ラッセルの論理主義における非基礎付け主義*

久木田水生

序

フレーゲ、ラッセルなどによって提唱され、後に論理主義と呼ばれるようになった数学についての哲学は、おおよそ次の二つのテーゼに要約することができる。

（L1）すべての数学（算術）の概念は論理学の概念から定義される。

（L2）すべての数学（算術）の定理は論理学の公理から論理的推論によって導出される。

このうち（L2）のテーゼは一般的に基礎付け主義的な主張——つまり数学を論理学に還元することによって、数学の真理を基礎付けることができる、という主張——を含むものとして考えられる。しかし少なくともパラドクス発見以降のラッセルは、このような基礎付け主義的な立場を採ってはいない。論理学は数学を基礎付けるというよりも、数学の前提となっている原理を明らかにし、そこから論理的な帰結として数学の体系を導きだすことを可能にするもの、とラッセルは考えているのである。さらにラッセルは、このとき前提となっている原理がその帰結となる数学の定理を正当化するのではなく、逆に数学の中で定理として認められている命題を導出することができるという事実が、その前提となっている原理を正当化する、と主張する。

問題は、このように基礎付け主義的な要素を取り除いたとき、ラッセルの仕事は哲学的に、そしてまた数学的にどのような意味を持ちうるか、ということである。数学の体系の前提となっているものを明示化し、そこからの演繹体系として数学を定式化するだけの試みとして特徴付けるならば、それは例えばツェルメロなどの公理論的方法と変わらない。また既存の数学の体系全体がその論理的な前提を正当化すると考えるならば、クワインやラカトシュなどによって唱えられる自然主義・経験主義の立場に近い。実際、かなりの部分においてラッセルの主張はこれら双方の主張と重なっている。しかし彼らの立場とラッセルの立場を完全に同一視することはできない。というのも、ラッセルが論理学の明証性や確実性に関してどれだけ譲歩していても、やはりラッセルにとってはあるべき論理学の形というものがあったからである。

本論文ではこのラッセルの立場が、哲学的あるいは数学的に見て、どのように特徴付けられるか、そしてどのような意義を持つかを考察し、以下の結論を導く。哲学的には、ラッセルの仕事は数学を基礎付けようとしたのではなく、数学の基礎を解明しようとした試みとして評価することができる。ラッセルは、数学の主題的対象がどのような本性を持つものであるか、そして数学が真であるために何が本質的かを明らかにしようとしたのである。数学的には、ラッセルは構成主義の立場に立脚して、そこから分岐タイプ理論という新しい一つの分野を創始し、さらには分岐タイプ理論に還元可能性の公理を加えれば集合論と同等になることを示した。確かに分岐タイプ理論は数学の基礎理論として集合論ほどポピュラーではない。それは分岐タイプ理論が課す、数学にとって必要以上に強いように思われる制限のためであるが、しかしその制限には単にラッセルの哲学的なバイアスという以上に合理的な理由がある（とりわけ計算や証明の遂行可能性を論じる場合のような、集合論的実在論があまり意味をなさない局面において）。だからこそ一部にはラッセルのアイディアを継承し発展させた数学者がいたのである。そのような後の発展を見ても、ラッセルの仕事には「失敗に終わった基礎付け主義の試み」として簡単に片付けられない重要性がある。

1　非基礎付け主義的論理主義

1-1　基礎付け主義の放棄

ラッセルの『プリンキピア・マテマティカ』についての一般的な評価は次のようなものだろう：「ラッセルは数学を論理学から導出することによって数学の確実性を基礎付けようと試みたが、パラドクスを避けつつ数学を導出するためには、基礎となる体系が複雑にならざるを得ず、またアドホックな公理を入れざるを得なかった。したがって結局のところラッセルは当初の目的を果たすことが出来なかった」。ところが『原理』と『プリンキピア』の間にラッセルが書いたものを調べると、このような評価が適切ではないことが分かる。というのも『原理』以後、ラッセルは論理学の明証性によって数学を基礎付けるという目的を放棄していくからである。それと同時にラッセルは論理学や数学を他の経験科学と類比的に考えるようになっていく。例えばラッセルは次のように言う。

記号論理学 logistic の方法は基本的には他のどんな科学とも同じものである。そこには同様の可謬性、同様の不確実性、帰納と演繹の同様の混淆が存在する。また原理を確証する際には、計算の結果が幅広く観察に合致していることに訴える必要があるという点でも、他の科学と同様である。(Russell [1906b], p. 194)

こうしたラッセルの立場の変化には二つの明らかな理由がある。一つはパラドクスを発見して以来、ラッセルはどんなに自明に見えることでも誤りの可能性があると考えるようになったということ、もう一つは、数学の全体系を導出するためには、論理的に自明とはいえないいくつかの公理を採用しなければならないことがはっきりしたということである。そのような公理の一つに還元可能性の公理 the axiom of reducibility があるのだが、この公理が最初に提案されたのは「数学の前提を発見する遡及的方法」と題された一九〇七年の講演においてであった。そしてこの講演の中で、基礎付け主義を採らないというラッセルの上記の姿勢が明示的に表明されている。この講演の中でラッセルは数学において論

理学が果たす役割は、数学の体系を可能な限り単純かつ原初的な前提まで遡り、そのことによって既存の知識を体系立て、誤謬の原因を取り除き、そして新たな知識を獲得する役に立てることである、と述べている。同時に彼はここで、数学の論理的な前提となる原理はそれ自体で自明なものではなく、むしろ数学において受け入れられてきた定理の導出を可能にするという事実によって正当化される、という見解を表明している。

同様の主張は『プリンキピア』でもなされている。著者たちは『プリンキピア』の主題は「数学の原理の数学的な取り扱い」(Whitehead and Russell [1910], p. v) であると述べるだけで、基礎付け主義と見なされるような主張はしていない。一九〇八年のラッセルの論文「タイプ理論に基づく数理論理学」について、グラッタン＝ギネスは「彼がはっきりと論理主義を表明していないのは奇妙なことだ。彼の企図の本質は、彼に注目していた数学者たちには明らかなことであったろうが」と述べている (Grattan-Guinness [2000], p. 384)。しかしラッセルはここではもはや基礎付け主義的な論理主義を採っていなかったのだと考えるべきである。

それではラッセルがこの論文で、そして『プリンキピア』で目指したのは何だったのだろう。また論理学や数学の原理に関する正当化は実際どのようにしてなされるのだろう。

1-2　論理学・数学の原理の経験的正当化

『原理』の時点ではラッセルは論理学を明示的に定式化した後は、定義と証明のみによって、付加的な公理を付け加えることなく数学が導出できるものと信じた。またそれゆえ逆にラッセルは純粋な論理学から導出できるものだけが純粋数学であると定義していた。しかしパラドクスが状況を一変させた。疑いようもなく正しいと思われた論理学の原理から矛盾が導かれたことによって、ラッセルはどれほど自明に思われる命題でも誤りの可能性はあると認識させられた(1)。ここからラッセルは論理学の命題といえどもそれ自体の明証性を根拠として真であるとは言えない、と考えるようにな

った。また同時にパラドクスが導出されないような論理学の体系を模索するうちに、通常の意味での論理的明証性をもたないような命題を付け加えなければ、数学の体系がそこから導出できないということも明らかになった。この二つの理由から、ラッセルは数学の原理となる論理学の命題といえども、他の自然科学における命題と同様に、その正当性は経験的に支持されるしかない、という立場を採るようになった。

物理学の仮説の場合は、その仮説から演繹される帰結が、観察や実験によって得られたデータ――ポパーやラカトシュの用語を使うなら「潜在的反証者 potential falsifiers」――に合致すれば、仮説の確証の度合いが増す。逆に仮説から導かれる結論がデータに合致しなければ、仮説は反証される。ラッセルは論理学や数学においても同様のことが行なわれるのだと主張するが、しかしもちろん論理学や数学においては、物理学におけるデータと同じ意味でのデータというものは存在しない。それ故にラカトシュは数学を「擬似‐経験的 quasi-empirical」と呼んだのである。[2] ラッセルにとって論理学・数学の前提に対して潜在的反証者になるものは、すでに真であるとして受け入れられている定理であった。

ラッセルは経験科学における知識の蓄積を、おおよそ次のような過程として描写している。まず私たちは、主に観察によって得られた事実から、かなりの確信をもって信じることができる一般的命題を得る。つぎにそこから二つの方向に推論を働かせる。一方は、これらの事実から何が帰結するか、という方向であり、もう一方は、これらの事実は何から帰結しているのか、という方向である。後者が、より単純で一般性の高い前提を探求する、帰納的な推論である。そしてこの帰納的な推論によって何らかの前提が得られたら、今度はその前提から演繹的な推論によってさまざまな帰結を導き出す。その帰結を事実と突き合わせて、それが事実に合致しているのであれば、その前提の確証の度合いが増していく。ある程度確証の度合いが増していくと今度はその前提から演繹される帰結が、その前提を根拠に信じられるようになっていく。

数学においてもこれと同じことが行なわれているのだとラッセルは主張する。ある程度発展した数学の体系において

は、出発点となる経験的な前提は、その体系における定理である。すでに受け容れられた定理を「事実」として、数学者たちは、その定理からさらなる定理を証明する。その一方で数学の基礎を探求する数学者や論理学者は、それらの「事実」から、その論理的な前提、その「原理」を探求するのである。ラッセルはそのような原理が受け入れられるための条件として、その原理がすでに受け入れられている定理の演繹を可能にすること、その原理以外にそのような演繹を可能にする良い方法が見つかっていないこと、またその原理から偽でありそうなものが導かれないことの三点を挙げる。ただしこれらの条件を満たしたとしても、その原理の正当性は絶対的なものではない。このような帰納的な正当化はどこまでいっても誤りの可能性を残している。

ラッセルのこの主張は、クワイン、ラカトシュ、キッチャーなどによって提唱される、数学的自然主義・経験主義の主張と類比的なものとして捉えられる。彼らは数学の発展を、すでに受け入れられた理論と整合的であるように、新しい概念を導入し、既存の概念と概念とを関連付け、より厳密に定義し直しながら、数学的「知識」の体系を拡大し改訂していく過程、として捉えている。したがって数学に関して堅固な基礎などはなく、むしろ体系全体が体系の各部分を支えている。クワインはこのことを「脆弱な基礎が頑丈な上部構造にぶら下がることで支えられている」と表現する(Quine [1964], p. 32)。またラッセルの方法はツェルメロなどによる、公理的方法とも類比的に考えられるだろう。実際、ツェルメロが選択公理の導入を正当化するために行なった議論は、ラッセルが還元可能性の公理を正当化するために行なった議論とほとんど同じである。(3)

確かにこの限りにおいてラッセルの主張は彼らの主張とよく似ている。しかしながらラッセルと彼らを完全に同一視することはできない。というのもラッセルにとってはあくまでも論理学・数学にとって本質的な原理があったからである。それゆえにラッセルは冒頭に挙げた二つのテーゼのうち、(L2)は放棄しても(L1)は維持する。(4) 次章ではラッセルの論理学がどのようなものだったかを論じる。

2　数学と論理学

ラッセルにとって論理学は数学を正当化するものではない。逆に数学的知識として既に受け入れられている命題が、その前提となる論理学を正当化する。このように説明する際、ラッセルは数学の体系を演繹する公理となる論理学の命題を「論理的な前提」、そしてそれを経験的に正当化する数学の命題を「経験的な前提」と呼ぶ。フレーゲやラッセルが数学に対して行なったことは、数学の論理的な前提となっているものを可能な限り追求し、そこに論理学的な概念しか現れないところまでさかのぼって見せたことである。そこで採用されている公理の中には、通常の意味で論理的に真であるとは言えないものが含まれている。しかしそこから数学の全体が導けるということが、それらの公理を採用することを正当化する。ラッセルはそれらの公理が真であるとは言わず、これこれの公理が真であるとすれば、これこれの体系が論理的に帰結する、と言うに留める。(5)

ここで問題にしたいのは次の二点である。第一に、もしも既存の数学の体系がその前提となる公理を正当化するのであれば、わざわざ明証性の低い「論理的な前提」にさかのぼることの意義はどこにあるのか。第二に、このような態度は結局、数学を導けるならばどのような体系でも良いという結論を導きはしないか。本章ではこの二つの点について考察する。

2-1　認識論的意義

数学をより基本的な前提にまでさかのぼることの意義は、それが誤謬の源を除去する、既存の知識を系統立てる、新しい知識を増やす、という三点に存している、とラッセルは主張する。この主張は『数学の原理』から『プリンキピア』に至るまでに、ラッセルの数学の哲学がいかに変化しているかを端的に示している。この変化は「論理主義」とい

うラベルに隠されて、これまであまり注目されて来なかった。あるいは注目されても彼の「論理主義」と整合的でないものとして否定的に論じられてきた。例えばラカトシュはこれを「混乱」と呼び、グラッタン＝ギネスは「悲しき妥協」と呼んでいる（Lakatos [1962], p. 11, Grattan-Guinness [2000], p. 380）。しかし近年はヘイガー、アーヴァインなどによってより肯定的な仕方で評価が与えられている。ヘイガーはこのような態度が、概念の論理的分析という手法に関するラッセルのより一般的な哲学と整合的であることを主張する。またアーヴァインは数学の前提へとさかのぼるラッセルの方法の認識的な意義について論じている(6)。

後者の論点は、ラッセルの解釈という枠に留まらず、数学の基礎に関する仕事がどのようなものでありうるかということの一つの例を与えるものとして興味深い。アーヴァインは次のように言う。

数学のある分野に対する論理的な基礎というのは、すべての数学的命題の真理を一度きりで確立することを試みるという意味での、文字通りの基礎ではない。むしろ数学における基礎的な仕事というのは自然科学における基礎的な仕事と比較しうるものである。つまり、論理的な基礎というものは、数学の真理を証明することではなく、説明することによってその仕事を行なう。（Irvine [1989], p. 318）

アーヴァインがラッセルからこのような結論を引き出していることは、ラカトシュの「論理学は数学を説明するかもしれないが、証明することはできない」（Lakatos [1962], p. 19）という言葉と比較するとなおさら興味深い。これをラカトシュは「ラッセルが引き出すことを拒否した結論」（*ibid.*）と言うが、しかし実はこれこそがラッセルのたどり着いた結論なのである(7)。

具体的に論理学が数学をどのように「説明」するかを考えてみよう。ペアノは原始概念として、論理結合子、個体変項、述語変項の他に、非論理定項として「0」、「後続者関数」、「同一性関係」を採用するだけで、そこから自然数の集合と算術の命題が導出できることを示した。フレーゲはさらにペアノの採用した非論理定項が、個体変項と述語変項お

よび述語の外延に還元できることを示した。これによって算術は論理学で使われる概念以外に、具体的な対象や概念を何一つとして要請せずに記述できることが分かった。フレーゲの論理主義はパラドクスによって破綻することになるのであるが、しかしフレーゲの分析が、数という概念について一つの重要な哲学的洞察を与えたことには変わりがない。

またパラドクスが導出されたこと自体も、数というものを扱う際に用いられる思考の様式が内包している困難を明らかにするきっかけを作ったという意味では、積極的に評価できる。フレーゲの体系から矛盾が導かれたのは、フレーゲの体系の定式化に問題があったというよりも、数を取り扱う思考そのものが矛盾の危険性をはらんでおり、その遂行において慎重さが要求される場合があるという理由による。(8) このように、以前は認識されていなかった困難を明らかにすることにこそ論理的分析の意義が存するとラッセルは考える。そこでラッセルはこの危険性の原因を明らかにし、それを取り除きつつ、なおかつ数学の全体系を導出できる論理体系を構築しようと試みた。

2-2　ラッセルの論理学

ラッセルのパラドクス以前にも超限順序数に関してブラリ＝フォルティのパラドクスが発見されていたが、ラッセルのパラドクスは超限順序数という特殊で複雑な概念を用いず、集合論や高階述語論理が本質的な部分で含んでいた概念から矛盾が導かれることをより明確に示した。ラッセルは自身の発見した矛盾やその他の矛盾の導出には、定義における循環という共通の性質があることに注目し、そのような循環を禁じる理論として、分岐タイプ理論を立てた。これは述語の持つ変項に代入することが可能な値に対してタイプとオーダーという制限を課すことで、矛盾の原因となった循環的な定義を禁じるというものであった。一言で言えばタイプの区別とは述語がどのような値をとる変項を持っているかということによる区別である。これは個体のタイプから始まって、個体を値にとる変項を持つ述語のタイプ、個体を値に取る変項を持つ述語を値に取る変項を持つ述語のタイプ、と段階的に定義される。例えば「xは青い」と「Fは色

である」という二つの述語は異なるタイプを持つ。というのも「x」には個体的対象が代入されるのに対して「F」には個体の性質を表す述語が代入されるからである。またオーダーの区別とは述語がどのようなタイプの対象を表す束縛変項を含んでいるかということによる区別である。例えば「xは青い」と「xは空と同じ色を持っている」とはタイプは等しいがオーダーは異なる。というのも後者は正確には「空に当てはまるある性質Fが存在し、Fは色であり、xはFである」を表し、ここには個体に当てはまる述語に対する量化が含まれているからである。

もしも述語の中にオーダーによる区別がなく、同じタイプの述語の全体が同じ変項の引数として許されるのであれば、この述語は自分自身を含む集まりの全体に言及することによって定義されることになる。分岐タイプ理論は一言で言えばこのような自己言及的な述語を排除する理論である。

ラッセルは分岐タイプ理論によってパラドクスを避けることが出来た。ただし上述のブラリ＝フォルティのパラドクスやラッセルのパラドクスを避けるという目的のためにはタイプの区別だけがあれば十分で、オーダーの区別は不要である。オーダーの区別は、ラムジーが「意味論的パラドクス」と呼んだパラドクスの解決に必要なものだったが、ラムジーは、それらのパラドクスは言語的定義の上でのパラドクスに過ぎず、数学や集合論の本質には関係がないと批判した。しかしながらラッセルにとって、オーダーの区別は単にパラドクスを解決するためのアド・ホックな方便ではなく、述語にとって本質的なものであり、満足のいく論理学の理論であれば、適切に組み込むべきものであった。(9)

彼らの見解の違いは一つには述語や集合という対象に対する態度に起因している。ラムジーは述語をその外延からなる集合と同一視し、そして集合自体はそれを定義する方法から独立に存在する対象であると考えた。一方ラッセルは、集合は述語から定義されるべき派生的な対象であり、したがってある集合に言及するにはその集合を定義する条件に言及することが避けられないと考えた。ここからある集合が何らかの集まりの全体に言及することによって始めて定義される場合、その集まりの個々の成員は、定義される集合よりも存在論的に先行するということが帰結する。

ラッセルが、集合は述語に還元されるべきであると考えた理由はいくつか挙げられる。一つには空集合や無限集合を取り扱うには、外延的に取り扱うことは不可能で、それを規定する条件に言及するしかないと思われたこと、また集合という複数の対象から構成される存在者がそれ自体一つの対象として扱われなければならないことが不合理に思われたことなどである。この問題はより一般的に、表示句による対象指示に関する困難として、パラドクスの解決とは異なる文脈で扱われていた。ラッセルは表示句による指示を含む命題を、その表示概念（性質）への言及しか含まない文へと分析する、「記述の理論」によって問題の解決をはかった。ところが後にこの解決策とパラドクスの問題との間の「思いがけない結びつき」が明らかになったという（Russell [1959], p. 61）。ラッセルは理解可能な命題と現実世界の間には密接な対応関係がなければならないという意味論的原則（これを「対応の原則」と呼ぶことにする）を常に持っていたのであるが、記述の理論と対応の原則からラッセルは、存在者としては個別的なセンス・データと、センス・データの持つ性質だけを要請すれば十分であり、それ以外の存在者はすべてこれらから構成できる、と主張するようになる。ラッセルの分岐タイプ理論はこのような原子論的な存在論を反映したものであり、[10]この存在論はまた「存在するものは何であれ一である」という古い格率の忠実な実現であるとラッセルはいう（Russell [1906a], p. 189）。

このようにラッセルの論理学は哲学的なバイアスが強くかかったものだったといえる。しかしそのこと自体は非難するべきことではない。ラムジーらにしても哲学的なバイアスから自由だったわけではないし、結局のところ、当時数学の基礎について深く考えていた数学者・論理学者の中に、哲学的なバイアスを持っていなかった人間がどれだけいただろう。問題はそのバイアスが数学的な洞察に富むものであるか、数学的に実りのあるものであるかどうかである。

分岐タイプ理論は構成主義的な構文論であって、対応の原則を採用した意味論とともに構成主義的な数学のモデルを表現する。このモデルにおいて数学的概念は、数学を実践する主体、すなわち数学の言語を使って論証を行なう主体の活動から独立に存在しているわけではない。既存の概念から定義によって新しい概念が導入され、そのようにして導入

された概念がさらに新しい概念の導入を可能にする。この世界は定義や特定といった関係に関して「閉じて」いない。これは単に世界がそのように規定あるいは想定されたということではない。ラッセルにとってもそもそれらの関係に関して世界が閉じたものであると考えることは不可能なのである。というのも世界が閉じていると仮定したとき、その世界に存在する何らかの対象の全体に言及することで、その世界に含まれない新しい概念を定義することができるからである。(11)

数学的概念についてのこのような捉え方は、決して無用な哲学的思弁ではない。とくに定義、証明、計算といった、実際的な手続きの遂行可能性ということを考える際には、このような再帰的な構成、述定的な思考法というものが意味をなす。それゆえにラッセル以後にも再帰的な関数論・計算論、述定的な論理学・集合論の研究が行なわれたのである。ラッセルの理論の不都合な点は、述語に対して強い構成主義を採りながら、プラトニスティックな態度で行なわれていた従来の集合論、実数論をそこから構成することを望んだ点である。言い換えれば、ラッセルは論理学に関しては構成主義、数学に関してはプラトニズムを取っていたのである。そのためにラッセルは還元可能性の公理を要請し、結局のところ構成主義的に作り上げた世界を台無しにしてしまった。ラッセルの論理体系は構成主義的な構文論と、プラトニスティックなモデルを持つというちぐはぐなものになった。そのためにラッセルは構成主義者の陣営からもプラトニストの陣営からも批判を受ける羽目になったのである。

しかし数学の基礎についてのその後の研究の趨勢は、むしろラッセルの行なったこと（思想ではなく）を支持する傾向にある。ラッセルは構成主義的な立場にもとづいて論理体系を構築したが、その体系に固執して既存の数学を放棄することはせず、いくつかの公理を加えることで彼の論理体系が集合論と同等になることを示した。ラッセル自身は、論理学はかくあるべし、という信念を持っていたにもかかわらず、彼はその論理学に固執して数学を犠牲にすることはしなかった。その代わりにラッセルは論理学の最も本質的であると思える理論と、それほど本質的ではないが数学にとっ

て必要な部分を区別しながら提示した（ただしこの区別も明確な境界線が引けるものではないが）。二〇世紀半ば以降、数学の基礎に関する哲学的な論争は、これという勝者のいないまま終息し、数学の基礎にかかわる研究者の中では、カルナップの「寛容の原理」に代表されるように、特定の哲学的・形而上学的立場にコミットして数学の研究を制限する必要はない、と考えるのが一般的な見解になっているように思われる。クワインやキッチャーの自然主義はもちろん、他にも例えばメールバーグの「多元的論理主義」、ジャン＝ピエール・マルキの「カテゴリー的論理主義」、ソーンダース・マクレーンの「機能的形式主義」、レスニクやシャピーロの「構造主義」など、すべて寛容の原理を受け入れた立場である。彼らが共通して持っているのは、実際の数学者の行なっている研究を受け入れた上で、異なる理論間の関係を探求する、あるいはそれらの理論の背景にあるより一般的な原理や構造を明らかにする、という態度である。ラッセルの論理主義自体はもちろん寛容の原則とは相容れるものではない。しかしラッセルが実際に行なったことは、数学の基礎に関わる現代の研究者が行なっていることに近いものである。

結　論

以上の議論で私たちは、一般的な理解に反して、ラッセルが基礎付け主義をとっていないこと、しかし公理論や自然主義とは異なる、やはり論理主義と呼ぶべき立場を保持していることを見た。ラッセルの論理主義の要点は（Ｌ１）にある。そして（Ｌ１）を遂行することは単に形式化の問題ではなく、認識論的にも意義のあることだとラッセルは考えた。

ラッセルは（Ｌ１）を遂行する過程で、彼の存在論と対応の原則に導かれて、分岐タイプ理論を構築した。この理論は数学の体系を導出するのに十分なものではなかったが、しかしいくつかの（必ずしも論理的とはいえない）公理を加えることで、数学の導出が可能になることをラッセルは示した。このことによって彼は数学の基礎となりうる一つの論

理体系を提示し、その中で論理学にとって本質的であると彼が考えた部分と、そうでない部分を区別したのである。
ラッセルのこのような折衷的な態度は様々な批判を受ける原因になったが、しかし寛容の原則を受け入れる立場からはむしろ正当化される。またラッセルが論理学に関して本質的であると考えたタイプ理論は、古典的数学の文脈においては不興を買っているが、述定的な思考法が重要であると考えられる文脈では積極的に受け入れられ、より洗練された形で発展させられている。

注

* 本論文は博士論文として京都大学文学部文学研究科に提出された拙論『ラッセルの論理主義』の口頭試問において、伊藤邦武教授、内井惣七教授、出口康夫助教授から受けた示唆に基づいて書かれた。筆者は三氏に多くを負い、そして感謝している。

(1) 論理主義者にとって、ある論理学の命題を真であると認識させる証拠は確実なものでなければならないと解釈するポアンカレに反論する際、ラッセルはそのような考え方は、「非常に自然」な誤解であるといい、ラッセル自身も「矛盾に出会うまではその誤解を共有していた」と言う。Cf. Russell [1906b], p. 193.

(2) Cf. Lakatos [1976a], [1976b].

(3) Cf. Zermelo [1908], pp. 186ff.

(4) 後にチャーチも同様の立場を採っており、ヘンリー・メールバーグはそれを「穏健な論理主義」と呼んでいる（Mehlberg [1960], p. 67）。

(5) このような態度は実のところ『原理』の頃にも既に持たれていた。例えば§5。パットナムはこれを「if-thenism」と呼ぶ。

(6) Cf. Hager [1997], Irvine [1989].

(7) ラカトシュがラッセルを誤解したのも理由のないことではない。彼がこう書いた当時には、『原理』と『プリンキピア』の間のラッセルの思想の変遷を示す文献がほとんど手に入らなかったのである。

(8) パラドクスの多くは定義における非述定性（次節参照）から生じるが、自然数の概念には本質的に非述定性が含まれているとパーソンズは主張する。Cf. Parsons [1967].

(9) Cf. Russell [1959], p. 61.
(10) Cf. 久木田 [2005].
(11) Cf. Priest [2002], §9.

文　献

Grattan-Guinness, I. [2000] *The Search for Mathematical Roots 1870-1940: Logics, Set Theories and The Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel*, Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Hager, P. [1994] *Continuity and Change in the Development of Russell's Philosophy*, Dordrecht, Boston and London: Kluwer Academic Publishers.

Irvine, A. D. [1989] "Epistemic Logicism and Russell's Regressive Method," *Philosophical Studies*, 55, 303-327.

Lakatos, I. [1962] "Infinite Regress and Foundations of Mathematics," Lakatos [1978], 3-23.

——— [1976a] "A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics?" Lakatos [1978], 24-42.

——— [1976b] *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

——— [1978] Worrall J. and Currie G. (eds.) *Mathematics, Science and Epistemology* (*Philosophical Papers, volume 2*), Cambridge: Cambridge University Press.

Marquis, Jean-Pierre [1993] "Russell's Logicism and Categorical Logicism," Irvine and Wedeking (eds.), *Russell and Analytic Philosophy*, Toronto, Buffalo and London: University of Toronto Press, 1993, 293-324.

Mehlberg, H. [1960] "The Present Situation in the Philosophy of Mathematics," Dale Jacquette (ed.), *Philosophy of Mathematics*, Oxford: Blackwell Publishers LTD, 2002, 65-82.

Parsons, C. [1967] "The Impredicativity of Induction," Detlefsen (ed.), *Proof, Logic and Formalization*, London and New York: Routledge, 1992, 139-161.

Priest, Graham [2002] *Beyond the Limits of Thought*, Oxford: Clarendon Press.

Putnam, H. [1967] "The Thesis that Mathematics Is Logic," *Mathematics, Matter and Method: Philosophical Papers, volume 1*,

second edition, Cambridge: Cambridge University Press, 1979, 12-42.
Quine, W. V. O. [1964] "Foundations of Mathematics," *The Ways of Paradox and Other Essays*, revised and enlarged edition, Cambridge, Massachusetts and London: Harvard University Press, 1966, 22-32.
Russell, B. [1903] *The Principles of Mathematics*, second edition, London: Routledge, 1937.
——— [1905] "On Denoting," Russell [1956], 41-56.
——— [1906a] "On the Substitutional Theory of Classes and Relations," Russell [1973], 165-189.
——— [1906b] "On 'Insolubilia' and their Solution by Symbolic Logic," Russell [1973], 190-214.
——— [1907] "The Regressive Method of Discovering the Premises of Mathematics," Russell [1973], 272-283.
——— [1908] "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types," Russell [1956], 57-102.
——— [1919] *Introduction to Mathematical Philosophy*, New York: Dover Publications, Inc, 1993.
——— [1956] Robert Charles Marsh (ed.) *Logic and Knowledge*, London and New York: Routledge, 1992.
——— [1959] *My Philosophical Development*, London, Sydney and Wellington: Unwin Hyman Limited, 1985.
——— [1973] Douglas Lackey (ed.) *Essays in Analysis*, New York: George Braziller, Inc.
Shapiro, S. [1991] *Foundations without Foundationalism: a Case for Second-order Logic*, Oxford: Clarendon Press.
van Heijenoort, Jean [1967] (ed.) *From Frege to Gödel*, Cambridge and London: Harvard University Press.
Whitehead, A. N. and Russell, B. [1910] *Principia Mathematica, volume I*, second edition, Cambridge: The Syndics of the Cambridge University Press, 1927.
Zermelo, E. [1908] "A New Proof of the Possibility of a Well-Ordering," van Heijenoort [1967], 183-198.
久木田水生 [2005]「ラッセルの記述の理論とタイプ理論の関係について」『哲学論叢』第三二号、四八―五九。

(筆者　くきた・みなお　龍谷大学文学部非常勤講師／哲学)

Non-foundationalistic interpretation of Russell's logicism

by

Minao KUKITA

Part-time Lecturer

Ryukoku University

It is widely believed that logicists, such as Frege and Russell, attempted to secure the certainty of mathematics by reducing it to logic, but only in vain. However, this is not the case with Russell, at least after the discovery of set-theoretic and logical paradoxes, when Russell became doubtful even about the certainty of logical principles. Moreover, in his struggle to find a way to avoid these paradoxes, he found himself obliged to admit some axioms into his system that are far from logically true. For these reasons, Russell gave up his intention to found mathematical truth on logic, and took a position quite opposite to his former one. He claimed that mathematics cannot be justified by self-evident principles of logic, but that logical premises of mathematics are justified by the fact that these premises enable us to deduce the whole body of existing mathematics. Then it follows that logical principles are less evident and less certain than mathematical theorems. By reducing mathematics to logic, Russell didn't intend to give mathematics a firm foundation, but to elucidate what is basic to mathematical concepts like sets, relations, or natural numbers, and what premises are essential to mathematical theorems.

This may sound like a claim of a mathematical naturalist such as Quine, and what Russell did seems almost the same as what, for example, Zermelo did when he constructed his axiomatic set theory. Although Russell has much in common with them, he is still different from them in some crucial respect. For him, there was further requirement for a system to be logical, and it has much to do with his general philosophy and ontology.

In this article, I will try to characterize Russell's logicism, and then show what significance it has, from a philosophical as well as mathematical point of view. The conclusion will be as follows. Russell's logicism can be characterized as an attempt to make clear what the subject matters of mathematics are and what mathematics says about them. He first founded a strictly constructive logical system —— called the ramified theory of types —— and then showed that, when supplied with some additional axioms, it will become equivalent to set theory.