哲学研究

第五百五十二号

第四十七巻
第十冊

普遍概念としての多様体

澤口昭聿

一

アナリシスによる論証は(1)「定義」によるものである。これによって近代数学は古代数学の論証方法を超克した。従ってその定義がよって立つべき普遍概念が探究されなければならない。一般に近代数学は十九世紀に至って独自の論理を見出す。かくて十九世紀において新たに形成された基礎概念こそその普遍概念であるであろう。それには少くとも二つあると考えられる。第一は集合概念であり、第二は多様体である。両者は関係はするにしても双互に独立である。そこで、多様体の形成史を通って、それが数学と数学的物理学の普遍概念としての役目を充分に担うものなることを論じたいと思う。このような課題の場合、多様体の原初の姿が求められなければならない。われわれは十九世紀中葉の数学者リーマンの多様体を再吟味しなければならないであろう。リーマンについては論ぜられる機会が多く、周知のものであるが、現代の見地を入れずに接近することが必要である。現在、多様体は抽象的に定義されて居り、その抽象の度合は高まるばかりである。十九世紀の多様体ははるかに物理的であって、それから分離、脱却することができないのである。そこでまず多様体一般に関して彼の『幾何学の基礎に横たわる仮説について(2)』を虚心に読むこ

とにしよう。

彼は序論で「多重延長量」(die mehrfach ausgedehnte Größe) の研究が今迄全くなされていなかったことが、幾何学の基礎が解明されなかった所以であると述べている。幾何学の基礎とはいうまでもなくユークリッド幾何学乃至非ユークリッド幾何学の公理系を意味する。かかる綜合的方法自体の根底は多重延長量の概念の究明を以てなされるべきであるというのである。従って多重延長量が普遍概念として探求されていることは明らかである。次の第一章は「多重延長量の概念」と題され、更に第二章で計量の問題が論じられている。この二章がリーマンの多様体論の核心である。

第一章に接してまず実感されることは現代の多様体の概念構成と相当の開きがあることとである。リーマンの出発点は伝統論理学的であって、一般概念（内包的）を想定し、それの「外延」を考え、その外延を多様体と呼び、二種に分ける。即ち外延が分離的の場合と連続的な場合とである。分離多様体は集合と大差ないであろう。そしてそれは「要素」の集まりと見做される。連続多様体が重要であるが、その構成要素は「点」と呼ばれ、それを分析することで結局「多重延長量」なるものに到達する。ここまでで想定されているものは唯、連続的な一つの対象であるということのみである。連続性は流動によって捉えられているから最も広義の運動が考えられていると思わなければならないであろう。最初に概念が想定されていることは、点が統一され、その統一が予め与えられていることを意味している。そのとき次の二点が問題となるであろう。第一は「多重延長量」なる概念の生産であり、第二は多様体における位置規定を量規定に還元することである。つまり次元の導入と、座標の決定である。次元の導入は運動学的に行なわれる。われわれの直接認識する運動は元来一次元的である。それは時間の一次元性による。まず一次元多様体の概念を定める。一次元多様体が他の一次元多様体に連続的に移行するとすると、これら全体は二次元多様体を作る。このようにして高次元多様体が順次に作られる。これらのことはむしろ平凡な事実であるが、われわれの運動の認識が一

次元的であるという制約からする多様体の当然の制限である。この場合多様体全体が到る所同じ次元になるとは語られていない。そしてリーマンは変動（Veränderlichkeit）なる表現を用い、$n+1$次元の変動が一次元とn次元の変動に分解されると述べている。従って次元の決定は最も広義の運動を制限してわれわれの扱える運動（これも充分広義）に限定したことを意味する。

さて、次の座標の決定は次元の導入と相関的に行なわれている。これも原理は単純である。変域が与えられている変動をそれより低次元の変動と一次元の変動とに分解する。それには「与えられた多様体の中で位置の連続函数、しかも多様体の一部分で恒等的に定数とならぬものを仮定する。かかる函数が一定値をとるような点の全体は常に与えられた多様体より次元の低い多様体を作る。この多様体は函数値を変えると連続的に相互に移行する。従ってその中の一つから他のものが出現すると考えて差支えない。更に一般的にいえば一つの多様体上の各点は他の多様体上の一定の点へ移れることとなる。例外の研究は重要であるが、ここでは考えないでよかろう。かくして与えられた多様体における位置の決定は、一つの数値の決定と、低次元の多様体における位置の決定とに還元される。[3]」これを繰り返してn次元の場合はn個の数値が決定され、「多様体における位置の決定は可能な場合有限個の数値の決定に還元される。」初めに変域の与えられた変動に言及しているのであるから、それは部分多様体であろう。従ってかく導入された座標は局所座標と考えて差支えないであろう。但し現代的な局所座標の定義を使うのではなく、部分多様体の中の点に数値を附与して行くのである。運動は一次元的であるからそれを用いて点に数値を与えるのである。リーマンは無限次元の多様体、連続次元の多様体をも考えている。定変域の函数の全体の如きである。一般的理論として無限次元乃至連続次元の多様体を論ずることは十九世紀半ばにおいて成功するとは思われない。リーマンは唯実例に関してのみ考察しているのである。実例については相当頻繁に使用せられる。

以上が計量を考えない場合の連続多様体なのであるが、本性を何と見做すべきであろうか。それはリーマンの時代

までの微積分を以て計算できる最も普遍的な対象であって、その為に必要なトポロジーは運動による自然的なものである外ないから、それは最も広義の運動であり、しかも解析的な処理の可能なるものということができる。実体において運動であり、同時に計算可能性を本質とするのである。この場合、われわれの直接扱うことのできる所は局所的でしかあり得ない。これは次元についても座標についても同じである。従って多様体の存在は局所的には直観的空間内の存在となるであろうが、大域的にはそれとは異質である。リーマンによれば、このような概念がなかったことが、今迄函数論、微分方程式論で大きな成果をあげ得なかった理由であるという。そして「この場合量についてなされる研究は、量論の内で計量から独立な一般的な部門をなしている。そこでは量が、位置から独立なもの、単位によって表現されるものと考えられず、一つの多様体の領域と見做されている。[4]」それ故、計量を持たない多様体の導入は必然的である。

第二章で計量の問題が論ぜられていることは周知の如くである。ここでも現代的な理解を離れてリーマンのいわんとする所を直接把握しなければならないであろう。彼は冒頭に計量可能性の第一条件として、「曲線が位置に無関係に長さを持ち、従っていかなる曲線も任意の曲線を基準にして計量できるという仮定[5]」をあげている。多様体内の曲線が何たるかは座標が内部であたえられている故定義可能である。曲線の移動の意味づけがなされなければならないが、それは無限小変位の繰り返しによってなされる。よってこの条件の意味は確定する。計量可能性の最小条件は全多様体に共通の尺度の下で長さが計算可能ということである。これを幾何学的にのべれば先のようになるであろう。計量は距離即ち長さについて考えられているが、もっと広い意味で考えても差支えないであろう。つまり計量をMaßの意味でとり、二次元の面積、三次元の体積等を考え、これの不変性を条件とすることも可能である。しかしこれは多様体に必要以上の制限を課することになるのである。

この計量の必要条件を維持しながら多様体即ち広義の運動に長さを定めようとする。リーマンの推論の過程は、微

積分による計算可能性を最大限に追究することである。多少数学上のことがらを言わねばならないが彼の決定方法を段階を追って記してみよう。まず、曲線を表現するために点の位置の座標を一つの変数の連続函数によって表わす。更に次の制限を加える。座標x（n個）の増分dx（n個）の間の関係が連続的に変化する場合のみを考える。すると、曲線を要素に分解し、そこではdxの間の関係は一定であると考えることができる。よって曲線の要素即ち線素dsの長さをxとdxの函数として決定できればよい。第二の仮定をする。線素の長さは二次の無限小を無視すれば、「線素上のすべての点に無限小の変位を与えても不変に保たれる。」この条件で曲線の移動に際して長さの不変性が保たれ、計量の基本前提が満たされることになるわけである。これからdxが同じ割合で増大すれば、線素も同じ割合で増大することが結果し、dsがdxの一次斉次函数となり、かつdxの符号をかえても線素は不変であることが判明する。これで計量決定の第一段階は終了した。次の段階は一次斉次函数の具体的な形を決定することである。リーマンはこのために自然なしかも本質的な方法をとり、簡単な場合から、複雑な場合に至る計量の与え方を導き出している。線素の始点Ｐより等距離にある$n-1$次元の多様体を考える。これは勿論多数あるが、これらを区別する為に位置の連続函数を考える。これはＰからの「距離」とは限らない。Ｐから出発すると一様増大、又は一様減小であるが、増大なりとする。するとこの連続函数はＰ点で最小である。この性質を用いて、連続函数をテーラー展開をして、一番簡単な場合から複雑な場合へと進むのである。最初はds^2がdxの二次微分形式で表わされる場合が現われ、次にはds^4がdxの四次微分形式で表わされる場合が続き、順次複雑となる。原理上はいくらでも前進する。このとき、dsがdxの一次斉次函数なることが中心の役割を演ずる。[6]

以上がリーマンが計量を導入する過程であるが、多様体一般から出発して計量の計算可能性を最大限に追究したものなること明らかである。しかしその全貌、その範囲は判然としないであろう。多様体が最も一般的な運動であるといっても、われわれの想像もできないものが含まれている。このことはわれわれの想像力の止むを得ない欠陥に基づ

くであろう。そして丁度古代数学の「図形」の全貌が不鮮明なることと類似する。図形は始源においては作図可能なものと定められるであろう。つまり円と直線の結合より生じるものであろう。しかし漸次複合が行なわれて、規定関係で円と直線に帰着されるか又はすでに図形として扱えるものに帰着される。何れにせよこれならば原理上は円と直線に関する基本性質たる公理公準によって処理可能である。従って図形は『原論』の公理公準によって処理可能な最も一般的な対象であるということになるであろう。この中には想像もできない奇怪な図形も含まれるであろう。しかし古代数学で論証能力のない力学的曲線などは自動的に排除される。所で多様体の幾何学は内在的（intrinsic）幾何学として特色づけられる。計量のある多様体の場合は特にそうである。これに反して外在的（extrinsic）幾何学は、三次元ユークリッド空間即ち座標を考えた場合の直観的空間内部又は高次元のユークリッド空間内部に多様体を置き、計量は外部の空間から導入して定めるものとする。最も強い意味の外在的幾何学は古代幾何学であって、図形は常に直観的空間内部に置かれたものとされる。外在、内在にも程度があるわけである。内在的幾何学では、外在的幾何学で区別されているものが、同一なる場合が生じる。リーマンのあげている実例では平面と壔面、錐面は同等であって、「その際内部的な計量の関係は変わらず、それに関する定理もすべてそのまま成立する。」即ち内在的幾何学では抽象（abstraction）が必然的なのである。計量を考えない場合は更に程度の高い抽象が行われることになるであろう。さて多様体が本性において運動であることをもう少し別の面から確かめて置きたいと思う。

リーマンは多様体を論じるに際してどのような方法で位置解析を取扱ったであろうか。リーマンは若干の位置解析の断片論稿と二つの函数論の大論文のそれぞれ一節でそれを述べている。彼のなした所は曲面或いは高次元の図形（広義）の連結度の問題である。曲面の連結度とそれについての定理の証明の実際を検討してみよう。連結度の定義は次の如くなされている。「F（曲面）上の閉曲線で次のような性質を持つもの、a_1、a_2、……、a_nが存在するとする。(1) a_1、a_2、……、a_nは単独でも結合してもFの部分の全境界をなすことはない。(2)各々の他の閉曲線はa_1、a_2、……

a_nと共にFの部分の全境界をなすことができる。このときFは（n＋1）重連結という。[7]」この連結度の定義により若干の定理が証明せられる。例えば「（n＋1）重連結の曲面Fは一つの横断線によってn重連結の曲面Fに変えられる。」この定義において曲線a_1を考えるとき、それが連続的に自由に変形できることが前提されているであろう。そしてこの場合の連続的、自由な変形について正確な数学的定義が与えられるわけではない。これはわれわれの想像力を通して得られる限りの最大の運動変化にもとづくものという外ない。定理の証明も同様である。同じく適当に想像力によって曲面Fを想定して、横断線を実際に描き、この横断線の連続的変形と曲面F自体の同じ連続的変形によって定理の普遍性が得られるのである。つまり想像力を媒介にした運動が決定的に作用しているのである。勿論この場合想像力は局所的にだけ働いていてよいのである。想像力における運動は大域的な運動全体を前提する。従って位置解析は運動を基礎として初めて成立し得る数学である。

二

リーマンにおいて、多様体の数学内部における実際の使用はほとんど「リーマン面」に限られている。リーマン面は通常多重平面（現今にては多葉な被覆面と呼ばれている）として理解される。これは教科書的理解であると共にリーマン自身もこのような説明をして居り、複素函数論の基礎づけをなした所の学位論文ではそのような説明法をとっている。しかるにF・クラインによれば[8]彼の真意は別であり、それはむしろ通俗的解釈にすぎない。リーマンの着想ははるかに物理的であって、物理的考察と分離できない。このクラインの見解については数学史的には問題があり、反対論が展開されている。[9]即ち彼の主張のように徹底した形で物理的であったかどうかは依然として疑問とせられている。しかしこれは程度の問題であろう。この見解はリーマン、クライン、ヒルベルト、ワイル等のゲッチンゲン大学の伝統的な立場と見做すことができよう。理論の発展を通観するならば、そのままでなくとも大筋ではクラインが

正当であろうことが首肯される。リーマン面は複素函数の幾何学的な本体、本性に外ならないが、これには函数概念の発展、進歩が関係している。

複素函数に至る函数概念の系譜は法則性を持った函数のそれである。従来その法則性は主に函数値の計算法則として与えられていた。函数は周知の如くライプニッツの晩年J・ベルヌーイとの文通によって確定した。そのとき函数には連続性と共に法則性が与えられていた。「もし充分に定義されるならば、初めにすべての過程が含まれている」という意味で法則的である。その根拠は連続の原理で与えられ、これは充足理由律の派生法則である故、結局この最終の大原理に至る。つまり存在論的に根拠づけられていたのである。この当否はしばらくおくとして、事実は注目しなければならないであろう。ライプニッツ以後、この法則性は函数の計算法則の中に含まれると考えられた。この種の函数としてはオイラーのものが著明であるが、ラグランジュは徹底した形で述べている。

われわれはラグランジュの函数概念につき一考が必要であろう。彼は函数を巾級数に展開することを理論の核心とした。『解析函数論』[10]の序によると、動機は解析学を厳格な論証体系たらしめようとする所にあった。しかも一般理論においてのみかくするよりも特殊問題の解決のために要請せられたといっている。ここで言及されているのはニュートンの『プリンキピア』の第二巻の「第三問題」[11]である。それは媒体中の物体の運動が、与えられた曲線に沿って行なわれる場合、如何なる抵抗を被るかという問題である。この証明に巾級数が使用せられるのであるが、ニュートンの解決法は誤りであって、それをJ・ベルヌーイが指摘し、N・ベルヌーイが巾級数の高次の項の使用を提案した。これに反してラグランジュは巾級数の全部の項即ち級数全体の使用によって解決できることを示した。従って函数を巾級数と見做すことは極めて具体的な問題に端を発しているのである。そして「この著作の目的は、原始函数と導函数と考えられる函数の理論を与え、この理論によって人が微分計算に依らしめている解析学、幾何学、力学の基本問題を解き、かつ、この解に対して、古人の証明の厳格さを附与することである。」ライプニッツ、ベルヌーイ、ロピ

タルなどの無限小量の使用、又ニュートンの流率法における「消え去る量」の使用も共に計算の原理を論証しない。ライプニッツの無限小量は高次のそれを含むのであるから、直接な基礎づけは甚だ困難である。ラグランジュによれば、無限小解析は、種々なる次数の無限小量の考察と「無限小量だけの差をもつ諸量は等しいと見做されるという前提」によって成立している。これは本来矛盾する要請である。ニュートンの場合でも本質的には変りない。そこで函数の処理を純計算的な代数的立場において行なわんとする。所謂「代数解析」が成立したのであるが、解析函数の前段階として少しく考察を要する部門である。

函数は冒頭において次の如く定義されている。「われわれが、一つの量乃至多数の量の函数と呼ぶものは、任意の計算式を意味し、そこではこれらの量は種々なる仕方で現われる。これらは所与の不変の値をとるものと見做された他の量と関係することもあるし無関係のこともある。それらの函数の量は可能な値すべてをとることができる。かくして函数において、われわれは可変と考えられる量のみを考察し、それと関係し得る定量には全く注目しないのである。」この函数が解析函数であるが、ラグランジュが「解析」を「幾何学的」でなく、「計算的」の意味に用いることは解析力学における「解析」と同様である。函数 $f(x)$ において $f(x+i)$[12] を考え、i は正負の実数である。この $f(x+i)$ を i の巾級数に展開するのであるが、これを無限小又は極限を使わないで実施するのである。もし巾級数展開が現実にできれば、第一次導函数、第二次導函数……がその級数の i^n の係数に適当な定数をかけることで容易に得られる。この展開は一定の手続きにより行なわれるが[13]、若干の前提が必要であることはいうまでもない。まず第一に函数 $f(x)$ の計算可能性が前提せられる（有限一価性を含む）。それは函数が計算式であることにより満たされる。変数は勿論実変数である。更に正整数巾の級数に展開せられることが前提せられるが、これは x の特殊な値以外は計算可能性より自動的に結果することが証明せられる。かくして、i に関する巾級数に一定の手続きにより展開せられて、導函数が逐次算出され、無限小量も極限も必要でない。ラグランジュの時代に知られていた函数はこのような手段で実際級

数に展開せられている。正整数巾の級数に展開せられない特異なxについては別途に考察されている。[14] ここで扱われ得る函数の範囲は比較的に狭いということができよう。しかし当時としては充分に役立ったのであって、同書の第二部、第三部で幾何学、力学への応用を論じている。かく、ラグランジュは函数理論を著しく解析化した。無限小量を使用する微分法も、運動に基づく流率法も共に幾何学的傾向が強い。それが巾級数展開によって払拭せられるのである。ここで若干の注意が必要であろう。後年の如く解析函数を巾級数と完全に同一視して、巾級数自体を対象と考えるというよりも、函数の解析的処理の為の手段としてそれを使用するのである。つまり函数は予め別に計算式として存在するのである。

このような計算式としての函数を再び幾何学化する所にリーマン面の理念が生れる。学位論文の始め第二節で、函数の幾何学化の第一歩を述べているが、簡単であるけれども適切に本質を捉えている。「量 z も量 w も共に変量と考えられ、それぞれ複素数値を取ることができる。二次元の連続した領域上に拡がるこのような変動に関する理解は空間的直観と結びついて本質的に容易となる。z の値 $x+iy$ が座標x、yなる平面Aの点Oにより表現せられると考えよ。又 w の値 $u+iv$ が座標u、vなる平面Bの点Qにより表現せられると考えよ。このとき量 w の z への依存はすべて位置Qの位置Oへの依存として表現せられる。z の任意の値に z と共に連続的に変化する w の値が対応するならば、即ちuとvがxとyの連続函数ならば、平面Aの各点には平面Bの一つの点が、又Aの線にはBの一つの線が、連結したAの部分には連結したBの部分が対応する。従って w の z への依存性を平面Aから平面Bへの写像として表象することができる。」現代的にはむしろ平易な函数の把握であるが歴史的には革新的である。二つの領域AとBを考えること、それぞれの領域上で変動（Veränderlichkeit）を考えること、領域AからBへの写像を考えること、これらが幾何学化の必須な道具である。写像によって変数間の関係が置換せられている。従って写像、対応といった幾何学化に必然的に附属する概念は本性上何であるかが問題となる。これは二つの領域の上の変動の調和、相即である。

この調和、相即は原始的事実として承認される。これしかあり得ないのである。従って領域とその上の運動が幾何学化の第一の本質である。そしてこの領域はそれぞれ独立の対象である。今の場合平面上の領域が考えられているが、任意の曲面で論じ得られることは明らかである。

しかし何故に函数は幾何学化されなければならないのであろうか。ラグランジュの『解析函数論』に見られる如く計算式としての函数は局所的な計算となる。巾級数展開はその現れである。巾級数に限らず計算式が級数となる場合は局所的となろう。従って函数の全体像の把握は幾何学化によらなければならないのである。このような函数の大域的構造を研究するという要請は十九世紀に入って急速に高まった傾向であろう。そこには楕円函数論の進歩が大きく影響を与えたであろう。ガウス、アーベル、ヤコビ等の十九世紀前半の数学者の主要な関心はそこにあった。ガウスは固有な幾何学化を考えている。幾何学化は函数の全体像を決定するために必然的であったと考えられる。しかしこのことは十七世紀への還帰を意味しない。局所的構造から大域化への道は全く別種の幾何学的対象を導入する。いうまでもなくそれが多様体である。所で、法則的函数の幾何学化も事態は同じであって、リーマンはまず法則的函数の局所的特性を取り出す。周知の如く、「複素変数 w が他の複素変数 z の函数といわれるのは、微分係数 $\frac{dw}{dz}$ の値が微分 dz の値に依存しないように w が z と共に変化するときである。[15]」即ち複素数における微分可能性が法則的函数の局所的特性とせられる。これは数学的事実であるという外ない。[16]

リーマンの学位論文の大部分は局所的特性を大域的に実現することに費されている。法則性とは局所的性質が大域的な構造を決定し、両者が完全に相即していることである。拡大された曲面は一応、平面上の連続した多重平面として考えられている。従って三次元空間内部の曲面である。学位論文では有限領域に制限しているから相当直観的な内容を持っている。しかし無限に接近して重なっていることが必要である。本当に無限に接近した平面はあり得ないのであるから多重平面としてのリーマン面も本来は直観的ではない。即ち直観からの離脱が自動的に行なわれているの

である。リーマンはこの多重平面に若干の制限を加える。線に沿っての連結、即ち折りまげや、重なった部分への分裂等がないとする。このことから点における分岐[17]が生じる。従ってある程度性格の限定された曲面が扱われる。多重平面の考え方は仲々巧妙であって、局所座標も計量的な性質も同時に与えられている。一枚一枚は平面であるからである。いうまでもなくリーマン面には等角写像等の計量的な性質が（手段として）必要である。

所でリーマンの学位論文の大部分はこのような多重平面としての曲面上の（調和）函数の存在証明に費されている。この証明はリーマン面の理論にとって本質的である故、基本の個所を検討してみることにしよう。この存在証明では連結した多重平面Tが予め与えられたものとして前提されている。従って函数の構造にはこの多重平面の構造が入ることになる。多重平面は面の枚数、分岐点及び分岐の状態、連結度で決定せられる。「複素変数の複素函数」を定めるに際して、二変数の実函数から開始する。これは幾何学化の当然の道程である。[18]註に記した定理がそれであるが、これは興味ある内容を持っている。αとβは緩い条件を持った多重平面たる曲面T上の実函数である。実変数の範囲でこれらの函数が存在することは明らかである。そこでαに次の条件を満たす函数λを加えて、記されている積分の値を最小値とする。λは全領域で連続か又は個々の点（離散した点）でのみ非連続で、境界では0であって、積分$\int_T\left\{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2\right\}dT$が有限であるような函数である。問題の積分を最小値ならしめるλをμと置けば、それは一意に決定され、$u=\alpha+\mu$とすれば求める複素函数の実部が得られるのである。即ち境界における条件は変えないで、積分を最小値ならしめる函数がuである。[19]（このような方法をリーマンは「ヂリクレの原理」と呼んだ。）即ち変分法の解に外ならない。ここでワイヤーシュトラスによる批判[20]があるが、これは多くの問題を含んでいる。リーマンによってμの存在は当然とせられたが、それが存在するようなものをリーマン面と見做すということなのである。このことは境界条件と非連続性の条件さえ与えておけば複素函数のみならず、多重平面まで決定されることを意味している。これは法則的な函数たる複素函数の幾何学化の特性をあます所なく表わしている。多重平面の構造と複素函数が一挙に決

定されるのである。

複素変数の函数は多重平面相互の関係を自ずと生産する。リーマンは学位論文の十五節で興味ある考察を行なっている。平面A上の曲面（勿論多重平面としての）Tの複素函数は、値域を考えることによって平面B上の曲面Sを生じる。その函数によってTの連結性はSの連結性を作り、又逆の関係が成立する。Tの境界と非連続点はSの境界に対応する。そしてSは多重平面としてのリーマン面の条件を満たす。こうすると、函数wの逆函数z(w)が考えられて、それはS上の複素函数であって、値域として丁度Tが対応する。即ちwによってTからSへ、zによってSからTへ一対一の写像が存在することになる。しかしこの対応はTとSの点を任意的に一対一対応づけたものではない。これは複素函数が二つのリーマン面の調和的な相互関係に外ならないことを示している。詳しくいえば、T上の函数wはSを作り、逆にS上の函数zはTを作る。しかもTとSは夫々函数w、zの決定するリーマン面として独立な曲面である。かくて両者の調和という以外述べようのない関係が生起するのである。これが法則的函数の究極的な姿ということができる。所でリーマン面はリーマンではあくまで拡張された図形であって、現代見られる抽象化された多様体ではない。すると函数がその上の変動であるといっても何かの物理的運動であるであろう。すべてを図形（広義）とその上の何物かに置換えないと幾何学化が完成されないからである。F・クラインによれば、リーマンは常に流体の運動を念頭においていたという。それ故リーマン面の理論の物理的側面を一瞥することが必要であろう。

リーマンの数学は物理的考察によって強く色どられている。しかしリーマン面に関しては、論文に現われた限り、明白な物理的記述はない。従ってクラインの主張を参照して議論を進める外、道がないのである。クラインのリーマン面論には歴史的な動機がある。リーマンの函数の存在証明、即ち「ヂリクレの原理」による存在証明はワイヤーシュトラスにより批判された。そこでこの原理よりもっと直接にリーマンが念頭においていたものを探らんとしたのである。プリム[21]がかつてクラインに次のように語ったという。「リーマン面は本来、必ずしも平面上の多重面である必

要はない。むしろ反対に位置の複素函数は任意に与えられた曲面上で、先と全く同じ正確さで研究される。」この事実は数学史的には問題があって異説があること先述の如くである。クラインの理論は多重平面ではない一般の曲面において流動を考える所に特色がある。曲面上の物理的流動を考えれば即座にリーマン面の物理的本性が浮上する。この曲面上の物理学に「数学的推論の支えを与えんがために、」ヂリクレの原理が持出されたのである。複素函数は曲面上の（非圧縮性）流体の定常流と見做すことができる。この定常流の実質内容は問題ではない。函数を幾何学化するとなれば、拡大された曲面を考えねばならないことは勿論であるが、その上の函数の実像がなければならない。それが物理的な内実を捨象した流体に外ならない。(22) クラインは代数函数の場合を細部にわたって論じリーマンの発見の動機を探究している（閉リーマン面）。リーマン面の全部が代数函数のそれではないが殆んどの性質はこれによって代表され、従って代数函数についてみればほぼ全容が判明するのである。(23)

かくてこのリーマン面の本性に関する問題はワイヤーシュトラスの批判と深く関聯しているのである。リーマン面が本来物理的なものであるとしたならば、リーマンの函数の存在証明は根拠を持つこととなる。「ヂリクレの原理」はヂリクレが講義の中で述べた。この十九世紀の物理数学の大原理は多様体理論の深部に関わる。空間中の領域Sがあるとき、境界T上では連続的な値を条件として与えて、内部で調和な函数uを求めんとする。ポテンシャルにおける質量の分布や温度分布は実際このような函数となっている。ヂリクレの述べている温度の例は次の如くである。境界で定まった連続的な温度分布が与えられている。このとき領域内部で熱の移動が生じるが、この移動が定常状態となったとき、即ち熱の平衡が生じたとき内部の温度分布はどの様であるか。この問題の核心は「定常状態」、ある種の「平衡関係」にある。それを実現するために、積分 $\int_S \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right\} dS$ (24)（三次元でいえば）を極値（この場合には最小値）ならしめる函数uを求めることになる。平衡を計算するには何等かの極値が必要である。平衡状態は存在するのであるから、かかる函数uの存在は物理的には保証されている。そしてかかる函数が調和函数であ

ることもほぼ自明である。ワイヤーシュトラスは純粋に数学上の立場では必ずしも函数uは存在できるとは限らないことを示した。但しこの場合直接にこの積分の値を最小ならしめる函数が存在しないといったのではなく、類似の積分について反例をあげたのである。従って調和函数uの存在については未決としたのみである。

このように見て来ると多様体の本性は物理的であり、抽象的な多様体は以後の発展の結果であって、即座に抽象的多様体を考えるべきでないとしなければならないであろう。しかしこうして数学的な厳密さが得られるかという反論が生じるであろう。このような疑問は幾何学には終始附随するのであって、古代幾何学の図形も作図されたあるものであるとすれば、これを免れない。しかし公理公準によって思考することで厳密さは維持されるが、図形がある物体的なものであるという性格を完全に排除することはできない。同様に、解析的な処理をすることで、多様体の数学は数学であって物理学ではない。しかし今見た函数uの存在の如く、その影響は皆無とはいえない。更にヂリクレの原理は複素函数の持つ法則性の性格を定めている。前述の如くこの原理は運動の平衡関係を求める原理であった。従って複素函数の法則性は平衡した流動のそれであって、「運動学的な法則性」に外ならない。

これは力学的な法則性と区別される。そこでは運動以上の実体的な何物かが要求される。もっともヂリクレの原理において、積分、$\int_S\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}dS$ は流体の運動の全運動エネルギーを表わし、平衡した運動は運動エネルギーが最低の場合を意味している。従って補助的には力学が使用される。より以上進んで実体的な法則性を求めんとすれば、多様体の計量的な構造が必然的な契機として浮上することになるであろう。このことは、つとにリーマンの指摘した所であった。先に函数uを決定するに際してヂリクレの原理が使用され、「変分法」が理論の中核として浮上した。これは所謂「変分原理」の一環の中に算えることができるであろう。この原理は自然法則の究極の形式と考えられ、現在までのすべての法則は変分原理の形で述べられている。古くは光学のフェルマーの原理がそうである。十九世紀におけるこの方面の決定的な成果は解析力学のハミルトンの原理である。この法則の表現は因果律に

基づかないという特性をもっている。変分法はある函数の集りを考え、その函数のある種の積分において極値をなす函数を求める。即ち局所的な極値ではなく大域的な極値を求める。これはある見地での平衡関係の実現である。註(18)であげた基本定理の積分は局所的に必要とせられる性質つまりコーシー・リーマンの微分方程式を大域的に実現する函数u、vを求める変分法の積分である。コーシー・リーマンの微分方程式は流体の運動が局所的に速度の関係で平衡していることを直接表示している。そして解として得られるu、vは到る所平衡の実現した流体の運動を定めるのである。

複素函数の法則性の本性が明らかになったとき、ひるがえって複素数自体の哲学への通路が開かれることになるであろう。実数の場合と異なり複素数を直接哲学的に考究しても殆んど満足すべき結果は得られない。田辺元博士が『数理哲学研究』の中で、ナトルプの虚数の哲学を紹介すると共にその不備を慨嘆されている。しかるに博士は晩年の著作(25)で複素函数論の見地に立って改めて複素数論を展開した。博士の論述は形而上学の用語を以てなされている。そのため誤解を伴い真意が覆われる嫌いなしとしない。ガウス平面即ち複素数体系についてガウスは系列の系列という、二次元の数体系とした。しかしこれだけでは複素数を充分に言い表わしたことにならない。博士によれば、複素数平面は「自発自展の自立性自動性」を持ち、「決して之を単なる実数系列の外的重畳結合に還元すること能わざる内面的動的統一」である。この意味は種々解釈されるであろう。それが、平板的なデカルト平面座標系と異なるのは背後の力関係とでもいうべき実在の現れ、作用を表現する能力を持つ数の体系であるからと理解されよう。個々の複素数$x+iy$については次の如くになる。実数部分に対して虚数部分は「絶対否定たる無」である。両部分は矛盾対立している。博士の用語によれば弁証法的対立ということになるであろう。確かに虚数部分は存在なる性格からは非存在である。複素数は存在と非存在の結合である。対立を内に含むことのできる数である。従って完全に分離している ものがそれにも拘らず一つの数として働くのである。実数だけで表現するとすれば、本質的に「対」であって、一つ

の実数に還元できないものである。複素数の形式的定義は所謂ハンケルの形式不易の原理を満す二つの実数の対としてなされる。数学において「対立」「対称」等の性格を表わす最も単純な形は「対」即ち二つの実数の結合である。更にその上、「この（複素）函数論に至り始めて複素数の自立自発性が完成せられるというべきである」とせられる。複素数の可能性としての実在の表現能力が、複素変数の複素函数を考えることで現実のものとなるのである。二次元の定常流のもつ平衡関係は最も単純であるが最も基本的である。一次元の定常流は実数を以て表現せられるであろうが、これはあまりに単純で、そこの平衡関係は静力学のそれと異ならなく、本来の運動のもつ平衡ではない。博士の記述は過度に形面上学の傾向を持つが、要はすべてに否定的契機を発見し連続性の背後に非連続性を見ることであろう。これを物理的世界においていえば力の対立とその平衡である。博士はデデキントの切断と函数論の解析接続のアナロジーを詳しく論じた。論の進め方はともかく、内容には充分な根拠があるといわねばならない。解析接続は、流体が対立のままで平衡を維持しながら推移することに外ならない。（了）

註

（1）拙稿「力学におけるアナリシス」『世界観と哲学の原理』所収、（東海大学出版会、昭和五十七年）、「力学と目的因」（東海大学文学部紀要第三十九輯、昭和五十九年）、参照。

（2）B. Riemann's Gesammelte Math. Werke, SS. 272–287. Habilitationsvortrag. この論稿については多数の解説があるが、H・ワイルが本論文の出版に際して附した解説が最も勝れているであろう。猶、次も参照。H. Weyl: Analyse des Raumproblems. これらの論稿を含めて Das Kontinuum und andere Monographien なる表題の下でまとめて出版されている。

（3）Riemann's Werke, S. 275.

（4）ibid., S. 274.

（5）ibid., S. 276.

（6）これらの計量の内で二次微分形式の場合が重要であることは論ずるまでもない。この場合だけでも極めて広汎である。直観的空間内の図形の拡張ということになればこの種の計量が自然である。リーマンはガウスの『曲面論』を拡張して曲率（断面曲率）を定義している。リーマンの書いている曲率は分かりにくい所があるが、容易に現代化し得るものである。曲率の計算はパリ・アカデミーの懸賞論文において相当程度なされている。当時においては非ユークリッド幾何学との関聯で定曲率空間が興味深く、その空間の二次微分形式をあげている。

（7）この定義は一八五七年の『アーベル函数論』にあるものである。学位論文の場合と算え方が異なる。

（8）F. Klein: On Riemann's Theory of Algebraic Functions and their Integrals (English translation, Dover).

（9）E. Scholz: Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré, S.187.

（10）Théorie des fonctions analytiques (Oeuvres de Lagrange, tome 9).

（11）第三問題は次の如くである。「一様な重力がまっすぐに水平面に向かい、抵抗は媒質の密度と速度の二乗の積に比例するものとせよ。物体を任意の与えられた曲線上を運動するようにさせる所の媒質の各場所における密度を求めよ。又各場所における物体の速度と媒質の抵抗を求めよ。」

（12）虚数$\sqrt{-1}$の記号 i とまぎらわしいが原文のまま使用する。

（13）正常な場合の巾級数展開は簡単である。手順を述べれば、次の如くである。

$f(x+i)=f(x)+i\,P(x, i)$.　$P(x, i)=p(x)+i\,Q(x, i)$.　$Q(x, i)=q(x)+i\,R(x, i)$.　$R(x, i)=r(x)+i\,S(x, i)$ ……………

$f(x+i)=f(x)+i\,p(x)+i^2\,Q(x, i)=f(x)+i\,p(x)+i^2\,q(x)+i^3\,R(x, i)=$………………

$p=f'(x)$,　$q=\frac{f''(x)}{2}$,　$r=\frac{f'''(x)}{2.3}$,　………………

（14）巾級数については理論上収斂半径が問題になるわけであるが、当然時代的制約によって収斂半径自体は問題となっていなく次の定理が論ぜられている。「$f(x+i)$ の展開から生じる級数 $f(x)+pi+qi^2+ri^3+$……において、任意の項についてそれが、それに続く項の和より大となるように i を充分小にとることができる。」又複素函数論との関係から複素数が注目せられるが、これは函数間の関係に使用されるのみである（オイラーの関係式の如し）。

(15) Riemann's Werke, S. 5.

(16) このことからこれも周知の種々なる特性が現われる。巾級数展開が可能なることもその一つである。これで前代のラグランジュの解析函数との結合が果される。実変数と複素変数では大きな差があるが、級数の計算という点では直接に移行が可能である。又実変数の函数としての特性である所のuとvに関するコーシー・リーマンの微分方程式 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ が導かれ、函数 $u(x, y)$ $v(x, y)$ が調和函数となることが分かり、物理化の道が開かれる。又図形の対応という見地からは対応としての函数は等角写像を惹き起すのである。

(17) m個の平面がその点で接合し、その近くの平面上の点はm回その点の廻りを廻転することで元に戻るような点を分岐点という。

(18) 連結した曲面Tが横断線によって単連結の曲面T^*になっているとする。Tにおいてx、yの複素函数 $\alpha+\beta i$ が与えられ、$\int_{\mathrm{T}}\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dT$ が有限の値を持つとする、そのとき、次の条件を満すx、yの函数 $\mu+\nu i$ を附加することで、$\alpha+\beta i$ は唯一の仕方でzの函数に変換される。

(1) μは境界で$=0$であるか、又は個々の点でのみ0と異なる。νは一点で任意の値が与えられる。

(2) μのTにおける導函数、νのT^*における導函数は個々の点でのみ非連続で、$\int_{\mathrm{T}}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2\right]dT$, $\int_{\mathrm{T}}\left[\left(\frac{\partial\nu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\nu}{\partial y}\right)^2\right]dT$ は有限である。νの導函数は横断線の両側で等しい値を持つ。

(19) vは常数を除いてuによって決定され、逆にvを境界条件で決定すれば、uは常数を除いて定められる。

(20) K. Weierstraß: Über das sogenannte Dirichletsche Prinzip, Werke Bd. 2, SS. 49–54.

(21) リーマンの直弟子。

(22) 複素函数wの実部uと虚部vを考えると $u=c$ は速度ポテンシャルの等ポテンシャル線、$v=c$ は流線を表わし、それらは直交する。曲面の境界条件によって定常流は多様な形をとる。この詳細を論じる必要はないであろう。

(23) F. Klein: On Riemann's Theory of Algebraic Functions and their Integrals 参照。開リーマン面上の定常流については最近の次の論説に詳しい。柴雅和『流れ函数による開リーマン面の実現』数学第三六巻第三号（一九八四年）。

(24) この積分は u の適当な解釈の下で流体の運動の全運動エネルギーを表わしている。

(25) 「理論物理学新方法論提説」(田辺元全集第十二巻)。

(筆者　さわぐち・しょういつ　筑波大学、哲学・思想学系〔科学哲学・数理哲学〕教授)

THE OUTLINES OF THE MAIN ARTICLES IN THIS ISSUE

The outline of such an article as appears in more than one number of this magazine is to be given together with the last instalment of the article.

Mannigfaltigkeit als Allgemeinbegriff

von Shoitsu Sawaguchi
Professor der Philosophie
an der philosophischen Abteilung
an der Universität Tsukuba

Die Beweismethode der modernen Mathematik ist analytisch, und der analytische Beweis begründet sich auf einigen Allgemeinbegriffen. Die zwei wichtigsten davon sind Menge und Mannigfaltigkeit. Die Mannigfaltigkeit wurde bekannterweise von B. Riemann in der Mitte des 19. Jahrhunderts gefunden. Diese Riemannsche ist aber von der gegenwärtigen in vielen Punkten verschieden. Sie war gar nicht abstrakt, sondern physikalisch und ein Produkt der mathematischen Physik. In der mathematischen Physik des 19. Jahrhunderts spielte das Flüssigkeitsmodell im allgemeinen eine große Rolle. Auch bezüglich der Mannigfaltigkeit war es nicht anders. Wie bekannt, werden die zwei Arten der Mannigfaltigkeiten eingeteilt, die metrischen und die nichtmetrischen. Zu den letzteren gehört die Riemannsche Fläche, die für Flüssigkeit der zwei Dimensionen gehalten wird.

Unsere Frage ist es, was das wahre Objekt der Geometrie des 19. Jahrhunderts sei. Auf die alte Frage, was denn das wahre Objekt der griechischen Mathematik sei, antwortete man wie folgt: es sei die Figur, d. h. etwas im anschaulichen Raum, was eine Konstruktibilität als seinen wesentlichen Moment habe. Daher war diese Eigenschaft eine große Bedingung und zugleich eine große Beschränkung der griechischen Mathematik. In gleicher Weise ist das Flüssigkeitsmodell in der modernen Geometrie nicht ein bloßes Modell, vielmehr bildet die Flüssigkeit die wesentliche Bedingung ihres Objekts. Mit anderen Worten, sie ist nichts anderes als die allgemeinste Bewegung, um die es sich in der Mathematik des 19. Jahrhunderts handeln kann. Diese Sache wird im sogenannten Dirichletschen Prinzip deutlich gezeigt, welches der Kernpunkt der Theorie der Riemannschen Fläche ist. Die Überlegungen dieses Prinzips werden zur philosophischen Untersuchung der Mathematik einen neuen Weg bahnen. Die Riemannsche Fläche ergab sich aus der Geometrisierung der gesetzlichen Funktionen. Weil die Gesetzlichkeit der Funktion durch ihre Komplexdifferenzierbarkeit bestimmt wird, ist es gewiß, daß sie selbst naturgemäß diese Fläche erzeugt. Diese Sache wird zur Philosophie der komplexen Zahlen viel beitragen. Im Gegensatz zu den realen Zahlen sind die komplexen Zahlen schwer, philosophisch zu begreifen. Es soll aber durch deren Bestimmungsvermögen für die gesetzliche Funktion, somit durch die Riemannsche Fläche gemacht werden.