概念の外延・文脈原理・フレーゲ構造

大西琢朗

一　はじめに

本論の目的は、フレーゲの『算術の基本法則』における「概念の外延（関数の値域）」の理論を検討することである。数をはじめとする数学的対象とは、いったい何だろうか。この伝統的な問題は、「算術が論理の一部であると示すこと」を目標とする、フレーゲの論理主義プロジェクトにとっても最重要の課題であり、その答えが「算術の対象はすべて、概念の外延として定義しうる」であった。本論はこの答えを吟味し、さらに「救済策」を探り、論理主義の再評価を行いたい。次のような手順で議論を進める。まず二節で、概念の外延とは何か、その「論理的対象」としての素性を明らかにしておく。フレーゲの外延の理論は、実際には概念記法という論理体系と、その意味論という形で与えられており、その中では、いわゆる「文脈原理」が用いられている。三節でその議論を追うことにする。ところで「救済策」が必要なのは、彼の理論はラッセル・パラドクスを導き、矛盾しているからである。四節では、その矛盾の原因を探り、五節でその救済策として、アクゼルの「フレーゲ構造」の理論を紹介する。そして最後に、文脈原理を利用した意味論と、フレーゲ構造の構成法から、フレーゲの論理主義プロジェクトとはそもそも何だったのか、その再定式化を目指そう。

二　概念の外延

概念の外延とは、直観的には、当の概念が当てはまる対象たちの集まりである。だから、次のような包括原理が成り立っているはずである。

(CP)　$a \in \{x \mid f(x)\}$ iff $f(a)$

すなわち、任意の概念 f と対象 a について、a が概念 f の外延に入っているのは、$f(a)$ が成り立っているときそのときに限る。外延とは、その中に対象が入ったり入らなかったりするものである。そして、その規準は、その対象に元の概念が当てはまるかどうか、つまり、「$f(a)$」という命題の真偽によって決まる。その真偽が何によって決まるのであれ、「何かと成員関係に立つ」という外延の中心的な機能は、真偽の観念で説明が尽くされる。

対象に概念が当てはまる規準と、その外延の成員関係の規準は、まったく同じである。その意味で、外延とは概念の対象化されたもの、と考えることができる。フレーゲは、概念の外延でもって、その上で全算術（実数論までを含む）を展開するに足る、数学にとって基礎的な対象領域を与えようとした。外延という観念に、そこまでの期待ができるのはなぜだろうか。それは、上の包括原理が示す、命題の観念とのつながりにおいてである。

命題は、論理定項を介して、他のさまざまな命題と前提・帰結関係で結びつく。言語の中で、命題たちはネットワークをなしている。概念の外延という観念は、そのネットワークを用いて、無限に多様な数学的対象の領域を構成するためのものである。例えば、$a \in \{x \mid f(x)\}$ なら、$f(a)$ という命題が成り立つ。この命題からは多くの命題が帰結するだろう。もし、$g(a)$ という命題が帰結するなら、今度は $a \in \{x \mid g(x)\}$ が成り立ち、$\{x \mid f(x)\}$ と $\{x \mid g(x)\}$ という二つの対象の間に関係がつく。こうして、さまざまな数学的対象とそれらのさまざまな性質、関係が表現できる。外

延が、そのような数学的対象としてふるまうことができるのももちろん、$a \in \{x \mid f(x)\}$からできる命題$f(a)$たちを介して、である。それゆえ、外延は、他の多様な命題たちと多様な論理的関係に立つ、命題たちの束（土屋、二〇〇七、二九〇参照）と考えられる。その意味で外延は、フレーゲにとって、論理的対象であった。

しかし、そのような対象はどこに存在するのか？　その存在をわれわれはいかにして知りうるのか？　これは、数学的対象に関する存在論的・認識論的問題に他ならない。フレーゲは、この問題に直接はアタックしない。彼はいつでも、数学に関する哲学的問題に、言語とその意味の観点からアプローチしようとする。『基本法則』は、外延表現を含む形式言語に意味を与え、そのことでもって問題の解決を図る。外延表現に意味が与えられたなら、その表現が指示するものとしての外延の存在は疑いえないし、外延とは何かという問題は、表現の理解の問題に帰着する。ただし、その意味論を与える際にはもちろん、外延の存在とそれらへの認知的アクセスを前提するわけにはいかない。それを避けつつ、いかにして意味を与えるか、が問題である。

三　『基本法則』の意味論と文脈原理

『算術の基本法則』で提示された論理的言語、概念記法は、算術のための普遍的言語でもある。概念記法は外延を意味（bedeuten）する表現、外延名を語彙として持ち、さまざまな数学的対象は、外延を用いて定義され、それらの諸性質・関係が概念記法の中で証明される。では、その外延とは何か。『基本法則』の意味論は、外延名に意味（Bedeutung）を与える、すなわち外延名の指示ないし表示を定めることで、その問いに答えを与える。以下では、概念記法のシンタクスを簡単に説明した後、外延名に対する意味付与のための原理、文脈原理を中心に、『基本法則』の意味論を概観する。

三・一　シンタクス

概念記法の原初記号としてここで考えるのは、次の六種類である。(1)

同一性 $\xi=\zeta$;　水平線 $-\xi$;　否定 $\neg\xi$;

含意 $\xi\supset\zeta$;　普遍量化 $\forall x\Phi(x)$;　外延 $\{x|\Phi(x)\}$;

これらはすべて、空所（ギリシャ文字で表した部分）をもつ関数名であり、最初の四つは一階関数名、量化子と外延オペレータは二階関数名である。例えば外延オペレータに一階関数名「$f(\xi)$」を充当すると、空所のない表現「$\{x|f(x)\}$」ができる（これを外延名と呼ぼう）。このような空所のない表現は名辞であり、一階関数名の空所に充当できる。同一性「$\xi=\zeta$」に二つの外延名「$\{x|f(x)\}$」と「$\{x|g(x)\}$」を充当すると、名辞「$\{x|f(x)\}=\{x|g(x)\}$」ができるが、このような表現は**文**と呼んでよかろう。(2) 原初記号には、論理定項に当たるものも入っているので、複合文も形成可能である。ただし、文（式）と名辞（対象定数・変数など）を区別する現代の標準的述語論理とは異なり、文が名辞の一種であるところが、概念記法のひとつの特徴である。さらに、先ほどの名辞「$\{x|f(x)\}=\{x|g(x)\}$」から、例えば「$\{x|g(x)\}$」を**除去**すると、空所を持つ関数名「$\{x|f(x)\}=\zeta$」ができる。こうした複合的関数名ないし述語を形成できるのも、概念記法の特徴である。

この**充当**と**除去**を形成操作として、原初記号から任意の複合表現が形成される。それゆえ、概念記法は、充当によって（型付の）関数の**適用**を、除去によって（型付の）関数の**抽出**を表現する体系であると考えられる。ただし、その中で、論理定項とそれが作用する文によって、推論過程、すなわち証明が表現できる論理体系でもあり、外延オペレータにより、関数（概念も関数の一種である）を対象化する作用を備えた体系でもある。

三・二　意味論

現代の標準的なモデル論でこのような形式言語に意味を与える際、最初に用意するのは、名辞の意味として割り当てられるべき、対象の領域である。われわれは、まず各名辞にそれらの対象を割り当て、述語や関数名に、その領域上の種々の構造（関係・関数等）を割り当てる。ここで、それらの対象がどのようなもので、その領域の上にはどのような構造が入っているか（入れられるか）は、通常は公理的集合論の宇宙の中の、数学的対象なり構造として、意味論を与える前に、既知のものと前提される。しかし、フレーゲはこのような前提は置かないし、置けない。彼が取り組んでいるのは、そのような数学的対象とは、そしてその基礎にある外延とはそもそも何なのか、という問いなのである。対象領域を所与として、その要素を外延名に割り当てる、ということはできない。ではどうするか。概念記法の意味論を駆け足で概観することにしよう。

対象領域　まず、概念記法の名辞は（文を除けば）外延名だけなので、名辞の意味、すなわち対象の領域は外延のみからなる、と想定できる。もちろん、その領域の存在を仮定しているのではない。ここで想定されているのは、概念記法という形式言語の意味論のためには、その中の名辞で名指しうるものだけが必要にして十分であり、何であれ外延以外のものを考慮する必要はない、ということである。この想定が以後の議論に効いてくる。

この対象領域に対しては、対象同士の同一性規準のみを定めておく。すなわち、存在するかどうかはともかく、もし外延なるものが与えられたら、それらが同じかどうかは判定できるようにしておく。この規準は、概念記法の公理のひとつ、すなわち基本法則Vの意味論バージョンとして与えられる。すなわち、任意の一階関数fとgに対して、

$$\text{(V)} \quad \{x \mid f(x)\} = \{x \mid g(x)\} \quad \textit{iff} \quad f(a) = g(a) \quad \textit{for all } a$$

fの外延とgの外延が同一であるのは、すべての対象aに対して$f(a)$と$g(a)$が同一であるときそのときに限る、と

する（GGAI 3, 9)。

真理値　概念記法の表現には、文に当たる名辞がある。対象領域が外延のみからなるとしたら、名辞としての文は何を意味するのか。フレーゲの考えは、対象領域の中の二つの外延を、**真理値**として指定してやることだった。すなわち、次のように取り決める。

　真理値真とは $\{x \mid -x\}$ のことであり、**真理値偽**は $\{x \mid x = \neg\forall y(y=y)\}$ である。

真理値偽は、矛盾と同じものの集まり（〝偽なるもの〟の集まり）である、と考えられるだろう。一方、真理値真は $-\xi$ なる概念の外延、水平線関数の値域であるとする。この水平線は後で検討するが、入力が真のときには真を、それ以外のときには偽を返す、という不思議な関数である。この概念が当てはまるものの集まりということだから、真とは、いわば〝真なるもの〟の集まりと考えてよい（cf. GGAI 10, 31)。

文脈原理　これらの準備のもと目指すのは、外延名の意味を定めることである。そのために、フレーゲは次の**文脈原理**を仮定する。

　ある名辞「a」に意味が与えられたというためには、「a」を任意の一階一項関数名「$f(\xi)$」の空所に充当したとき、できる名辞「$f(a)$」に意味が指定されていること、これが十分条件である。[3] (cf. GGAI 29)

対象領域とは、名辞の意味の領域であると同時に、一階関数の定義域（及び値域）でもある。二階関数は一階関数を定義域とし、さらに高階の関数も同様。対象領域とは、その上で関数たちが立ち働くための基盤となる場所である。文脈原理が主張するのは、すべての関数を確定した出力を出すように定められたなら、そのことにより、その定義域としての対象領域が確保される、ということに他ならない。

　この原理の妥当性については後で検討するが、ここで指摘できるのは、このような関数観の特異性である。現代の公理的集合論では、例えば集合Aから集合Bへの関数は、入出力対の集合、すなわちグラフであって、直積$A \times B$の部

分集合である。つまり、定義域（及び値域）の構成は、関数の構成に先立つ。文脈原理はこの見方と真っ向対立する。フレーゲは、関数とその定義域を同時に確定させようとしている。それはどういうことか、そのようなことは可能なのか、引き続き彼の手続きを見ていくことにしよう。

原初的関数　目標は、任意の一階関数の、外延に対する値を定めることである。しかし、すべての関数を見る必要はない。一階の原初記号の値さえ決まれば、後の任意の関数名は原初記号から形成されるから、その値も確定する。すなわち、概念記法では一種の**合成原理**が成り立つのである（cf. GGA I 30）。それゆえ、検討すべきは一階の原初記号が意味する関数（原初的関数と呼ぼう）、すなわち同一性、否定、水平線、含意だけである。

同一性関数の働きは、すでに（V）により定められている。そして、これで実質的には話は終わりなのである。水平線関数―ξは、入力真に対しては真を、それ以外の入力に対しては偽を返す関数としたい。真理値も外延であるから、任意の入力に対して、それが真理値、特に真と同一かどうか、われわれは（V）を使って判定できる。つまり、任意の入力に対して、水平線関数の値が確定できる。そして、否定と含意は、水平線を内蔵しているものと考える。すなわち、「┬ξ」は「┬(―ξ)」と、「ζ⊃ξ」は「(―ζ)⊃(―ξ)」と考える。水平線関数の出力は常に真偽いずれかの真理値だから、否定と含意に対する入力は常に、水平線関数を通した真理値として与えられる。それゆえ、われわれにもなじみの、（古典論理の）真理関数として定めることができる（cf. GGA I 31）。

原初的関数についてこのように定めてやれば、後は合成性により、任意の関数の値も確定する。文脈原理により、対象領域が確定され、その中の要素を名指す外延名の意味も確定する。これが彼のとった手続きである。この手続きについての検討に移ろう。

三・三　文脈原理

問題は二つに分かれる。このような手続きで本当に外延名の意味は与えられたのか、という問題。そして、なぜフレーゲはこのような手続きが可能だと考えたのか、という問題。最初の問題に対しては、明らかにノーである。ラッセル・パラドクスにより、矛盾が生じるからである。われわれが目指すのは、その失敗の原因を突き止め、ありうる救済策を考えることで、フレーゲから可能な限りの洞察を引き出すことにある。その出発点は、第二の問題に答えることだろう。すなわち、なぜフレーゲは文脈原理が正しいと考えたのか。

まず、上の意味論で定められたのは、原初的関数のふるまい、すなわち入力が与えられたと仮定したときの処理の仕方だけであって、入出力対が実際に構成されたわけではない、ということに注意しよう。次に、外延オペレータ以外の、現代のわれわれであれば「論理定項」と呼ぶ原初的関数（量化子も含む）はすべて、何かを値としてとるとすれば真理値だけである。つまり、外延名の意味を定めるためにフレーゲが行ったのは、実際には、同一性規準（V）を〝原子文（命題）〟として、そこから論理定項を使って形成される、論理的複合命題、ないし文の真理条件の規定だと言える。文の真理条件は、その文が表わす事態のようなものだと考えられるだろう。フレーゲが目指したのは、そのような（無限に多様な）事態が存立しうる世界、つまり自然数や実数などの数学的構造を包含した、外延の領域の確立である。しかしフレーゲは、真理条件を定めさえすればそのような構造が生成される、とストレートに考えていたわけではない。定められたのは、関数（論理定項・文）のふるまいだけである。これは、もし事態の基礎的な構成要素、すなわち外延という対象が与えられたなら、そこからさまざまな複合的な構造がその上に構築できる、ということにすぎない。

しかしここで、別種の構造がすでに生じていることに気づくべきである。文の真理条件が定まったということは、命題たちがなす論理的なネットワーク、それらの間の前提・帰結関係からなる構造が生成されたということに他ならないのである。ただし、この構造は、概念記法という言語の外側で成立し、概念記法によって描写される、そのような構造

ではない。概念記法という言語を設定し、それに意味論を与えることにより成立する、その言語自身の構造である。

ここで、外延$\{x|f(x)\}$とは、命題$f(a)$たちの束であったことを思い出そう。フレーゲの意図は明白である。外延は、命題を通して、つまり言語の内部で成立している論理的構造のみに依拠して、さまざまな性質を持ち、他の外延とさまざまな関係を取り結ぶことができる。つまり、数学的構造を、言語の構造を使って構築できるのではないか。

原初的関数の定め方からわかるとおり、外延が任意の関数に入力される際には必ず、(V)を通して$f(a)$の形に変換され、他の$g(a)$との同一性の判定が行われる。もし、これらがまた別の外延の形をしているなら、再び(V)を適用して「$\{\ |\ \}$」を外す。それを繰り返して〝同一性〟を、最終的には真理値が同じかどうか、すなわち論理的同値かどうかの判定にまで還元する。そこまで還元できたら、あとは真理条件に従う論理的な推論である。

外延に対する原初的関数のふるまいを決め、そこから合成性を使ってすべての関数のふるまいを決めるということは、したがって、外延$\{x|f(x)\}$が束ねている命題$f(a)$たちの、論理的なネットワーク上の位置を定めることに他ならない。そしてそれが定まれば、外延の素性から言って、それ以上に要求すべきことは見当たらない。つまり、外延名に意味が与えられたと言ってよい。こうして、事態の構成要素たる外延が与えられたなら、その上の関数をはじめとして、実質的な数学的構造を構築することができるだろう。

以上が、文脈原理を利用した『算術の基本法則』の意味論の見取り図であり、それに対してフレーゲが与えうる哲学的な正当化であると考える。ここに循環的な状況を見てとることは容易い。フレーゲは、ある言語がそれについて語りうるものを、その言語自身の構造を用いて構築しようとしているのである。この試みは、先に言及したように、関数とその定義域を同時に定めようということでもある。関数のふるまいだけを決め、それらがなす論理的構造から外延を抽出し、それを元の関数の定義域とする。ダメットなどは、この循環的な手続きを、フレーゲ哲学の根本的な誤りとして批判してきた(cf. Dummett 1991, 220-222, 231-240)。しかし、確かにフレーゲの議論はトリッキーではあるものの、ど

こで間違ったのかは、直ちに明らかではない。救済策としての「フレーゲ構造」を見据えつつ、次節では、失敗の原因を突き止めることを目指そう。

四　失敗の原因

『基本法則』の言語では、成員関係を次のように定義できる（cf. GGA I 34）。

$$a \in b \equiv \exists f(b = \{x \mid f(x)\} \,\&\, f(a)).$$

「∃」や「&」はもちろん、他の論理定項から普通の仕方で定義されたものである。この成員関係のもとで、包括原理が成り立つ。

$$\text{(CP)} \qquad a \in \{x \mid f(x)\} \quad \mathit{iff} \quad f(a).$$

量化子は省略しているが、ここでのaはもちろん、すべての対象の上を走る変数である。それゆえ、外延$\{x \mid \neg(x \in x)\}$に対し、それ自身が入っているかどうか考えよ。（CP）より、

$$\text{(R)} \qquad \{x \mid \neg(x \in x)\} \in \{x \mid \neg(x \in x)\} \quad \mathit{iff} \quad \neg(\{x \mid \neg(x \in x)\} \in \{x \mid \neg(x \in x)\})$$

ラッセル・パラドクスである。概念記法は矛盾している。あるいは、その意味論は、（R）の両辺に対して確定した真理値を割り当てられないがゆえに、失敗している。

包括原理の成員関係は、左辺から右辺の移行からわかるとおり、外延$\{x \mid f(x)\}$のもととなる関数fの、対象aへの適用に他ならない。そして、関数とその定義域を同時に確定すること、特に関数たちのなす論理的構造から外延を抽

出し、それを関数の定義域とすることは、関数の〝自己適用〟を許すことでもある。ここに、フレーゲの手続きの循環的な性格が、致命的な形で現れたといってよいだろう。

だが、もう少し考えねばならない。先に述べたとおり、そして上の定義からもわかるように、外延の成員関係は、そこからできる命題$f(a)$の真偽のみによって決まる。それが論理的対象としての外延の素性である。ここで（R）を見返そう。左辺の真理値を決めようとして、右辺に移行したが、そこにまた成員関係が現れている。だから、右辺の真理値を決めるために、再び包括原理を適用するべきだろう。するとこうなる。

$$
\begin{aligned}
\{x \mid \neg(x \in x)\} \in \{x \mid \neg(x \in x)\} \quad & \mathit{iff} \quad \neg(\{x \mid \neg(x \in x)\} \in \{x \mid \neg(x \in x)\}) \\
& \mathit{iff} \quad \neg(\neg(x \in x)\} \in \{x \mid \neg(x \in x)\})) \\
& \mathit{iff} \quad \neg(\neg(\neg(x \in x)\} \in \{x \mid \neg(x \in x)\}))) \\
& \quad \vdots
\end{aligned}
$$

いつまで経っても落ち着かないのである。外延を、命題のネットワークから生じてくる論理的対象と見るなら、そのもととなる関数（概念）、すなわち$\{x \mid f(x)\}$の中に現れるfは、任意の対象に対する値が命題となるような関数、**命題関数**でなければならないはずだ。パラドクスの導出に使われる$\neg(x \in x)$のような関数から、外延を引き出してはいけない。これは、$\neg(x \in x)$が矛盾を生じさせるからではない。成員関係が本来の出所、命題に帰着できないからである。問題は、どのような関数が命題関数なのか、ということである。そしてこの問題はもちろん、命題とは何かという問題につながる。フレーゲのプロジェクトの中で、「命題」とは最重要といってよい観念なのである。

だが、フレーゲの取り扱いは、いささか強引である。アクゼルは、命題とは真理値、真と偽という二つの対象であるというフレーゲの想定こそが「致命的な過ち」だったと指摘する（Aczel 1980, 40-42）。この想定と同一性があれば、水

平線関数を任意の対象 a に対し、

$$-a\text{ が真}\quad \mathit{iff}\quad a=(a=a)\text{ が真}$$

とすることで定義できる。そして、水平線があれば、外延のもととなる関数は命題関数でなければならない、という要求はいつでも簡単に満たせる、実質のないものになってしまう。すなわち、関数 $x\in x$ は、左側に水平線を付けて $-(x\in x)$ とすれば、常に真理値を値にとる命題関数になり、もちろん $\neg(-(x\in x))$ も命題関数になる。すると、$\{x\mid\neg(-(x\in x))\}$ が外延として作れるので、これを使えば矛盾が出てくる。

外延でもって数学的構造を作り上げる、というアイディアの背後にあって、その可能性を担保していたのは、命題たちのなす論理的構造だったはずだ。しかし、概念記法の意味論では、水平線によって、論理的構造の構成要素としての命題の観念は実質を失ってしまっている。これはやはり、基本をおろそかにした手続きというべきであり、パラドクスの発生は、その代償ではないだろうか。しかし、この不備は同時に、改良点をも示してくれている。すなわち、基本に立ち戻り、命題たちのなす論理的構造をきちんと意味論の中に組み込むことで、言語自身の構造から数学的構造を抽出する、というフレーゲのアイディアを維持可能なものにすることができるのではないか。次節では、文脈原理の救済策として、アクゼル考案の「フレーゲ構造」を紹介する。

五　フレーゲ構造

フレーゲ構造とはある種の数学的構造であり、その名の通り、概念記法のような、外延を扱う論理的言語（あるいは論理主義的集合論の言語）のモデルとして、Aczel（1980）で提示された[4]。特に興味深いのは、その構成方法である。ここまでわれわれが見てきたのは、いかにして言語に意味を与えるか、そのためのフレーゲの方法だった。そして私の見

るところ、フレーゲ構造は、まさにフレーゲの方法を使ってモデルを、すなわち言語の意味を与えているのである。
　とはいえ、その構成方法を見るためにはいくつかの準備が必要である。フレーゲ構造は、（型なし）ラムダ計算のモデルの上に、いくつかの構造を追加したものである。それゆえまずは、ラムダ計算についてみる必要がある。なお、本論で「ラムダ計算」と言う場合には、常に型なしのラムダ計算を意味するものとする。

五・一　ラムダ計算とそのモデル

　ラムダ計算は、関数の計算を抽象的に表現する言語である。その言語の名辞、**ラムダ項**は、次のように定義される。

- 変数 x, y, z, ……はラムダ項である。
- M、Nがラムダ項のとき、MN はラムダ項である。［適用］
- Mがラムダ項で xが変数のとき、$\lambda x.M$ はラムダ項である。［抽出］

計算過程は、**簡約**（reduction）と呼ばれる操作を通して、等式で表現される。普通は、次のβ簡約が成り立つものとされる。

$$(\beta)\qquad (\lambda x.M)N = M[x:=N]$$

$M[x:=N]$ は、Mに自由に現れているxにNを代入した結果を表わす。（ただし、ここで代入によって変数の衝突は起こらないものとする。）ラムダ項Mから、xについての関数 $\lambda x.M$ を抽出し、それをNに適用した結果は、関数の〝空所〟Nを〝充当〟した結果、すなわち $M[x:=N]$ だ、ということである。
　各ラムダ項は直観的には関数を表わすが、型なしなので、自己適用も含め、すべての関数に適用できるし、その引数にもなれる。つまり、ラムダ計算が表わすのは、すべてが対象でもあり、また関数でもあるような宇宙とその中の構造

である。そのモデル構成自体も興味深いのだが、ここでは、あとに必要な限りでの簡単な特徴づけだけをしておく。

まず、明示的に閉じた族（explicit closed family）$F=F_0, F_1, F_2, \ldots\ldots$を考える。これは、ある一定の条件を満たす[5]、集合論的な対象とその上の関数たちの族である。F_0はF上の対象と呼ばれるものたちの集団である。各$n>0$に対し、F_nはF_0上のn項関数の集団であり、それぞれn項F関数と呼ばれる。このような族に対して、明示的閉包条件を拡張して、F汎関数 $F\colon F_{n_1}\times\Lambda\times F_{n_k}\to F_0$ たちも考えておく。この族の性格は以下の議論に関係がない。ある一定の豊かさを備えた数学的構造であるとだけ考えればよい。

さて、明示的に閉じた族Fがラムダ計算のモデルとなるのは、Fが、アクゼルの用語で言う「ラムダ系」を備えているときである。

定義（Aczel 1980, definition 3.1）　明示的に閉じた族Fについての**ラムダ系**とは、次の条件を満たす二つのF汎関数 $\Lambda\colon F_1\to F_0$ ならびに $APP\colon F_0\times F_0\to F_0$ である。すなわち、F_1中のすべてのfと、F_0中のすべてのaに対し、

(3.1)　$$APP(\Lambda x.f(x),a)=f(a).$$ □

ラムダ系を備えた明示的に閉じた族を、**ラムダ構造**と呼ぶ。このような条件を満たすAPPとΛは、直観的には次のようなものである。APPは、F_0中の対象を二つ引数としてとり、その一方をラムダ項の世界における関数と見なして、他方に適用する、というふるまいをする関数である。Λは、F_1中の関数を、対象と見なすというふるまいをする関数である。このようなAPPとΛがF中にあるなら、F_0が「すべてが対象でもあり関数でもある」ような宇宙であること、すなわちFが、特に（β）を満たすラムダ計算のモデルであることは明らかだろう。なお以下では、Λを、ラムダ項で使われるのと同じλで表わす。

かなり大雑把な説明だが、ここでひとつ注目したいのは、（β）ないし（3.1）は明らかに包括原理と似た形をしてい

るということだ。$a\in\{x|f(x)\}$ を、$(\lambda x.f(x))a$ あるいは $APP(\lambda x.f(x),a)$ と見ればよい。つまり、ラムダ計算が表わす宇宙は、関数（概念）の代理物としての外延の世界とよく似た、あるいはそれを包含するものと考えることができる。もちろん、ラムダ計算の中には論理の観念は入っていないので、われわれはラムダ計算の中に論理を組み込むことで、あるいは同じことだが、ラムダ計算のモデルの中に論理演算の働く構造を入れてやることで、外延たちのなす世界を構成することになる。注意すべきは、フレーゲが少々粗略に扱ってしまった、命題の観念である。

五・二　フレーゲ構造

フレーゲ構造とは、ラムダ構造の対象領域F_0中に、**命題**と呼ばれる集団と**真理**と呼ばれる命題の部分集団、簡単に言えば論理演算がうまく成り立っている集団が指定されたものである。命題集団が特定できれば、常に命題を値に持つ関数を**命題関数**と呼び、命題関数から外延、アクゼルの用語では**集合**を抽出することができる。以下では、まずフレーゲ構造の定義を述べ、その性質をいくつか見たあと、最後にその構成方法を見る。

定義（Aczel 1980, definition 3.2）　**フレーゲ構造**とは、ある明示的に閉じた族F上の論理定項のリストに対する論理系で、Fについてのラムダ系を伴うものである。□

すなわち、フレーゲ構造とは、論理系を備えたラムダ構造である。論理系とは、先に述べた命題と真理の集団の対だが、次がその定義である。

定義（Aczel 1980, definition 2.3）　明示的に閉じた族Fの中に、次のような特別なF汎関数、**論理定項**が入っているとする。すなわち、

$$\neg:F_0\to F_0;\ \&,\vee,\supset,\doteq:F_0\times F_0\to F_0;\ \forall,\exists:F_1\to F_0.$$

このような論理定項のリストに対する**論理系**とは、あとで述べる各論理定項についての**論理図式**を満たす、**命題**と呼ばれる集団と**真理**と呼ばれる集団の対である。

論理図式(例)

否定　aが命題である（命題の集団に入っている）ならば、$\neg a$は命題であり、

$\neg a$が真（真理集団に入っている）*iff* aが真ではない（真理集団に入っていない）。

含意　aが命題であり、さらにaが真であるとき、bが命題になるならば、

$(a \supset b)$ は命題であり、

$(a \supset b)$ が真　*iff*　aが真かつbが真。

ここで、「命題関数」を定義しておく。F関数fが**命題関数**であるのは、そのすべての値が命題となっているときである。

普遍量化　fがF_1中の命題関数ならば、$\forall x f(x)$ は命題であり、

$\forall x f(x)$ が真　*iff*　すべての対象aについて$f(a)$が真。

同一性　a,bが対象ならば、$(a \doteq b)$ は命題であり、

$(a \doteq b)$ が真　*iff*　$a=b$。

（選言∨、連言&、存在量化∃についての論理図式は省略した。）　□

同一性関数によってできた $(a \doteq b)$ が〝原子命題〟に当たると考えてよいだろう。それらから論理定項を使って作られたものが命題であり、それらには自然な形で〝真理条件〟が定められている。命題や真理は単なるラムダ構造中の対象であり、論理定項は単にその中の関数であるにすぎないが、それらは論理が働く場としての構造を、それゆえに

「命題」、「真理」という呼び名にふさわしい構造をなしている。

フレーゲが考えたように、この構造から外延を抽出したい。先に述べたように、ラムダ構造の対象領域は、外延の宇宙とよく似た構造をしているが、われわれが欲しいのは、その中で「命題たちのなす論理的構造から生じてくる」と言えるものだけである。そして、そのようなものとは、命題関数から抽出される外延に他ならない。ここからは、アクゼルに従って「外延」ではなく、「集合」と呼ぶことにしよう。

定義（Aczel 1980, definition 3.4）　ある対象aが**集合**であるとは、F_1中のある命題関数fに対し、$a=\lambda x.f(x)$となっていることである。□

ここで新しい記法を導入して、fがF_1中の命題関数であるときには、「$\lambda x.f(x)$」の代わりに、「$\{x|f(x)\}$」と書くことにする。また、bが集合であるときには、「$APP(b,a)$」の代わりに「$a\in b$」と書くことにしよう。ラムダ系の満たす等式（3.1）をこの記法で書くと、次のようになる。

$$a\in\{x|f(x)\}=f(a)$$

fは命題関数だから、$f(a)$は命題。それゆえ、$(a\in\{x|f(x)\})$も命題である。よって、フレーゲ構造では論理図式に加えて、次の図式が成り立っていることになる（Aczel 1980, 39）。

述定　bが集合ならば、任意の対象aについて、$(a\in b)$は命題である。

包括公理　fがF_1中の命題関数であるときには、$\{x|f(x)\}$はある集合bであって、任意の対象aについて、次が成り立つ。

$(a\in b)$が真　*iff*　$f(a)$が真

この地点で、ラッセル・パラドクスが導けるかどうか、考えてみるべきだろう（Aczel 1980, 39-40）。〝ラッセル集合〟

らしき対象 $\lambda x.\neg(x \in x)$ を考えてみよう。これは、ラムダ構造の要素として、確かに対象である。しかし、集合かどうかわからないので、$\{x \mid \neg(x \in x)\}$ とは書いていない。パラドクスを導くために、この対象に包括公理を適用しようとするなら、$\neg(x \in x)$ が命題関数であることを示さねばならず、そのためには、$(x \in x)$ が命題関数であることを示さねばならない。さらにそのためには、任意の対象 a について、$(a \in a)$ が命題であることを示さねばならないが、これまでの図式では、それは導けない。$(a \in a)$ が命題になると言えるのは、a が集合であるとわかっているときだけであって、一般の a について、そのようなことは言えないのである。

五・三　フレーゲ構造の構成

命題がなす論理構造としての論理系、そして包括公理が成り立つという意味で、論理構造から抽出された対象としての集合。そして、ラッセル・パラドクスも発生しない。その意味で、フレーゲ構造は、フレーゲが概念記法の意味論で構築しようとした構造を実現したものと考えられる。もちろん、このような構造が天下り式に与えられただけでは十分ではないだろう。フレーゲが苦心したのは、概念記法という言語の意味としてこのような構造が存立しうる、と示すための手続きだった。われわれは引き続き、フレーゲ構造の構成法を見るべきである。その構成の目標は次の定理である。

定理（Aczel 1980, theorem 6.8）　任意のラムダ構造は、フレーゲ構造へ拡張できる。□

この証明を、Aczel（1980）と土屋（二〇〇七、三〇四―三〇七）に依拠して追っていこう。ラムダ構造の構成は前提するので、せねばならないのは、その中に論理系を構成することである。そこで、ラムダ構造Fをひとつ固定して、論理定項のリストを次のように決めてしまう。

$$\doteq := \lambda x\lambda y.\langle 0,x,y\rangle;\ \neg := \lambda x.\langle 1,x\rangle;\ \&:= \lambda x\lambda y.\langle 2,x,y\rangle;\ \vee := \lambda x\lambda y.\langle 3,x,y\rangle;$$
$$\supset := \lambda x\lambda y.\langle 4,x,y\rangle;\ \exists := \lambda f.\langle 5,f\rangle;\ \forall := \lambda f.\langle 6,f\rangle.$$

例えば、$\doteq$は任意の対象aとbに対して、$\langle 0,a,b\rangle$を出力する関数である。詳細は省くが、ここでの0はラムダ構造上でとれる自然数であり、$\langle\ \rangle$は同じくラムダ構造上で構成できる有限列を表わす。これらの関数たちの、上のように定義された実体は、それほど重要ではない。重要なのは、これらの関数たちが独立であること、これはアクゼルのテクニカル・タームであるが、思いきり簡単に言えば、次のようになる。命題aとbから、命題$(a \& b)$と命題$(a \wedge b)$を構成したとき、それらが同じ命題になることは避けたい。また、同じ論理定項$\neg$を使っても、aとbが異なる命題なら、$\neg a$と$\neg b$は異なる命題となるようにしたい。上の定義はそれを簡単に満たしてくれるのである。

さて、この関数たちが、論理図式を満たすように命題と真理の集団を構成していく。その方法は、論理図式を「手持ちの命題、真理、命題関数たちから新たに命題と真理を生成する再帰的定義と見なす」（土屋、二〇〇七、三〇五）というものである。例えば、もしaが命題集団の中に入っているなら、$\neg a$を新たに命題集団の中に入れる。それに加えて、もしaが真でないなら、$\neg a$を命題集団の部分集団、真理の中に入れてやる。他の論理定項についても同様である。このような操作を繰り返し行う。

最初は命題も真理も何もない状態から始める。それゆえ、一回目の操作では〝複合文〟は生成されない。図式を見ればわかるように、それらの生成のためには、すでにいくつかのものが命題や命題関数として生成されていなければならないからである。生成されるのは、同一性命題だけである。$(a \doteq b)$、すなわち$\langle 0,a,b\rangle$が、任意の対象aとbについて命題となる。また、これらの同一性命題のうち、$(a \doteq a)$、すなわち$\langle 0,a,a\rangle$の形をしているものは、真理集団の中に入れられる。

第二段階では、命題と真理の集団は空ではないので、他の論理図式も使える。また、一回目が終わったところで、命題関数も生成されている。F関数の中で、常に値が$\langle 0,a,b\rangle$の形をしているものは、常に命題を値にとるということだから、命題関数である。これらを使って量化、述定の図式、包括公理も使えるようになる。

このようにして、手持ちの命題と真理の集団 $\langle X_0, X_1\rangle$ に対して、各論理図式を一回適用して、命題と真理のメンバーを増やす操作は、対象領域F_0のべき集合の直積から、それ自身への関数 θ:$(P(F_0)\times P(F_0))\to(P(F_0)\times P(F_0))$ として定義できるだろう。

この関数は $P(F_0)\times P(F_0)$ 上のある完備順序についての単調関数だから、この適用を超限回繰り返せば、最小不動点がとれる。すなわち、F_0の部分集団の対 $\langle P, T\rangle$ で、

$$\theta(\langle P, T\rangle)=\langle P, T\rangle$$

となるものが存在する。これは、$\langle P, T\rangle$ に入っている命題と真理を材料にして、論理図式に従い生成した命題と真理たちが、すでに $\langle P, T\rangle$ に入っている、ということである。それゆえ、ここでは述定と包括公理を含め、論理図式が、生成のための原理としてではなく、そのまま成り立っているということである。つまり、$\langle P, T\rangle$ は論理系であり、$\langle F, P, T\rangle$ はフレーゲ構造である。

この構成の手続きを振り返っておくのがよいだろう。同一性言明を出発点として、論理図式によって論理定項のふるまいだけを再帰的に定めておく。あとは合成性に任せることができ、自動的に命題のネットワークが生成される。それと同時に命題関数、そして集合も生成されていくが、集合の集団、すなわちフレーゲ構造がモデルとなるべき言語が名指しうるものの領域は、その言語の論理的構造、論理系が（不動点において）定まるのと同時に定まる。それらの集合に対しては包括公理が成り立ち、その意味で集合は命題の束だと考えられる。ただし、集合を命題関数から抽出されるものに制限し、また、命題を二つの真理値ではなく、論理図式を満たす集団とすることで、パラドクスが発生しないようになっている。

これは、文脈原理によって、言語自身の構造から数学的構造を取り出そうとした、フレーゲのアイディアの実現と言えるのではないか。しかし、そもそも論理主義は、何を目指していたのだろうか。概念記法の意味論、そしてフレーゲ構造の構成法は、フレーゲのプロジェクト、論理主義についての標準的な理解の変更を促すものだと考えられる。次節では、論理主義の目標と実際に行ったこと、そして論理主義がわれわれに残した課題を再考し、本論の考察を締めくくることにする。

六　おわりに：論理主義とは

フレーゲの算術に関する論理主義は、算術の真理を論理法則と定義のみから導出し、算術が論理の一部にすぎないと示すことを目標とする。算術と論理、よく言われる違いは、数などの数学的対象に対するコミットメントである。そして、数学的対象は認識論的問題を抱えている。それでは、論理主義とは、「存在論的に貧しく、それゆえ認識論的により安全な論理」への、認識論的還元なのだろうか。ここまでの議論は、そのような単純な図式が成り立たないことを示している。

フレーゲは文脈原理によって、数学的対象を言語の論理的構造から取り出そうとした。では、論理定項のふるまいを決め、合成性に任せて自動的に生成される、その論理的構造とは何だろうか。そこでは明らかに、無限に多様な命題たちが、無限に多様な関係を取り結んでいるはずだ。フレーゲ構造の構成では、言語の論理的構造を確定するために、生成操作の無限（超限）回の繰り返しが必要とされた。つまり、論理的な言語を設定するだけですでに、われわれは無限を含む、非常に豊かな構造や手続きに出会っているのである。

それゆえ論理主義は、単純な認識論的還元ではありえない。これは、いまや完全に数学の一分野となった現代論理学の状況を見れば、即座に明らかなことでもある。では、論理主義の意義はどこにあるのか。本論の議論から浮かび上が

ってくるのは、数学的対象に関する認識論的問題の無効化、であろう。無限を含む数学的構造は、意味論の中にすでに現れている。意味論は、われわれの言語理解、ないし使用を定式化しようとする。つまり、言語を理解し使用する、そのこと自体が数学的構造の成立を含んでいる。もう少し強い言葉で言うなら、言語理解・言語使用それ自体が、数学的構造の構成だとさえ考えられる。数学的対象への認知的アクセスについて思い悩む必要などない。「アクセス」はすでに、ほとんどトリヴィアルな形で達成されているのである。[6] 論理主義はこう考える。

フレーゲが行ったのは、このような状況を、形式言語とその意味論を作ることで、実際に生じさせることである。そして、外延という装置を用いて、言語それ自体の中でインプリシットに生じている構造を、今度は言語がそれについて語る対象として、明示的に取り出そうとした。フレーゲ構造の構成法もまた、ある言語の意味としての対象の領域は、言語の論理的構造を設定すること自体において構成されるのだ、と示している。

では、論理主義は問題を完全に解決してしまえるのだろうか。それもまた否、だろう。なぜなら、その「構成」とは何かが問題となるからである。例えば「AかつB、それゆえA」という推論を理解し行う、何の問題もないプロセスがすでに、そのような構成を含んでいる。数学的対象の問題は解消されるかもしれない。しかし、この状況はさらに大きな問いを提起する。そのような（無限の）構造の構成を含みうる、言語とは何だろうか。特に、有限的なわれわれの理解と、言語の無限性はどう結びつけられるのだろうか。意味を与えるとは、言語を理解するとはどういうことだろうか。論理主義は、言語の意味の問題を、数学的対象についての検討を通して、より鋭い形で提起するのである。

数学的対象を言語の論理的構造から取り出しうると示すことで、数学的対象の問題を言語の意味の問題に転化する。論理主義についてのこの捉え方は、本質的に、「言語論的転回」としてダメットが提示した（Dummett 1991, 112）ものであり、本論はそれを多少詳しくなぞったにすぎないとも言える。しかし、ダメットが言及しない、フレーゲ構造という「救済策」を見ることで、フレーゲのプロジェクトの内実と不備、そして、論理主義の可能性とそれが提起する問題

が、本論の議論を通じて、いささかなりとも明らかになったのではないだろうか。

文献

Aczel, P. (1980) "Frege structures and the notions of proposition, truth and set," *The Kleene Symposium*, pp.31-59. 土屋岳士訳「フレーゲ構造と命題、真理、集合の概念」、岡本賢吾、金子洋之編『フレーゲ哲学の最新像』所収、勁草書房、二〇〇七年。

Dummett, M. (1991) *Frege: Philosophy of Mathematics*, Duckworth.

—— (1995) "The context principle: Centre of Frege's Philosophy," *Logik und Mathematik: Frege Kolloquium. Berlin*, de Gruyter, pp.3-19. 岩本敦訳「文脈原理―フレーゲ哲学の中心―」岡本賢吾、金子洋之編『フレーゲ哲学の最新像』所収、勁草書房、二〇〇七年。

Frege, G. (1884) *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Wilhelm Koebner [GLA].

—— (1893) *Grundgesetze der Arithmetik: Begriffsschriftlich abgeleitet. I. Band*, Verlag H. Pohle [GGAI].

Smith, J. (1984) "An interpretation of Martin-Löf's type theory in a type-free theory of propositions," *The Journal of Symbolic Logic*, 49-3, 730-753.

岡本賢吾（二〇〇三）「命題と集合を同一視すること―包括原理からカリー＝ハワード同型対応へ―」、『科学哲学』三六―二、一〇三―一一八。

土屋岳士（二〇〇七）「「フレーゲ構造と命題、真理、集合の概念」訳者解説」、岡本賢吾、金子洋之編『フレーゲ哲学の最新像』所収、勁草書房。

注

（1）『基本法則』の原初記号には、ここで紹介したものの他に、二階量化子と記述オペレータが入っている。しかし、議論には関係がないため、本論では扱わない。そして、上に挙げた原初記号もフレーゲ独特の表記ではなく、現代的な表記を用いた。

（2）厳密には、概念記法における文とは、左端に水平線が付いた名辞である (cf. GGAI 32)。

（3） この仮定自体は実際にフレーゲが行っているものだが、これを「文脈原理」という名で呼ぶかどうかは、解釈上の論争点である。一般に文脈原理と呼ばれているのは、『算術の基礎』の「探求の原則」として提示されたもの、すなわち「語の意味は、命題という脈絡において問われなければならず、語を孤立させて問うてはならない」（GLA緒論）である。この原則を用いて、フレーゲは数の定義を行ったのだが、『基礎』以降、この原則を明示的に述べることはなかった。それゆえ、文脈原理は『基礎』を限りとして捨てられたのだとする解釈の可能性もある。本論では、この問題には踏み込まない。『基本法則』でのこの仮定を文脈原理と捉える説得的な解釈は、Dummett（1995）である。

（4） もう一つ、というよりも、本来アクゼルが想定していたのは、マーティン・レーフの直観主義タイプ理論である。そのモデルの与え方は、例えばSmith（1984）で見ることができる。

（5） すなわち、F_0上の定値関数と射影関数はすべてF関数であり、またF関数全体は、合成について閉じている。

（6） これと同様の観点が、本論の文脈とは少しだけずれるが、岡本（二〇〇三）に示されている。そこで持ち出されるのは、型付ラムダ計算と自然演繹の間のカリー・ハワード同型対応である。それが教えてくれるのは「命題Φの証明Nを構成することと、［数学的］構造ΦのメンバーNを構成することとは、必ず互いを含む、伴う」（岡本、二〇〇三、一一七）ということである。

（著者　おおにし・たくろう　京都大学大学院文学研究科博士課程・日本学術振興会特別研究員／哲学）

identified to the representational content of a perceiving mind. In the second section, I explain the notion of external phenomenon. Leibniz often regards aggregates of simple substances as "phenomena," but this kind of phenomenon is clearly not internal since unlike representational contents aggregates are actually made up of many simple substances. But the existence of an aggregate of simple substances in some sense depends upon a mind even though it is constituted by many external simple substances (G2 256; G5 133 NE 2.12.7 etc.). Considering this dependence, Leibniz assigned the term "phenomenon" to an aggregate of simple substances. In the third and forth sections, I critically examine univocal interpretations of "phenomenon" and "body." Montgomery Furth, Loeb and Glenn Hartz were wrong in supposing that the term "phenomenon" only refers to representational contents. Also, despite Rutherford's interpretation, the term "body" sometimes refers to an internal phenomenon. In the fifth section, I contrast my approach with the interpretation made by Robert Adams, which takes an aggregate of substances to be internal for a perceiver. In the last section, I conclude that aggregates of substances are external objects of perceiving minds, and Leibniz is a realist in that he often regards bodies as things outside of perceivers.

Extension of concept, Context Principle and Frege structure

by

Takuro ONISHI

Ph.D. student of Philosophy
Graduate School of Letters, Kyoto university /
Research Fellow of the Japan Society for
the Promotion of Science

What are mathematical objects? Frege's answer was that they are extensions of concepts. In this paper I will examine Frege's notion of "extension of concept", and thereby reconsider significance of his project, Logicism.

Frege's theory of extension was given as semantics for his formal language (i. e. Begriffsschrift) in *Grundgesetze*. Although the semantics based on so-called "Context Principle" is very complicated, the idea is simple. What he tried to do is to represent mathematical objects and structures by the logical structure of language. The notion of extension was the medium that makes the representation possible.

As we know, Frege's system is inconsistent because of Russell's paradox. But it does not show that the notion of extension itself is inconsistent. Rather what the paradox tells us is that the notion of proposition needs more detailed formulation than Frege's. The remedy is, I think, Aczel's Frege structure. Referring to it, I will try to correct and reformulate Frege's argument while avoiding the paradox.