デデキントの数学観

――大学教授資格取得講演における概念拡張の仕組み

八杉満利子

はじめに

数学の各理論の発展に際しては様々な拡張が行われる。拡張には対象領域の拡張、演算あるいは関係などの定義域の拡張、新しい演算の導入などが含まれる。これらを総合すると、何等かの意味の概念拡張と表現できよう。

概念拡張に際して任意に新しい概念を定義しても科学の発展に貢献しないことは言うまでもない。それぞれの場面でなんらかの意味で必要に応じて拡張の方向が決まってゆくものだ。同時にしかし当然ながら新概念がそれまでの知識から自動的・機械的に導かれるわけではない。科学者は一定の軌道内に留まりながら、その創造力を発揮して科学の発展の方向を決めてゆくものだ。

概念の発展には前段階から断絶した飛躍もあり得るが、接続的な発展も多い。内容がより豊富になりながら、前段階と何等かの意味で同質な場合である。ではどのような条件のもとで同質と考えてよいのだろうか。この問いもそれに対する答も一言で書ききれるようなものではない。その同質性を何等かの意味で保証する、数学理論とは独立な哲学的基礎を求めるとしても、一意的な答えは見いだせないだろう。むしろ数学そのものに語らせる試みのほうが適切なのではないだろうか。この観点は（クワイン 1969）および（キッチャー 1988）に啓発されて得たものである。

そのひとつの手がかりとしてデデキントの『大学教授資格取得講演』(Habilitationsrede デデキント 1932 (1854):以下『資格論文』と略)をとりあげる。(デデキント 1996) も参照する。)その理由は、筆者の関心事が数学における発展的概念形成の一般的な原理の探求であり、それには『資格論文』がひとつの有効なモデルだからであるとともに、『資格論文』では概念拡張の意味ある具体例を中心にその仕組みの考察が行われているからである。またその内容はデデキントの後年の諸研究成果(たとえば (デデキント 1872)、(デデキント 1888))につながるものでもあり、デデキントの研究計画という意味合いももつ。さらにデデキントの数学論および数学の効果が現代までも続いているという事実が、この研究計画に意義を与えている。『資格論文』はデデキントの数学の哲学を示すものでもある。『資格論文』においてデデキントは直接に哲学を論じているわけではなく、数学の発展の仕組みについてのひとつの洞察を示しているだけだ。しかしその背後にあるデデキントの数学に関する哲学的思考を汲み上げることは可能である。

『資格論文』は妥当な概念発展に関して、科学一般の発展の法則というべき考察から始め、数学の発展もその法則に則ることを述べ、具体的な事例についてその観点の根拠を説明している。それらは今日教科書に載るような基本的な例であり、しかもその議論を抽象化すれば、現代にいたる様々な数学の分野に適用可能な原理を引き出せる。その意味で『資格論文』は現在でも新鮮味を失っていない。

『資格論文』の主眼は題名の示すごとく新しい関数の導入であるが、それらに伴う領域拡張や従来の関数の定義域の拡張も必要な場合がある。『資格論文』は一八五四年に語られたものであり、十九世紀半ばという時代の産物である。その内容もその意義も時代の中で位置づけられることが望ましい。しかしここでは原典を丁寧に読み込んで、その意図を汲み上げることに専念する。

筆者の理解では、『資格論文』の意義は拡張前の対象物と拡張後の対象物の間の概念的つながりを解明しようとしていることにある。すなわち『資格論文』は両者の接点を見極め、それを通して自然に接続される場合に拡張の意義を認

めているのである。

筆者はサーベイ論文（八杉 2012）において『資格論文』の解説をし、『資格論文』およびデデキントの諸成果に関する既存の文献をいくつか紹介した。歴史的位置、論理主義、構造主義、他の数学者との関係などに関する考察（フェレイロス 1999）、（野本 2010）、（レック 2003）、（テイト 1996））および『資格論文』の主題である自然数領域の逆演算を通しての拡張の例に見られる微妙な問題点についての検討（（シーグ・シュリム 2005））などである。これら以外にも多くの研究がある。それゆえに、『資格論文』の解説という意図は本稿にはない。また、既存の文献に関する検討もここではしない。『資格論文』から筆者なりの結論を導くことが本稿の目標である。

ここで一言所見を述べておきたい。それは、『資格論文』は一つの理論の各場面での拡張について考察しているのであって、数学を全体として下から積み上げてゆく構成主義あるいは基礎づけ主義の見解はとっていない、ということである。また、その数学論は数学の発展の一つの方向に関することであって、数学の発展はその方向に限定されるものではないことを注意しておきたい。

本稿の内容と特色の概観は以下のとおりである。本稿では『資格論文』の主張について先行文献では深く追求されていない概念の明確化・精密化を目指す。とくに一つのキーワードといえる概念拡張における「内的必要性」（innere Notwendigkeit: 一節で詳述）について、『資格論文』では全編を通して説明されてはいるが、本稿でさらにその意味を哲学的に明確にし、デデキントの扱っている例に加えてその後の数学の発展における例によって本稿の解釈が妥当であることを示す。

一節から三節で『資格論文』における概念拡張についての考察を行う。四節では『資格論文』で提示される数学の様々な場面における具体例を、五場面に分類し、それぞれにおける概念拡張の特性を詳細に記述し分析する。ここで数学における「場面」とはある理論とそれに関する数学活動を意味するものとする。正整数上の加法と乗法の理論とこれ

らの演算に関する様々な算術的操作は、その基本的な例である。

五節では、以上の分析から『資格論文』において適切であると認められている概念拡張を「同質性」という術語で表現する。筆者の提案する同質性は、「必要性」、「健全性」および「保存性」という三つの原理で構成される。これは筆者の観点であるが、いかなる思想も議論も、その解釈は何等かの観点を通してしか行われ得ないものだ。その際に自らの立場を明確にしつつ原典の意図を丁寧にたどりながら解釈してゆくべきであると考える。その原則をできるだけ守るつもりである。

六節ではその後の数学の発展において多くの例がこの意味の同質性を満たすことを示し、最後に『資格論文』の数学観を本稿の内容に沿って述べなおしてみる。そしてデデキントの数学観に調和する概念拡張は、数学の発展における一つの重要な方向であると結論づける。

一　科学の発展における一般法則

一節から三節で、『資格論文』における科学・数学の発展に関する観点を筆者の言葉で述べてゆく。以下では、英訳（デデキント 1996）に倣って原文『資格論文』のパラグラフ番号を引用する。〈i〉は『資格論文』における第iパラグラフを表す。

筆者は（八杉 2012）において、『資格論文』で展開されるデデキントの数学観による数学の概念拡張の場面は三種類に分類されると述べた。第一は新しい演算とそれに伴う新領域の創造であり、『資格論文』のパラグラフ〈7〉から〈9〉に相当する。正整数領域とその上の加法と乗法を基礎にして、逆演算である減法および除法とそれらが実行されるための有理数領域、その上での指数関数が定義されるための無理数、さらに複素数の領域が創造される。

実数領域が導入されたものとした上で、第二は実数領域の一部分で定義されている演算の実数領域全体への定義域の

拡張問題であり、その際には定義の仕方、すなわちその演算の概念が拡張される。これは〈10〉と〈11〉に相当する。第三の〈12〉では、演算の定義域の拡張に際してもとの演算の定義が放棄され、演算の概念転換が起こる。

しかしより詳細な分析の結果、本稿四節で『資格論文』における概念拡張を五種類の数学的場面において検討する。いずれの場合にも、演算の適用領域の拡張は、限定された領域における演算の基本性質、すなわち当該演算を規定するとみなされる基本性質の、拡張された領域での充足性が要請されている。その基本性質あるいは法則を旧・新の概念の接点とみなすことができる。この要請にしたがう概念拡張は、（野本 2010）の表現を借りるならば「保存的拡張」と呼ぶことができる。

デデキントは〈3〉から〈5〉で科学一般を発展的・動的な体系と捉えて、〈6〉で数学についても同様の見方を提示している。その観点が『資格論文』の骨子になっている。〈3〉の冒頭でデデキントは、「科学の目標が不変の真理の究明であるとしても、人は大概はそれに単に近づけるだけである」という意味の発言をしている。さらに次のように主張する。

> これらの結果に至るまでの人の知識の歩みを表現し続けるものである科学自体には、無限の多様、無限に異なる表現が可能なのである。（『資格論文』p. 428）

それは「人間の不完全さによる恣意性」の問題であるという。そしてたとえば鉱物の分類方法について意義深いものとそうでないものの区別をするのは

> 人が科学の内的性質（die innere Natur der Wissenschaft）に置くところの仮説である；さらなる経過においてはじめて科学はそれに対して答える；……（『資格論文』p. 429）

（キーワードには括弧内で原語を付す。以下同様。）

学問とは、不完全ながら知性をもつ人間の営みに他ならないことを考えれば、この観点への共感は容易であろう。科

学の内的性質を科学者がどのように発見し、理解し、言語化してゆくか、は一筋に決定されるものではないが、科学者は概念拡張を行う際には、その内的性質を十分に把握し、またその時点までに得られた知識を活用するので、方向性を誤ることは少ない。とくに、証明という保証機能をもつ数学においてはそうである。

法学においても類似の現象が生じるとするパラグラフ〈4〉には、次のような興味深い表現がある。

何かある動機から導入された諸概念が、それらが最初限定的過ぎるかあるいは広過ぎて理解されたために、それらの有効性、それらの射程範囲をより大きい領域に拡張できるように、修正を要求する。（『資格論文』p. 430）

後出の数学に関する諸議論はこれと類似の形をしている。

〈5〉で科学の創造的発展が歴史的事実であるだけでなく、内的必要性（innere Notwendigkeit：『資格論文』p. 430）に基づくものである、と主張される。

ここで本稿全体に関わる用語について述べておく。Notwendigkeit の日本語訳は必要性あるいは必然性である。innere Notwendigkeit という表現があることに鑑みれば必然性という訳が適切であるかにみえる。しかしその意味するところは論理的必然性ではなく、様相における必然性でもなく、また自然的な因果関係を表すものでもない。数学活動において重要であること、という意味で必要性が適切であると考えられる。したがって本稿では Notwendigkeit の訳は必要性で統一する。

〈3〉と〈5〉から、デデキントの考える「科学の発展の一般法則」を次のように解釈してよいだろう。（体系化された知識としての）科学（の各分野）においては、過去の成果に加え、その内的必要性によって、次の方向が逐次決まってゆく。すなわち科学者は多様な可能性のなかから（当該科学分野の）内的必要性に導かれて適切な方向を選び取ってゆく。もちろんここで内的必要性によって次の方向が一意的に決定されると言っているわけではない。

〈6〉で数学の発展法則に関わる一般論が述べられる。最も明瞭であるとされる数学にも、科学の発展における一般

法則は適用されるという。

> 数学の諸定義もまた最初は必然的に限定された形で登場する。そしてさらなる発展によってはじめてそれら定義の一般化が生じる。(『資格論文』p. 430)

しかし数学では、定義の拡張において

> 当初の諸定義から生じかつそれら諸定義によって標示される概念に対して特徴的であるような法則を普遍妥当とみなすという原則(『資格論文』p. 430)

が適用されるという条件のもとで、恣意性が制限されるという。そして

> 逆にこれらの法則は普遍化された諸定義の起源になるだろう；(『資格論文』p. 430)

ただし

> 普遍的な定義はどのように理解されなければならないか……(『資格論文』p. 430)

ということを問いながら法則を見出しその普遍妥当性を確認しなければならない、という趣旨が続く。

以後のパラグラフで言及される具体例では上述の原則とこれらの見解が明確に示されている。

このパラグラフの最後は

> この帰納の原理をいくつかの例において実行する(『資格論文』p. 430)

ことが自分の意図である、と締めくくられている。帰納原理については最後にアペルトの「帰納論」を紹介して、それ以上立ち入らない、としている。帰納への言及は、このような科学の発展の仕組みに関する考察は一つの解釈であり(もちろん慎重に検討され実際にその方向が実現される予想のもとに、である)、それが帰納の原理によって妥当化されると主張する意図があったということだろう。

以後数学の具体的な場面における概念拡張の仕組みが述べられる。なお、数学では一般に「関数」と「演算」は区別

して使用されるが、『資格論文』では加法や正弦のような通常関数と呼ばれるものと積分のような演算と呼ばれるものを同等に扱っているので、ここでは主に演算という用語を使用する。また本稿の最後では演算のみでなく関係あるいは性質も拡張の対象にする。

二 領域の創造を伴う演算の拡張

パラグラフ〈7〉は間接的な逆演算とそれに伴う領域の拡張という数学における保存的拡張に関する基本的な項目であり、具体的に丁寧に論じられている。しかしその前に所与の領域内での「反復のまとめ上げ」による新しい関数の導入が説明される。すなわち初等算術の基本的操作は、後者関数と呼ばれる正整数上の継続的前進という操作（die Operation）であり、他のすべてはそれに基づいている。

この初等演算の複数回続けて反復された実行を唯一の行為にまとめるならば、人は加法概念に達する。これより同様にして乗法概念が、それより累乗概念が発生する。（『資格論文』p. 431）

以上のことは、原始再帰関数の逐次定義に相当する。反復のまとめ上げが原始再帰の原理だからである。これだけならば関数の定義領域は正整数領域で十分だ。しかしそれでは算術のさらなる発展には不十分なのである。なぜならば

間接的な逆演算である減法、除法等の無条件の実行可能性の要求（die Forderung）が新しい数のクラスを形成することの必要性（Notwendigkeit）に至る、……（『資格論文』p. 431）

この結果負の数、有理数、無理数、複素数と、領域が拡張される。新しい諸数の実際の形成については『資格論文』では言及されていない。現在では正整数からこれらの諸数の逐次構築は良く知られているので立ち入らないが、（デデキント 1872）において無理数の形成が扱われていることは紹介しておこう。なお、『資格論文』を通して正整数につい

ての疑義は表明されず、最も基本的な領域として前提されている。（デデキント1888）ではじめてそもそも正整数であるところの数とは何か、が問われることになる。

『資格論文』では間接的逆演算とそれに伴う新領域に関する動機は述べられていないが、方程式を解くという活動を可能にするための演算の必要性というコンテクストで捉えられるべきだろう。数学概念の拡張が必要と認められるのは、それが数学の活動において自ずと要求されるときだからである。それは現実の数学活動に依存するものであり、拡張の時期に必要と認められるものが導入されるのだ。

新しい演算とそれに伴う数の領域の創造の結果問題になるのは、数学が整合的に実行可能になることだ。『資格論文』にもある通り、もとの演算（加法など）を、もとの領域（たとえば正整数領域）を含む拡張された領域全体（たとえば整数領域）に適用可能なように定義し直す必要がある。さらにその結果が旧領域上ではもとの演算概念と一致すること（健全性）、および「前述の一般的原理（〈6〉）を遵守する」ことが要求される。すなわち、旧領域でもとの演算を特徴づける法則が新領域全体に拡張された演算に関しても成り立つこと（保存性）が要求される。正整数領域における加法と乗法を特徴付ける交換律や分配律などがその例だ。これらの法則が旧領域と拡張された領域の接点となる。たとえば加法は旧領域と新領域で同じ機能を果たす、あるいは共機能性をもつ、とも表現できる。

これらの法則や領域の拡張について何か一般的な規定があるわけではない。数学も含めて科学の発展はなんらかの必要性にしたがう、というデデキントの主張は、その必要性が厳密な方向性をアプリオリに規定することまでは意味しない。〈3〉の表現を借りるならば、「数学のさらなる発展」によって次第に方向が決まってゆくものなのだ。すなわち、数学のある活動においてまず局所的な必要性あるいは目的が気づかれ、それへの継続的対処の過程で、満たされるべき普遍的な法則が見出され、その法則にしたがって新理論が創造されるのである。「内的必要性」とは、このような事態を指すものと解釈できる。以下の諸例がこの解釈を裏付ける。

この後、パラグラフ〈8〉で乗法の整数領域への拡張が詳しく検討されている。正整数領域における乗法の本質は被乗数の加法の反復のまとめ上げであるが、その定義では負の乗数に関しては乗法に意味を与えることはできない。

> 定義を最初の制限から解放するためには、特別な定義を必要とする；(『資格論文』pp. 431-432)

しかし新しい定義は任意性を許す。たとえある定義が有用であることが判明しても、それが偶然でなかったとはいえないかもしれない。そのような事態を避けるために

> ……一般的原理を使用しよう。……人は積がどの法則に支配されているかを調べなければならない。そのためには積が受ける変化の規定だけですでに十分である。(『資格論文』p. 432)

積、すなわち乗法が受ける変化とは、乗数が1だけ増加したときの積がもとの乗数による積に被乗数を一回加えたものになる、ことである。正整数で成り立つこの事実が乗法の満たすべき等式として扱われ、それより導かれる加法と乗法に関する諸定理を、加法と乗法に関する法則と言明する。

〈9〉では累乗について類似の考察を行い、その指数を正整数から有理数全体に拡張しようとすると必然的に無理数、さらに複素数領域が必要となることを解説している。デデキントの見解が明確に表現されている部分を引用しておく。

> ここで少なくとも虚数の出現とともに体系的な算術(systematische Arithmetik)の主要な困難が始まる。それにもかかわらず以下のことは期待できる。すなわち、人はここでもまたいかなる任意性も許さず、つねに発見された法則自体によって導かれるべきであるという原則(Grundsatz)の恒常的な使用によって、算術の真に堅固な体系を獲得するだろう。(『資格論文』p. 434)

最後に再び強調しておきたい。なぜ加法に対する減法のように、逆演算の導入が「必要」なのか。それは前述のように数学の豊かな発展のために数学自体が要求する活動、たとえば「方程式を解く」などの活動のために必要なのである。

パラグラフ〈10〉と〈11〉では実数領域内での定義域の拡張が三角関数を例に取り上げられる。デデキントは明言していないが、〈9〉の要求によって実数領域が創造されたものと仮定していると考えられる。

角度の関数である正弦と余弦は最初は幾何学的に直角三角形の辺の比によって定義される。その場合定義域は鋭角に限定される。しかし、直角以上の角度自体は古くから扱われているので、三角関数の定義域の拡張を求めることは自然なことであった。〈10〉では、一般的にこれらの関数が考えられることもあるが、その様子は「完全に任意に見える」という。

〈11〉におけるその解決方法は、大筋次の通りである。最初限定された領域、すなわち鋭角の領域、で定義された正弦と余弦についての加法定理を普遍的な法則として採用する。正弦の加法定理は、二個の角度の和の正弦の値（左辺）が各々の角度の正弦と余弦の値のある組み合わせ（右辺）に等しいことを表現している。鋭角の和が直角以上の場合にはその和における当該関数の値を、加法定理の右辺で定義する。

そしてそのように続行するならば、人は容易に正の角度に対する一般的定義へ、そしてまた減法によって同じように負の角度に対する一般的定義へと達するのである。法則はまたここで、人がある概念を最も有効になるようにするには、それをどのように捉えるべきかを教えてくれる。（『資格論文』p. 436）

上述のように、ここでは領域の拡張は生じないので、関数概念の拡張のみが問題になる。幾何学的・直観的な意味をもつ三角関数は限定された領域で定義された。その本質である加法定理によって定義域の拡張が可能になる。その方法は拡張された定義域でも加法定理が成り立つことを保証する。拡張された後でも引数は角度とみなされ、もとの領域では最初の三角関数の概念が保存されている。なお、角度と実数はとくに断りなしに、同一視されている。

〈12〉は次のように始まる。

これらの例が、数学において限定された領域にのみ関係する概念のより一般的な諸領域への発展の特性を立証するのに十分である。これらすべてのケースにおいてしかし限定された領域に対するもとの諸定義は触られていない。

（『資格論文』p. 436）

ここで強調されているのは定義域拡張という意味での概念拡張である。したがって限定された領域で定義された概念は変更されない。

しかし、定義域の拡張に際してもとの定義あるいは関数が放棄され、したがってもとの領域においても概念変換が起こるケースを積分とΓ関数の例で説明している。積分演算で見よう。積分論では原始関数による積分から面積としての積分への概念転換が起こった。このような場合でも、元の概念と転換後の概念との接点は積分に関して成り立つ線形性などの法則である。

なお、積分演算の場合には数ではなくて実関数全体の集合という領域内で理論が展開されることに注意しよう。そのなかで当初の定義域は原始関数をもつ関数族であり、概念転換の後により広い関数族へと拡張される。概念拡張についての考察において、対象領域を数に限定する意図はみられない。このことは『資格論文』から数学観を抽出する際に重要な事項である。

最後のパラグラフ〈13〉では詳細を語る余裕はないと断りつつ、類似の事項として楕円関数の理論の変遷に触れている。そして最後にアペルトの本の紹介で、この講演を終えている。

四　デデキントの拡張の分類

二節と三節で見たように、デデキントの概念発展の考察はいくつかの数学的場面から成る。それらの場面とそれぞれ

における基本原理を整理すると、次のようになる。

第一場面は、〈7〉の最初にある、同一領域内での反復のまとめ上げによる新しい関数の導入であり、この場合には新しい演算の明示的な定義が与えられる。反復のまとめ上げを一つの演算とみなすことは、再帰的原理の容認と言い換えることもできる。これなくして算術は始まらないのである。

〈7〉の主題である第二場面は間接的逆演算に関わるが、その演算は、それが満たすべき要件によって暗黙的に導入されるものであり、演算の構成方法が与えられるものではない。さらに領域の拡張が要求される場合がある。

第二が概念的には一番難しいケースで、数学の本質を含んでいる。通常演算は定義領域と値をとる領域との三つ組で考えられるので、新しい演算とその定義域は同時に導入されるべきものである。減法の導入の際に負の数が同時に求められる所以だ。

現代では領域の指定なしにある機能をもつ演算という概念は珍しくない。その意味でたとえば加法に関する方程式を解くべき新演算を求めるとき、それが適用可能なように拡張された数領域の形成、ということで解決がつく。しかし当時としてはこの点はいささか微妙であり、その点に関するデデキントの解決の試みを（シーグ・シュリム 2005）がデデキントの未刊の資料を基に研究している。ここでは『資格論文』の内容を吟味してそれから外れないようにしながら、現代的観点から一般的な原理を抽象する方針に徹する。

もうひとつ、たとえば加法も拡張された領域で定義しなおされる、という意味で概念拡張が起こっていることに留意しなければならない。こうして拡張された加法などがその本質を変更されていないのは、それらを規定する法則が遵守されるからである。

デデキントの考察の範囲においても数学発展の方向が一筋ではない可能性があることは明らかだ。最初に正整数上の乗法に関する方程式を解こうとすれば、要求されるのは正の有理数だ。正有理数領域での算術において加法に関する逆

演算のために負の有理数領域を導入する、という順番でもよいわけだ。

第三は限定された領域で定義された既存の演算の定義域を拡張しようとするときに、領域の拡張が要求される場合であり、〈9〉に相当する。

有理数全体において累乗の定義を試みる場面を考えよう。指数が正整数であれば、累乗は乗法の反復のまとめ上げによって定義されている。その意味で新しい関数の導入ではない。しかし任意の有理数を底と指数にとる累乗の値は無理数、さらに複素数を要求する。概念拡張は指数が正整数のときの累乗に関する法則のもとで行われる。しかもその拡張が全く新しい数の領域を要求するという特徴をもつ。指数を正整数に限定すれば、拡張前の性質が保存されている。

第二と第三の場面は、現在の我々がその本質を抜き出そうとするときにとくに慎重を要する。負の整数、有理数、無理数、複素数などは現在の数学においては標準的な対象であり、その構成方法も既知であるために、その存在論的意味などについて通常の数学活動で語られることはないからである。デデキントの時代にもこれらの数は使用されていたが、その導入のされ方がアドホックであったことからデデキントが問題視して取り上げたのである。

第四は〈10〉と〈11〉に相当し、既存の演算の、全体領域内での定義域の拡張であり、もとの定義域では演算の意味が不変な場合である。三角関数の例で説明している。

以上では、初期の限定された領域では既存の演算の性質は拡張後も不変であり、その意味で拡張は健全に行われる、と言ってよい。

第五は〈12〉に相当し、全体領域内での定義域の拡張ではあるが、拡張の際に初期の演算は放棄され、演算自体の転換が起こる場合である。そうではあっても、それを束縛する初期の法則は遵守される。積分の線形性や旧領域における値の一致などである。

以上の概念拡張に関するデデキントの観点を壊さないようにしつつ、現代の目から見てその本質を抽出し、様々な数学の場面で拡張の妥当性の説明を可能にする原理は、以下の三点から成ると考えられる。すなわち、関連理論の内的要求によっての拡張であること（必要性）、拡張後の概念が初期理論に制限されたときにもとの概念と一致すること（健全性）および上述の法則の遵守（保存性）である。この主張を、上述の五場面での状況を見ることによって根拠づけよう。

五　拡張原理について

拡張の妥当性というのは決して基礎づけ的な構成性でも無矛盾性の問題でもない。各場面でその拡張が数学的に自然であることの説明なのであり、拡張後の演算や定義域を初期のものと同質であると受け止めることができる、という意味だと解釈できる。そしてそれはあくまでもそこで問題になる演算やその法則に関して相対的なものである。

上で提案された拡張原理に根拠を与えるために、まず何か数学の理論を想定する。これを初期理論と呼び、拡張後のものを新理論と呼ぶ。これらの名称は区別のための符号にすぎず、本稿のみの用語である。

数学の理論として、その理論で初期に仮定する領域、すなわち対象物の集合、その上あるいはその部分集合上の演算あるいは関係、それら演算あるいは関係を特徴づける法則、の三つ組みを設定する。ここで注意すべきことは演算あるいは関係とそれらが定義される集合、すなわち定義域は上述の減法と負の数のように対の概念として捉えておくべきだということだ。理論の拡張とは、領域の拡張、新しい演算または関係の導入あるいは既存の演算または関係の定義域の拡張を意味する。法則は初期理論のものを形式的に引き継ぎ、新たに加えられることもある。

理論の妥当な拡張とは、上述の必要性、健全性、保存性を満たすものであるとする。このとき、新理論における新領域あるいは新定義域は初期領域あるいは初期定義域と、当該演算あるいは関係およびその法則に相対的に同質である、

つまり同じ機能をもつとみなせる。同様に、定義域を拡張された既存の演算・関係は、初期理論におけるものと同じ機能をもつ、とみなせる。換言すれば、数学の対象物として同じ性質をもっている。したがってこのような拡張を同質拡張と呼ぼう。

これらの観念的主張を四節の各場面に沿って具体的に見てゆく。第一場面における反復のまとめ上げによる演算の導入はそれ自体が算術の基本である。その意味で必要性は明らかであろう。この場合には領域も既存演算も不変である。反復のまとめ上げは算術における法則として掲げておくことができる。

第二の暗黙的な逆演算の導入では、演算の構成方法は定義されない。逆演算は方程式を解くなどの数学における要求から導入されるものだ。これが必要性である。実際にそれが満たすべき性質をもつ演算を仮定しても理論全体の整合性が保たれることが数学的に示されなければならない。たとえば減法を正整数に限定して定義することも可能である。しかし普遍的に方程式を解くという数学の要求を満たすためには被減数と減数の大小にかかわらず減法を定義する必要がある。現在ではその結果の健全性も保存性も確立されており、加法、乗法、減法に関しては整数は正整数と同質とみなせる。

第三場面では、初期理論の領域は有理数の集合であり、領域全体で定義される加減乗除の演算および指数を正整数に限定した累乗とそれらの関連法則を前提とする。累乗の定義域の全領域への拡張は数学の遂行における要求である。その結果無理数および複素数が要求され、全体領域が拡張されることは前述のとおりである。それに伴い、加減乗除の演算の定義域も拡張されるが、それらを有理数領域に制限した場合にはもとの演算と一致し、新領域でももとの法則は満たされる。累乗については指数が正整数に制限された場合にはもとの累乗と一致し、拡張領域でも諸法則は成り立つ。

第四場面の初期理論は、直角三角形の角に対応する辺の比としての三角関数の理論であり、その定義域を実数全体に拡張する方法が与えられた。その意味で鋭角に対応する実数の領域と実数全体とは三角関数の加法定理に関して同質で

あると言ってよい。

第五場面については、積分のケースを扱おう。実関数全体の領域の中で、初期理論における定義域は原始関数をもつ関数の族である。積分はまた面積の意味をもち、したがって面積に対応する演算を求めるのが自然な要求だ。その結果がリーマン積分であり、新定義域はリーマン可積分関数の族になる。原始関数をもつ場合に限定すればもとの積分と同じ意味になり、値も一致する。線形性などの法則は成立する。積分自体の意味が変化するにもかかわらず、この拡張も必要性、健全性、保存性を確保している。

以上『資格論文』の例はそのタイトルに「新しい関数の導入」とあるように、すべて演算に関する拡張であった。しかし、『資格論文』で展開された概念拡張の観点の有効性は演算概念に限られない。次の節では関係に関する拡張の例も含め、さらなる例を示す。

以上の観察をもとに、同質性の各要因について再考しよう。必要性とは、数学のある場面である分野を産み出す要因となる目的の発生を指すと解釈できる。それはその場面での活動による要求の結果であり、既存の理論とその上での活動から生じるという意味で「内的」なのである。保存性とは、その新理論が初期理論と断然せずにつながっていることである。健全性とは、新旧理論の接合が首尾一貫していることである。したがってある理論の同質的拡張は、その自然な発展であると捉えることができる。

ただしデデキントは決して断然のある飛躍を否定していない。『資格論文』の論点はあくまでも概念拡張に限定されている。

六　さらなる例

『資格論文』では当時の数学における基本的な場面を題材に数学観が述べられており、それらは前節の拡張原理のモ

デルになっているが、その後の数学の発展においても拡張原理に沿う例は多い。現代の問題への適用においてはデデキントの意図を損なわない範囲でその後の数学の発展に照らし合わせて考察の範囲を広げてゆくことは許容されるものと考える。筆者が提案した拡張原理の有効性を示すためにも、さらにいくつかの例を挙げたい。

第四場面の例として、リーマン積分とルベーグ積分の関係を見よう。初期理論は実関数の族全体を領域とするリーマン積分の理論とする。その定義域はリーマン可積分な関数族という他はない。法則は積分の線形性などである。面積としてのリーマン積分の本質を捉えたルベーグは、ルベーグ積分に行き着いた。この場合の必要性はまさに積分演算の本質から生じる。定義域はルベーグ可積分な関数の族に拡張されるが、この族を積分とは独立の概念で規定することはできそうにない。つまり定義域は演算の拡張によってのみ規定される。ルベーグ積分は演算としてリーマン積分の拡張であり、積分演算の諸法則を満たす。ゆえに健全であり保存的である。

次に、演算ではなく関係あるいは性質に関する拡張例として、とくに筆者の研究に関わる二つの事例を挙げる。ある関係の定義域とはその関係の真偽を問える要素の集合とする。最初の例は証明論的順序系である。簡単に紹介するが、数学的事実については、(竹内 1987) に詳しい。

証明論においては構成的な整列順序系が重要な手段となる。最初それは正整数あるいは自然数であった。ヒルベルトが目指した有限の立場は自然数論の内に収まるものと想定された。しかしゲーデルの不完全性定理により自然数論の無矛盾性を示すためにもそれでは不十分である。ゲンツェンによって、自然数の形式的体系の無矛盾性証明に必要かつ十分な大きさの整列順序系が構成された。それは自然数に同型な部分集合を含むという意味で、構成的整列集合としての自然数の拡張になっている。さらに強い体系の証明論のために、たとえば竹内外史によってより大きい順序系が構成された。双方とも無矛盾性証明の内的要求から必要に応じて構成されたものである。初期理論は自然数の線形順序という関係と、領域の構成性と順序の整列性という法則から成る。健全性は後の順序系が前のものを同型に含むことにより、

また保存性は法則遵守により明らかだ。これは逐次新領域の形成を伴うので、第三場面に相当する。

最後の例として、計算可能実関数の理論を挙げる。数学的な詳細については省略するが、（プール-エル・リチャーズ 1989）と（辻井・八杉・森 2001）に詳しい。筆者はまた関数の計算可能性概念のいくつかの拡張とそれらの問題点について論じてきた（（八杉 2003、2008）、（八杉・鷲原 2010））。実関数の族を全体領域とする。初期理論はユークリッド位相における連続関数の計算可能性である。関係は関数が「計算可能」である、という性質、法則はユークリッド位相における「列計算可能性」と「実効的連続性」である。しかし数学や科学技術一般における多くの重要な不連続関数が、何等かの意味で計算という要素をもっていることが予想され、それらについての計算可能性概念の拡張が望まれた。この必要性からいくつかの拡張が提案され、それぞれに発展している。とくに（辻井・八杉・森 2001）では初期理論の自然な拡張として実数空間にユークリッド位相の特徴を保存する「実効的一様位相」を導入し、初期理論における法則をこの位相に適用することによって計算可能性概念を不連続関数に拡張した。ユークリッド位相は一様位相の一例なので、健全性は明らかであり、法則の遵守も拡張の仕方から明らかである。これは第四場面に相当する。

なお、不連続関数の計算可能性理論は何種類もあり、それぞれが有意義な発展を遂げている。内的必要性から産出された理論が一定の基準を保存しながら多様であり得る例でもある。

おわりに

以上で『資格論文』に込められたデデキントの哲学を筆者の解釈を通して明らかにした。最後にそれを簡単にまとめておこう。

内的必要性によって数学の発展の方向が一筋に決定されるものではないことは、すでに述べた。以上では方向があたかも決定されているように見える例が多かった。しかしそれは一つの道をたどり、それが発展の原理に適っていること

を示したものであり、一般には数学者の創造力の発揮が可能になるように発展の道に緩みをもたせなければならない。様々な情報のなかから発展の必要性を見出し、健全性と保存性を確認できる拡張によって新しい理論を創造するとき、それが初期の理論と同質性をもつものと認められる、ということを『資格論文』から読み取れる、というのが本稿の主張である。

先行する節でも述べたように、『資格論文』における数学観によれば、数学のある場面において、自ずと新たな目的が生じ、その目的達成のために、あるいはその問題解決のために、新たな演算、関係、領域などの創造が行われ、理論が発展する。内的必要性とは、このように次なる目的が自ずと生じることと言える。そして生成される新たな概念は一意的ではないがその目的に適うという制約のもとで規定される。それゆえに健全であり保存的なのである。このような数学概念の拡張による数学の発展は、数学の一つの大きな流れであり、現在でも有効な視点である。『資格論文』はその源流といえる。この観点から概念拡張の同質性を再度記述してみると、次のようになるだろう。その拡張が、初期理論から発生する問題が提供する目的に適うものであり、新しい演算や要素も含めてもとの概念の働きが保存される、その意味で共機能性が成り立つことである。

四節の第二場面への解説に示唆されているように、デデキントの論点は種々な拡張が段階的に逐次決定される、ということにはない。恣意性の排除と一意性とは別のことである。発展の道筋は一筋ではないかもしれないが、意味のある拡張はしかるべき原理に基づいている、というのがデデキントの数学観なのである。それは概念発展の時系列の観察を基にしてその仕組みを合理的に再構成しているものであり、同時に数学発展の標準的方法論を提示してもいる。そして多くの具体例がこの標準に準拠していることが示された。

参考文献

Julius Wilhelm Richard Dedekind, Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik, delivered as a Habilitationsvorlesung in Göttingen on 30 June 1854; first published in Dedekind Gesammelte mathematische Werke 1932, vol. III, 428-438.

Julius Wilhelm Richard Dedekind, On the introduction of new functions in mathematics, From Kant to Hilbert, A Source Book in the Foundations of Mathematics vol. II (1996), edited by William B. Ewald, Clarendon Press, Oxford, 754-762.

Julius Wilhelm Richard Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen (1872), in Dedekind Gesammelte mathematische Werke 1932, vol. III, 315-334.

Julius Wilhelm Richard Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? (1888), in Dedekind Gesammelte mathematische Werke 1932, vol. III, 335-391.

José Ferreirós, "Labyrinth of Thought—A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics", Birkhauser, 1999.

Philip Kitcher, Mathematical Naturalism, History and Philosophy of Modern Mathematics, vol. XI, University of Minnesota Press (1988), 293-328.

野本和幸、「R・デデキントの数論：（1）「無理数論」—論理主義の一出発点—」、創価大学人文論集 二二号（二〇一〇）、一—三五。

Marian B. Pour-El and Jonathan I. Richards, "Computability in Analysis and Physics", Springer-Verlag, 1989.

Willard van Orman Quine, Epistemology Naturalized, Ontological Relativity and Other Essays (1969), Columbia University Press, 69-90.

Erick H. Reck, Dedekind's structuralism: an interpretation and partial defense, Synthese 137 (2003), 369-419.

Wilfried Sieg and Dirk Schlimm, Dedekind's analysis of number: Systems and Axioms, Synthese 147 (2005), 121-170.

William W. Tait, Frege versus Cantor and Dedekind: On the Concept of Numbers, Frege, Russell, Wittgenstein; Essays in Early Analytic Philosophy (in honor of Leonard Linski), Court Press (1996), 213-248. Reprinted in Frege: Importance and Legacy, Walter de Gruyter (1996), 70-113.

Gaisi Takeuti, "Proof Theory", Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Elsevier Science Ltd, 1987.

Yoshiki Tsujii, Mariko Yasugi and Takakazu Mori, Some properties of the effectively uniform topological space,

Computability and Complexity in Analysis, LNCS 2064 (2001), Springer, 336-356.
八杉満利子、「不連続関数の極限計算可能性—意義と問題点—」、科学基礎論研究 第一〇〇号 vol. 30, No. 2 (二〇〇三)、一三一一八。
八杉満利子、「連続体上の計算概念について—再帰関数を超えるもの—」、哲学論叢 XXXV (二〇〇八)、京都大学哲学論叢刊行会編、一九九—二〇九。
Mariko Yasugi and Masako Washihara, Sequential computability of a function -limiting recursion versus effective uniformity, Scientiae Mathematicae Japonicae 71, No. 3 (2010), 331-341; Online, e-2010-16, No. 23 (2010), 153-163: available at http://www.jams.or.jp/scm/contents/e-2010-2/2010-16.pdf
八杉満利子、「数学における概念拡張の仕組み—デデキントの研究計画に沿って—」、哲学論叢 XXXIX 別冊 (二〇一二)、京都大学哲学論叢刊行会編、サーベイ論文集、二四—三五。

(筆者 やすぎ・まりこ 京都大学大学院文学研究科研修員/数学の哲学)

Dedekind's View on Mathematics
The Framework of Concept Extension in Habilitationsrede

by
Mariko YASUGI
Research Fellow
Kyoto University

Various extensions of concepts take place in the course of developments of mathematical theories.

Dedekind in his Habilitationsrede makes a penetrating observation on the development of concepts in mathematics and in science generally. He claims that the creative development of science not only is an historical fact, but also originates in the inner necessity (innere Notwendigkeit) of a theory under concern. Namely, a new stage of a theory is geared to one direction or another by its past results as well as by its inner necessity.

In order to speculate on the conditions according to which a concept extension can be viewed as appropriate, I will analyze this reference in detail.

The significance of this reference lies in its attempt to clarify the relationship or the tangent point between the objects before and those after the concept extension. It is my view that one should regard an extension as homogeneous if the two families of objects share a same function.

Dedekind discusses concept extensions with various examples. A study of these examples shows that they can be classified into five mathematically distinct scenes. Through a careful analysis of those scenes, I have been led to the three principles which constitute the framework that enables us to explain homogeneity of an extension common to all those scenes. Those principles are the following: necessity (The extension is necessitated by an inner demand of a mathematical theory.); soundness (The confinement of an extended concept to the original domain coincides with the original concept.); conservation (The laws characterizing the original concept are valid also in the extended theory.). All the cases which Dedekind treats abide by these principles. The fact that there are many significant examples of such extensions in modern mathematics should justify the use of this framework for an account of homogeneous extensions.