのである（バーコフ）。

例、射影幾何学の最も簡単なモデルは、互いに異なる七点の集合を全空間とし、この七点から重複を許さずに取り出した三点の組（それは全部で七通りある）を直線とするものであるが、このモデルに対応するハッセ図を示せば図3のようになる。

射影幾何学は、右に述べたことからまた、束論的分類による論理学の一つ、正可補モジュラー論理学[21]の数学的モデルでもある。この正可補モジュラー論理学は、今のところ経験的解釈の実例を一つももっていないが、もし将来そのような論理学が発見されれば、それは射影幾何学と構造を同じくする論理学なのである。

束論はアフィン幾何学とも密接な関係にある。[22]

束のほかに幾何学で重要な役割を果たす代数的概念は群（群の公理系も第一階の公理系である）である。古典幾何学においては、合同概念と密接な関連をもつ変換群が重要な働きをする。そして、F・クラインのエルランゲン・プ

ログラムに従って、幾何学を変換によって不変な図形の性質を調べる学問と考えれば、その変換のつくる群とその部分群によって幾何学が分類でき、図2のb図のような系列が得られることはよく知られていることである。（ここでついでに、後の議論との関係上次のことを注意しておく。すなわち、射影幾何学にいわゆるケイレイの計量による長

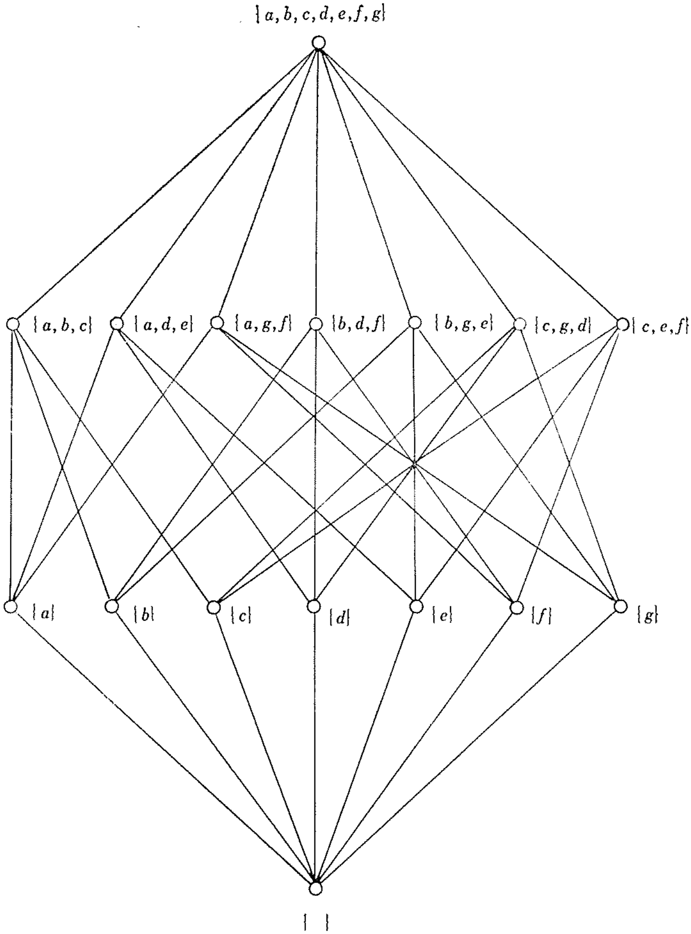


図 3

さや角を導入することによって、ユークリッド幾何学や双曲的幾何学、楕円的幾何学が構成されるが、その時この三つの計量幾何学の相違は、そのような計量の入れ方の相違によって生みだされるのである。）

幾何学のクライン的見方からすれば、右の古典幾何学のどれよりもより一般的な幾何学がある。それは、幾何学的図形の性質の中で、計量的性質や射影的性質がみな失われてしまうような連続的変形を受けても、なお保存されているようなものを研究することを目的とする、位相幾何学である。この位相幾何学がその上で展開されるところの位相空間は、非常に広範囲な領域を対象としてもつものであり、集合に少し条件を付け加えるだけで位相空間になる。そして、このような位相空間の中で、ある種の条件を充たすものについては計量化が可能なのであるが（Uryson-Tihonov の定理）、このことを出発点としてボルスクは、位相空間の公理は距離空間の公理の存在を保証し、逆に距離空間の公理は位相空間の公理を充たすというように諸公理を選んでユークリッド空間を（一般位相幾何学の立場から）基礎づけるという、興味深い研究を試みている。[23]

Ⅲ　直観的に了解可能な空間と直観幾何学

6　抽象空間のいろいろなモデルの中で、直観的に了解可能な空間（以下、略して直観空間と呼ぶ）と経験空間とが、本来われわれが空間と呼ぶところのものであろう。そこでまず、直観空間からみてみよう。

われわれは直観空間と視覚空間（および想像空間——この空間は視覚空間の想像として視覚空間よりもっと不確定なものである——）とを区別する。（ユークリッドが幾何学を、視覚空間ではなく直観空間で考えていたということは、『原論』の定義（第1巻、1、2、5）から明らかであろう。[24]）なぜなら、直観空間も視覚空間も「拡がり」をもち、従って両者はいわゆる重ね合わせることが可能であるのだが、しかし同時に両者には、「質的関係＝位相的関係」に関して決定的に異なる点が存在するからである。それは、視覚空間が拡がりの最小単位（知覚の量子、バークリ、

ヒュームの minimum sensibile）しかも不確定な最小単位をもつのに対して、直観空間は無限に分割可能であるということに起因するものである。ここで直観空間が無限に分割可能とは、直観空間が最小単位をもつということは直観的に了解不可能（つまり無意味）ということである（それ以上分割できない拡がりというものを、いったい誰れが直観的に了解しうるであろうか！）。

視覚空間が不確定な最小単位をもつということは、視覚空間の中に拡がりのない点、幅のない線、厚みのない面で幾何学を構成することができないことを含意する。従って、視覚空間の中に幾何学を構成するとすれば、不確定な拡がりのある点、不確定な幅のある線、不確定な厚みのある面を用いざるをえないが、しかしそのようなもので構成された幾何学は、ある質的＝位相的な関係に関しても不正確なものである（非常につまらない(トウリヴィアル)幾何学——幾何学とはほとんど名ばかりのもの——なら正確に構成可能であろう）。では、直観空間の中には、質的関係に関しても正確な幾何学を構成することは可能であろうか。それに答えるために、まず、われわれの直観空間とはどういうものであるか、ということからみてゆこう。

7　われわれは、まず、境界というものを直観的に了解していることに注意しよう。なぜなら、もしこの了解がなければ、拡がりの部分というものの了解はありえないことになるから。またわれわれは、ある拡がりがある拡がりを含むということも直観的に了解している。すると、第一に直観空間は全体として境界をもたない（unbounded）。なぜなら、われわれは境界を有する拡がりを、それを包含する拡がりなしには了解できないから。[25]（ルクレティウスの例の投げ槍の論法もこれと同種のものである。[26] ただし、彼は境界のないことと無限とを同一視したが、リーマンが注意したように両者は区別されなければならない。前者は拡がりの問題に属し後者は量の問題に属するのである。[27]）このことと直観空間は最小単位をもたないということから、直観空間の中の拡がりの境界は、拡がりや幅や厚み等をもたないということが言える。第二に直観空間は連続体である。なぜなら、直観空間の中の任意の拡がりE_1に含まれる

任意の拡がりE_2を考えると、E_1とE_2との境界は一つしかないから、E_1に含まれるかE_2に含まれるかのどちらかであって両者に含まれるということは了解できないから。第三に直観空間は三次元である。なぜなら、直観空間においてある任意の拡がりRはある拡がりSによって、Sはある拡がりLによって、Lはもはや拡がりをもたないあるPによって境界づけられかつPはどんな境界ももたない。故に直観空間は、ポアンカレあるいはブラウワー・ウリゾーン・メンガーの次元論によって三次元である。そして、三次元の拡がりR、二次元の拡がりS、一次元の拡がりLをそれぞれ立体、面、線と呼び0次元のPを点と呼ぶ。

以上から、直観空間が「境界のない三次元連続体」であることが明らかになった。われわれが直観的に了解可能な空間とは、実はこのようなものであったのである。この空間に適当な位相を入れることは明らかに可能であるから、この空間は位相空間になる。そしてさらに適当な概念を導入してゆくことにより、この直観位相空間の上に位相幾何学が構成できる。（一八九七年、ラッセルは、カントの問題をユークリッド幾何学から射影幾何学にまでさかのぼることによって解こうとしたが、(28) われわれはさらに一歩進めて位相幾何学までさかのぼるのである。）

また、右に述べたことから、線（ただし重複点をもたない開曲線）の切断（デデキントの）を考えると、それが実数の切断に対応していることは明らかであろう。(29) 従って、線の点と実数x、面の点と実数の順序対(x, y)、立体の点と実数の順序組(x, y, z)とを一対一に対応させることができる。故に、直観空間に座標付け、つまり番地の割り当てができる。

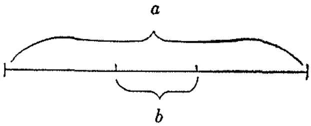
8　次に、直観空間における「量的関係」について検討する前に直観空間の視覚化ということについて述べておこう。

われわれは幾何学を考える時、実際には紙の上に鉛筆で書かれた図形や黒板の上にチョークで書かれた図形、つまり拡がりのある点や幅のある線等から成る図形を用いている。このことは、一見、視覚空間を利用しているようにみ

える。しかし、右に述べたように視覚空間はある種の位相的不確定性をもつ。それでは、われわれは実際にはどのような空間を用いて幾何学を考えているのであろうか。

視覚空間も直観空間と同様「拡がり」をもち、またその拡がりの位相的関係についても、右に述べた不完全さを除けば、すべて直観空間と同様のことが成立する（視覚空間における拡がりの大きさの限界に関しては、想像空間を加えて考えればよい）。このことから、視覚空間と直観空間とは、不完全ながらいわば重ね合わせることができる。従って、われわれは拡がりのある点や幅のある線等を直観空間のそれらとして、不完全ながら代用できる。そこで、視覚空間の点や線等がこのように直観空間のそれらの代用物とみなされる時、その空間を「視覚化された直観空間」と呼ぶことにしよう。すると、われわれが実際に幾何学を考える時用いている空間は、このような視覚化された直観空間であることがわかる。そして、この視覚化された直観空間においては、その中の諸図形は直観空間のそれらとみなされているのであるから、それらが不完全な表現であるにもかかわらず右の位相的不確定性は生じず、従って、実際に幾何学を考えるにはこの空間で十分間に合うのである。

9 質的関係＝位相的関係に関しては、直観は多くの場合確定した判断をくだすことができるが、これに対して「量的関係」についての直観的判断は、図4のような場合を除いて一般に不確定である。この不確定性は、量的関係についての直観的解釈が一般に全く不確定であることに由来する。幾何学で基本的な量的関係の概念は「合同」であるが、今図形F_1と図形F_2とが合同であるという時、F_1とF_2とが同種の図形（線分と線分、三角形と三角形といった）に属するということ以上に、それらが合同であると直観的に判断する確定した基準はないのである。しかし、通常はユークリッド流に、例えば線分S_1と線分S_2とは、どちらかを不変のまま（ただし、このことについては、ユークリッドは何も要求していない）移動させて両端がぴったり一致するように重ね合わせられる時、



aはbより大きい

図　4

等しいとする。この解釈の下では、まず、視覚空間の中には等しいものは決して存在しないことになる。なぜなら、一致させられるべきS_1とS_2の端点がすでにあいまいなものであるから。次に、直観空間の中では、等しい線分が存在することだけは直観的に了解できるが、しかし具体的にどれとどれとが等しいかは確定しない。S_1とS_2のどちらかを不変のまま移動させるといっても実際に移動させるわけではないから（この場合、物差しやコンパスを用いて比較するとすれば、それは経験幾何学に属する事柄となる）、離れた図形S_1とS_2とが等しいかどうかは、離したままで比較して直観的に判断するほかはないのであるが、その時その判断は、人によってまた同一人物においてもさまざまな条件によってゆれ動くであろう。従って、その場合、整合的な量的関係を成立させようとすれば、どれとどれとが合同であるかは、右の解釈の下に直観的判断が許す範囲内で、あらかじめ約束によって決めておかねばならないであろう。しかし、そのようにして合同な図形を定めたとしても、右の合同についての解釈がすでに一つの解釈にすぎないのであるから、その合同関係も唯一のものであることにはならない（右の合同解釈だけを唯一のものとすることは、後に述べる[16]通常の物差しだけを唯一の物差しとするのと同じ独断的主張である）。実際、直観空間における合同関係は、それが同種の図形間で成立しかつ合同の公理を充たすようなものであれば、どのようなものであってもかまわないのである。従って、直観空間において、最初に同種のどの図形とどの図形とを合同とみなすかは、全く約束の問題にすぎないことになる。故に、例えば図5の線分S_1、S_2、S_3はすべて等しいとあらかじめ決めておくことも可能なのである。

以上のことからわれわれは、合同関係によってメトリックを導入することにより、直観空間の中に任意のメトリックを入れることができる、と結論しうる。つまり、直観空間という連続体にはもともとそれ固有のメトリックというものは具わっていないのであり、直観空間のメトリックは、われわれが後から約束に従って自由に入れたところのものなのである。

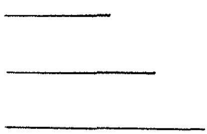
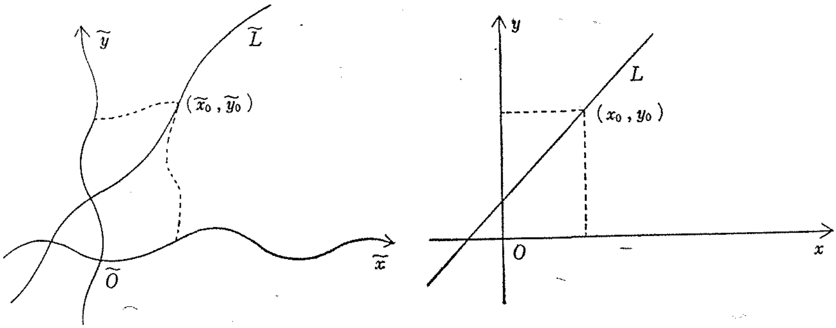

S_1 S_2 S_3

図　5



平面II　　図 6　　平面I

10 さて、次にいよいよこれまでに明らかにした直観空間の中に、ヒルベルトの公理系のモデル（直観幾何学）を構成することを考えてみよう。その前に準備として次のことを述べておこう。すなわち、直観空間上の幾何学の構成において、最初にどのような部分空間（図形）を平面や直線と定めて出発すべきかということにはかなりの自由度がある、ということを。[30] 実際、球面から一点を除いた面と同相でかつ直観空間を二つの領域に分けるような面であれば、どんなものでもそれを最初に平面と定め、また、その平面に含まれかつ両端のない線分と同相であるような曲線すなわち重複点のない開曲線であれば、どんなものでもそれを最初に直線と定めて出発することができるのである。（従って、ユークリッドのあの不器用な直線と平面の定義は（第1巻、4、7）、実は不用なのである。）このことは次のように考えればすぐわかる。ここでは図示の簡単な直線の場合を示すが（図6）、平面の場合も以下と同様にすればよい。さて、今平面I上のLを直線とみなしてある幾何学が構成されているものとする。そして、平面IIは平面Iを連続的に変形したもので、しかも平面IとIIの各点は一対一対応を保っているものとする。つまり、平面IとIIとは同相である。すると、これからただちに位相的関係については両平面上で全く同じことが成立すると言える。次に、平面IとII上の解析幾何学を考えれば両者は変数$\tilde{x}$（x）、$\tilde{y}$（y）をx（$\tilde{x}$）、y（$\tilde{y}$）に置き換えるだけで全く同じものになるから、量的関係についても両平面上で同じことが成立する。従って、両平面

上には同じ幾何学が構成できる。ということは、最初にLを直線とみなしても$\tilde{L}$を直線とみなしても全く同じ幾何学が構成できるということである。（このことはまた、幾何学を考えるにはいわゆる「下手（へた）に描かれた図形[31]」でも十分であることを示している。）

それではまず、視覚化された直観空間を考え、その中で右に述べたようなある適当な面および線をそれぞれ平面および直線と定めよう。すると、直観空間の命題として解釈された結合の公理を直観が受け入れることには、何の問題もないであろう。（すでにこれまで述べてきたことから明らかと思われるが、位相的公理と量的公理とが混在しているヒルベルトの公理系のなかで、直観空間の命題として解釈された位相的公理については、直観はそれを明確に了解して受け入れるのであるが、量的公理については、直観はそれによって規定されるという仕方で受け入れるのである。）順序の公理については、全体として境界のない直観空間において、境界のないままにしておけば、これも問題なく受け入れられる。合同の公理も問題はないと思う。次に、一つとんで連続の公理についても、直観空間は連続体であったから問題はない。さて、それでは平行の公理についてはどうであろう。まずこの公理を直観的に了解しうるように言いかえれば、次のようになる（図7参照）。視覚化された直観空間の平面上に一つの直線gとg上にない一点

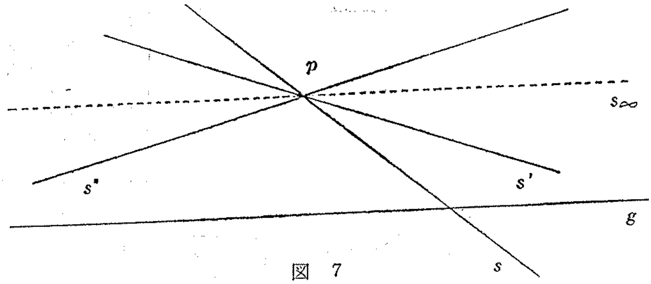


図 7

pを定める。pを通る直線sは最初図のような位置にあるものとする。このsをpを中心にして回転させると、sとgとの交点は向って右側に無限に遠ざかる。その極限のsを漸近線と呼ぶことにすれば、sが漸近線の位置に来た時sとgとの交点が左側の無限遠に出現する、というのが平行の公理の直観である。さて、この直観は拡がりの無限遠の境界にかかわっている。ところが、われわれの直観空間は全体として境界のないものであった。ということは、こ

の無限遠点にかかわる直観は、われわれの直観的了解を遥かに超えたものであるということになる。そこで、そのような場合には、われわれは、それが論理的に無矛盾で、しかも直観的に了解可能な範囲内で直観に反する事柄を帰結しないような主張であれば、これを受け入れるということにする。すると、平行の公理はこの条件を充たすから、われわれはこの公理もまた受け入れることができる。

以上、ヒルベルトの全公理を検討した結果、視覚化された直観空間の中には直観ユークリッド幾何学が構成できる、ということが明らかになった。

ところで、すでにプロクロスは、図7において g の左側に新たに交点が出現するまでには s をさらに回転させなければならない、ということも可能であることを指摘したそうである[32]。これはまさに非ユークリッド幾何学（双曲的幾何学）の公理である。この公理を右の理由にもとづいて受け入れれば、われわれは視覚化された直観空間上に双曲的幾何学のモデルをつくることができる。さらに、無限遠点を付け加え、g 上を右側にどこまでも進んでゆくと遂には出発点に戻って来るというふうにして、平行線は一本も存在しないという公理を採用すれば、やはり右の理由にもとづいて、今度は楕円的幾何学のモデルを直観空間上につくることができる（この時は空間が閉じてしまうことから、順序の公理も変ってくる）。従って、これらのことからわれわれの直観空間は、その上にユークリッド幾何学も非ユークリッド幾何学も構成できるという意味で、ユークリッド的でも非ユークリッド的でもないと結論できる。

この結論はまた、次のようなリーマン的アプローチによっていっそうはっきりと確認される。リーマンによれば、いろいろな計量幾何学の間の相違は量的関係の相違、つまりメトリックの入れ方の相違によって生じる[33]（ここで同時に、4の⑤で与えておいた注意を思い出していただきたい）。ところで、われわれの直観空間は、7で示したように座標付けが可能であり、また9で示したように任意のメトリックを入れることが可能であった。そこで今、視覚化された直観空間の平面に、まず図8のようなデカルト座標（座標は必ずしもデカルト座標である必要はない）を入れ、

次いで平面上の任意の近接した二点 $P_1\ (x,\ y)$ と $P_2\ (x+dx,\ y+dy)$ との距離を $ds^2=dx^2+dy^2$ で定義する。するとこの平面は明らかにユークリッド平面になる。次に、座標はそのままにしておいてP_1とP_2との距離だけを

$$ds^2=\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\left\{(1+y^2)dx^2-2xydxdy+(1+x^2)dy^2\right\}$$

で定義し直せば、同じ平面は今度は楕円的平面になる。そして、この場合の測地線はユークリッド平面の直線と同一の図形である。(34)（従って、ユークリッド幾何学の例えば三角形は非ユークリッド幾何学の三角形ともなりうるのであり、さらに三次元の適当なメトリックを入れることによって、視覚化された直観空間内の任意の同一図形を同じ名前で両幾何学において用いることも可能なのである。(35)）同様にして、同じ平面を、平面領域に制限をつけてだが、双曲的平面にすることもできる。(36) 従って、これらのことから、われわれの直観空間はユークリッド的でも非ユークリッド的でもないということが再び言えた。

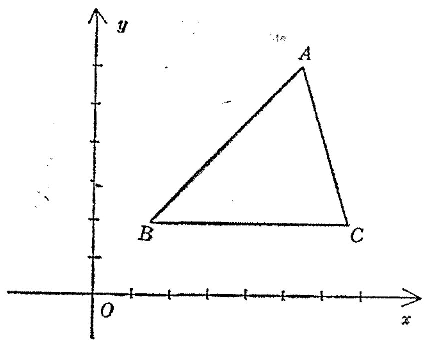


図　8

11　直観的に了解可能なものにも、それを了解する仕方からみれば、二種類ある。端的に了解可能なものと推理の助けを借りてはじめて了解可能なものとである。位相的関係の多くのものは端的に了解可能であるが（例えば、すでにみたヒルベルトの公理系に含まれているようなそれら）、しかし推理の助けを借りなければ明確に了解し難いものもまた多くある。例えば、直線のこみいった構造（ここでついでに言えば、点と線に関するあのゼノンのパラドックスは、それらを集合論（測度論）的に取り扱うことによって解消すると思う(37)）とか、ヴァイエルシュトラスの集積点定理のようなもの、あるいはペアノ曲線やすべての点が重複点である曲線や三国が境界のすべての点で接するように分割した地図等の極限図形に関する事柄である（ただし、これらの例のいくつかは次の了解不可能なものの部類に入

れてもかまわない)。

ところが、このように直観的に了解可能なものの範囲は、言うまでもなく数学の広大な領域からみれば非常に狭いものである。数学にはわれわれの直観的了解を超えた事柄が非常に多い。例えば、すでに述べたような無限遠の境界に関する事柄がそうであるし、四次元以上の空間に関するすべての事柄がそうである。従って、例えば、図9のような三次元ユークリッド空間内のクローバ型ノットを、四次元空間内でアイソトピックな運動によってリングに変形しうることは、知的な推理によれば実に簡単に理解できるのだが（その時、例えばライヘンバッハがしたように、四番目の次元を色で代用するやり方が手っとりばやくてわかりやすいであろう[38]）、直観的には決して了解できないのである。そして、このような観点からみるならば、直観は、矛盾なしに思惟しうる広大な数学の領域を、直観的に了解可能（あるいは構成可能）な狭い数学の領域へと制限する契機であることがわかる[39]。

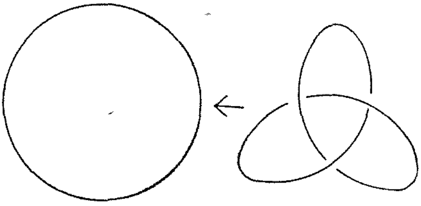


図 9

12 最後に、直観幾何学の命題はア・プリオリかア・ポステリオリか、また分析的か綜合的か、ということについて考えてみよう。ここで、ア・プリオリな命題とは、その命題が述べている事柄を知っていると正当に主張するために、どんな知覚経験をも必要としないような命題であり、これに対してア・ポステリオリな命題とは、その命題が述べている事柄を知っていると正当に主張するためには、ある知覚経験を必要とするような命題であるとする。そして、そのような命題について、それの真偽を知るためには、その命題が述べている事柄の意味を理解するだけで十分な場合に、その命題は分析的であり、それだけでは不十分な場合、つまり第三の何か（tertium quid）を必要とする場合に、その命題は綜合的であるとする（この定義は、もちろんクワインの指摘したように、分析的と綜合的との完全な区別を与えるためのものとしては不完全であるが、しかしわれわれのここでの議論のためだけのものとしてであれば十分で

ある)。すると、直観幾何学の命題はア・プリオリで綜合的である（ただし、ここで命題とは大部分の基本的命題すなわち公理や定理のことである。もちろんすべての可能な幾何学的命題を考えれば、その中には「三角形は図形である」という命題のように、分析的なものもあることは言うまでもない）。なぜなら、われわれは、その命題の述べている事柄を知っていると正当に主張するために、どんな知覚経験も必要としないし、また、直観幾何学は直観空間の中に構成されたものである故、それの基本的命題が真であるかどうかを知るためには、その命題に含まれている個々のことばの直観的意味および結合の仕方を了解するだけでは不十分であって、直観的構成による了解という第三のものが必要であるから。

ここでついでに述べておくと、経験幾何学の基本的命題がア・ポステリオリで綜合的であることは明らかであろう（知覚経験が第三の何かである）。また抽象幾何学の場合についてはすでに検討しておいた（4の④）。

（1） Carnap, R.: *Der Raum.* この本の中で、彼は三種類の空間、すなわち formaler Raum, Anschauungsraum, physischer Raum を認め、物理空間は直観空間を前提していると考える。大森荘蔵教授も同様の考えを表明しておられる。ただし、直観空間を「経験的空間についてさまざまな空間的関係や図形を語るために前提されねばならない概念組織があり、その概念組織によって語られた経験空間だと解する。」（「論理と世界」、『論理学のすすめ』（筑摩書房）二六ページ。）

（2） 幾何学の徹底的な公理化を試みたヒルベルト自身が、同時に幾何学における直観の重要性を語っていることは注目すべきである（ヒルベルト、コーンフォッセン『直観幾何学』芹沢正三訳（みすず書房）i～iiページ参照）。また、F・クラインの空間直観に対する考えも参照されたい（『最近の幾何学研究についての比較研究』註Ⅲ、寺阪英孝・大西正男共訳（共立出版））。

（3） Cf. Szabó, Á.: "Greek Dialectic and Euclid's Axiomatics," *Problems in the Philosophy of Mathematics,* edited by I. Lakatos.

（4） 例えばプラトン『国家』第六巻 510c 参照。ついでに言うと、幾何学が図形すなわち限定された拡がりのみならず、拡がりそのものをも対象とするようになったのは、リーマンからであろうか。

(5) 例えばH・ハーン『直観の危機』（邦訳は林雄一郎訳編『数学と論理と』（東京図書）に収められている）参照。

(6) Cf. Carnap, R.: op. cit., S. 8.

(7) テキストとしては、P・ベルナイスのサプルメント付きの改訂版（Ⅷ版）*Grundlagen der Geometrie* を使用したが、邦訳（中村幸四郎訳（清水弘文堂）のものと寺阪英孝・大西正男共訳（共立出版）のものとがある）にも大変お世話になった。

(8) Op. cit., S. 1.

(9) 例えばヴェブレンの体系では、基本概念は「点」、「の間に」、「合同的」の三つであり、ハンティントンの体系では「球面」、「を含む」の二つである。

(10) Cf. Frege, G.: *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic.*

(11) ヒルベルト『公理的思考』中村幸四郎訳（これは右に紹介した『幾何学基礎論』の中に一緒に収められている）二二三ページ、静間良次訳（世界の名著66、中央公論）一九八ページ参照。

(12) これは、最初、ライプニッツによって指摘されたと言われている。（*Die philosophischen Schriften von G. W. Leibniz,* herausgegeben von C. I. Gerhardt, Ⅶ, S. 166.）

(13) Op. cit., pp. 83~90.

(14) ヒルベルト、アッケルマン『記号論理学の基礎』伊藤誠訳（大阪教育図書）一一七ページ。

(15) Tarski, A.: "What is Elementary Geometry?", *The Axiomatic Method,* edited by L. Henkin, P. Suppes and A. Tarski.（これは *The Philosophy of Mathematics,* edited by J. Hintikka. の中にも収められている。）なお、初等双曲的幾何学については Szmielew, W.: "Some Metamathematical Problems Concerning Elementary Hyperbolic Geometry," *The Axiomatic Method.* および Schwabhäuser, W.: "On Completeness, Decidability, and Non-Definability of Some Notions of Elementary Hyperbolic Geometry," *Logic, Methodology and Philosophy of Science,* edited by E. Nagel, P. Suppes and A. Tarski. を参照されたい。

(16) Cf. *The Axiomatic Method,* Part Ⅱ.

(17) 前掲書一一四~一一五ページ。

(18) 直観主義の立場からの幾何学については、例えば Heyting, A.: "Axioms for Intuitionistic Plane Affine Geometry," *The*

Axiomatic Method. を参照されたい。

(19) Cf. Nagel, E.: *The Structure of Science*, pp. 249～253.（『科学の構造2』松野安男訳（明治図書）一二五～一三一ページ参照。）

(20) Op. cit., Anhang Ⅲ.

(21) 杉原丈夫「命題論理学の系統的分類」（科学哲学5、理想社）参照。

(22) Cf. Jónsson, B.: "Lattice-Theoretic Approach to Projective and Affine Geometry," *The Axiomatic Method.*

(23) Borusk, K.: "Grundlagen der Geometrie von Standpunkt der Allgemeinen Topologie," *The Axiomatic Method.*

(24) T・L・ヒース『ギリシャ数学史Ⅰ』平田寛訳（共立全書）一七六ページも参照されたい。

(25) これと同様の考えをカントも述べている。ただし、カントもまた、次のルクレティウスと同じく、境界のないことと無限とを同一視している。三宅剛一『学の形成と自然的世界』（みすず書房）三四六ページ参照。

(26) 『物の本質について』樋口勝彦訳（岩波文庫）五三～五四ページ。

(27) 『幾何学の基礎をなす仮説について』菅原正巳訳（清水弘文堂）三六ページ、近藤洋逸訳（世界の名著65、中央公論）二九九ページ。

(28) *An Essay on the Foundations of Geometry.*

(29) デーデキント『数について』河野伊三郎訳（岩波文庫）二十ページ参照。

(30) 大森荘蔵「空間について」（科学時代の哲学3、培風館）五五～五六ページ参照。

(31) これが badly-drawn figure (Reichenbach, H.: *The Philosophy of Space & Time*, p. 3.) の問題に対する最も正確な解答であると思う。

(32) H・ワイル『空間・時間・物質』内山龍雄訳（講談社）一〇九～一一〇ページ参照。

(33) 前掲書。

(34) 常にこうなるとは限らない。注の(36)参照。

(35) 大森荘蔵「空間について」五八ページ参照。

（36） 距離を

$$ds^2=\frac{1}{(1-x^2-y^2)^2}\left\{(1-y^2)dx^2+2xydxdy+(1-x^2)dy^2\right\}$$

で定義すると、円 $x^2+y^2=1$ の内部は双曲的平面になる。また、距離を

$$ds=\frac{1}{y}\sqrt{dx^2+dy^2}$$

で定義すると、$y>0$ なる領域は双曲的平面となり、しかもこの時、測地線は $(x-k)^2+y^2=R^2$（但し k, R：ある定数）の上半円で表わされる（Cf. Grünbaum, A.: *Geometry and Chronometry in Philosophical Perspective*, pp. 16～17.)

（37） Cf. Grünbaum, A.: *Modern Science and Zeno's Paradoxes*, Chap. Ⅲ.

（38） Reichenbach, H.: *The Philosophy of Space & Time*, pp. 281～283.

（39） Cf. Martin, G.: *Immanuel Kant*, S. 29.『カント』門脇卓爾訳（岩波書店）三四ページ参照。

（未完）

（筆者　京都大学文学部〔哲学〕研修員）