数学理論における接続的概念拡張
——二つの様式——

八杉満利子

はじめに

本論では数学理論のある種の概念拡張について、筆者の目的に沿って、拡張の前後で理論間に「自然な接続」がある、すなわち個体領域や関数・関係など関連対象の意味が何等かの基準に関して保存される場合の二つの拡張様式を考察し、それらに共通の原理を提案する。

ここで、筆者の目的とは、一節で説明するように、不連続関数の計算可能性研究の方法論の、哲学的な妥当性の探究である。本論の趣旨はこのように限定的であるが、提案する原理の適用範囲は広く、概念拡張の本質の一端を示唆し得るものである。

本論の主題は「数学理論における概念拡張」であるが、この表現は一意的な意味を有しているわけではない。数学の発展にもその際の概念拡張にも様々な様式があるからだ。たとえば四色問題の解決に計算機の使用が本質的にかかわったことなど、本論で設定される数学の理論やその拡張様式に収まらない数学の実践的場面はいくらでもある。

筆者は、数学とは広く数学活動全体を意味し、それは一つの枠組みに収まるものでなく、また数学理論もそこにおける概念発展も決まった形で述べられるものではない、という観点に立っている。したがって、数学に関して論じるとき

にはつねに数学のどの場面を対象にし、どのような観点から検討するのか、を明らかにするべきだと考える。この件に関しては八節で再考するが、本論においては筆者の目的にしたがって考察の対象が明確に限定される。

ある数学理論（初期理論）とその拡張である新理論の間の関係性は種々あり得るが、本論では二節で述べるような、拡張後も基本的に同じ性質（同質性）を保有する、接続的といえる拡張を扱う。そしてこのような拡張が初期理論による要請、すなわち、新理論の意義が数学活動のなかで初期理論の充実をはかるものであるという要請にしたがう、という条件を付している。

概念拡張の接続性を主張する原理の考察において、本論では数学は数学で説明させる方法を取っている。「自然化された認識論」（クワイン 1969）における基本思想である「すべてを下支えできる第一哲学は採用せず、科学は科学によって説明させよう」という立場を自分のスタンスとして採用することにしたのである。その説明の基盤として、既存の成功した数学の拡張様式を採用する。成功した個別の数学論から一般的な原理を導く理由は、成功が普遍性を内包していると考えるからである。

筆者はまずデデキントの数学論である（デデキント 1854）（『資格論文』と略記。（デデキント 1996）も参照）を分析し、そこで示される概念拡張の様式から、しかるべき接続性の原理を抽出した（八杉 2013）。『資格論文』採用の理由は（八杉 2013）（（八杉 2012）も参照）に詳述している。

（八杉 2013）で得られた拡張原理は、異なる数学発展の様式においても成り立つ。ここではとくに（ブルバキ 1950）（『建築術』と略記）の数学論を採用する。本論ではこの数学論について簡単に解説し、それによる概念拡張の様式においても当該原理が成り立つことを示す。『建築術』を採用する理由は、その数学論が数学発展への寄与の成功例であり、また次の意味で筆者の目的に適うからである。筆者等の連続体上の計算可能性研究における方法論の一つである関数空間論的手法を提供する（プール－エル・リチャーズ 1989）で展開されるプール－エル・リチャーズの哲学的

観点が、『建築術』に立脚しているのである。

ある種の概念拡張に求められる原理として『資格論文』の分析の結果（八杉 2013）で抽出された要件は、「内的必要性」、「形式保存性」、「実質保存性」の三種であり、本論ではこれらを総称して「接続性原理」と名付ける。これらの要件に従う概念拡張において、領域や関数などが拡張の前後で概念的につながっている、と考えられるからである。そしてこの「接続性原理」は『建築術』の数学論から見出される拡張様式でも成り立つのである。

ヒルベルトはデデキントの数学観を「遺伝的」(genetisch) と呼んでいる（ヒルベルト 1917）（(中村 2012) も参照）。これがどの時点でのデデキントの数学を指すのかは、明確ではないが、ここでは『資格論文』にこの用語を適用し、『資格論文』における概念拡張を遺伝的様式と呼ぶことにする。『建築術』の対応する様式は構造理論的様式と名付ける。

以下、本論の背景にある問題の発端と本論における筆者の方針（一節）、遺伝的数学論から得た接続性原理（二節）、構造理論的数学論の概説（三節）、構造理論における接続性原理（四節）を逐次述べ、接続性原理の発端の問題への応用を五節で示す。

六節で接続性原理の三要件の意味を考察し、七節で二つの数学論の比較考察を行う。最後に数学とその発展に関する雑感を述べて（八節）、本論を終える。

なお本論の内容は筆者の学位論文（八杉 2014）の未発表の部分に基づいている。

一　問題の発端と方針

整数や有理数などの「離散構造上の計算可能性」は、チューリング機械や再帰関数等自然数上の計算可能な関数理論の応用として表現され、研究されてきた。実数等連続体上の数学を考察の対象にすると、その特性である非可算性や連続（完備）性など数学的に高度な概念が入り、その計算可能性概念は単純ではない。

「連続体上の計算可能性」は、再帰的有理数列と再帰関数による収束率や連続率が基本になる。それによって計算可能な連続関数の理論が展開された（(プール－エル・リチャーズ 1989）を参照)。しかし多くの有用な不連続関数は局所的には連続関数として扱えるなど、連続関数との類似点は多い。そのような関数にもなんらかの意味での計算可能性を付与し、連続関数に加えある種の不連続関数をも対象とするような「計算可能性を伴う数学」を展開する、というのが「連続体上の計算可能性理論」である。

しかし連続関数の計算可能性は再帰的連続率の存在、すなわち連続率が再帰関数で表現されること、が本質的である。「連続でない」という以外に特徴付けのない不連続関数についてどのような意味で計算可能性概念を付与可能なのか？そのための工夫は様々あり、多くが成功しているが、連続関数の場合と異なり、その方法論は一通りではない。

筆者および共同研究者等は次の三種の方法論によって当該研究を進めてきた。（1）関数空間における「計算可能性構造」を設定し、関数を空間の一点とみなして計算可能性を論じる。この方法の創始者はプール－エル・リチャーズである（プール－エル・リチャーズ 1989）（(八杉・鷲原 2000)、(八杉 2008）も参照)。（2）不連続関数を連続関数として扱えるように実数空間における位相を変更し、一様位相における連続関数の計算可能性理論を展開する（辻井・八杉・森 2001)。（3）自然数上の計算可能概念を再帰関数より少し緩めて、再帰関数の極限値を値とする関数（極限再帰関数）を部分的に採用する（八杉 2003)。

それぞれで意味ある数学的成果が得られた。その事実はそれぞれの方法に意義があることを示唆している。しかし各方法は数学の現場で必要に応じて開発・採用されたものである。計算可能性という一つの観点から数学を研究している者としては、それらの方法論がアドホックでなく、なんらかの必然性を持っていることを示すべきであろう。それは、連続関数から不連続関数への「計算可能性概念の拡張」に、何らかの意味の自然な接続があることを示すことだ、というのが筆者の考えである。

「自然な接続」であるという認識の根拠はどういうものであり得るか、どこに求めるべきか、どのような観点を採用するべきか、は決まっていないし、そのガイドラインがあるわけでもない。各人が決心するしかないのである。筆者は前述のように（クワイン 1969）に影響を受け、成功した数学論を基に考察を行うことにしたのである。

ただしそれ以上の詳細については筆者独自の方針を立てた。すなわち、概念拡張における「自然な接続性」を説明する基盤を、デデキントの『資格論文』における数学論とブルバキの『建築術』における数学論に求めたのである。そして、それらから我々の三種の方法に関する概念拡張の接続性原理を引き出すことができたのである。

上述のような発端をもつ問題について、既存の数学論を基に説明原理を提唱する理由は、筆者の数学に対する基本的観点、すなわち、数学という学問の営みの健全性はその営み自体によって支えられている、ということにある。この件については、八節で再考する。そのような訳で、ある概念拡張が妥当である、と言える根拠を、既存の、実際の数学の場で培われ成功し時代に耐えてきた数学論によって説明することに意義があると考える。

二つの数学論は偶然問題解決に役立ったわけではない。まず既存の理論を拡張する際に認められる様式を緻密に分析しているデデキントの『資格論文』が、連続体上の計算可能性の比較的論理的な研究方法（方法論（3））の基礎を担うことが予想された。他方関数空間論の手法（1）はブルバキの構造理論そのものに立脚している。すなわちそれは、計算可能性構造の存在という公理を持つ構造の研究なのである。以上の事実は二節から五節で説明される。なお、方法論（2）には双方の様式が適用可能であるが、本論では省略する。

二　数学における概念拡張

以下で提案される拡張原理を説明するために、まず何か数学の理論を想定する。これを初期理論と呼び、拡張後の理論を新理論と呼ぶ。

数学の理論としては、個体の集合である領域、その上の演算・関係、それら演算・関係を特徴づける法則およびそれらの意図された内容、の総体を考える。本節最後に具体例で説明する。ただしこれはかなり限定された数学理論の設定であることを断っておく。

数学理論における概念拡張とは、個体領域の拡張、新しい演算または関係の導入、既存の演算または関係の定義域の拡張等を意味する。

筆者は（八杉 2013）においてデデキントの『資格論文』の分析を行い、概念拡張に関するデデキントの観点を壊さないようにしつつ、現代の数学の立場でその本質を抽出することを試みた。その結果、様々な数学の場面で概念拡張の妥当性の説明を可能にする原理は、以下の二点から成ると結論づけた。すなわち、初期理論の内的要求によっての拡張であること（内的必要性）および概念の基本性質を保存すること（保存性）である。

保存性には二面ある。一面は拡張後の概念が初期領域に制限されたときにもとの意味を持つこと（実質保存性）であり、これはヒルベルトの言を借りるならば、内容的（inhaltlich）保存性とも言える。（野本 2010）でも内容的という表現を使っている。なお、（ヒルベルト 1998）では inhaltlich を material と訳している。他の一面はもとの概念を規定する、形式的に表現された法則の普遍妥当性が成り立つこと（形式または法則保存性）である。後述するように、これら二種の保存性はいわば一つの事象の表裏といえる。

（八杉 2013）では、概念拡張における内的必要性、実質保存性、形式保存性を総称して「同質性原理」と呼んだが、本論では「接続性原理」と名付ける（六節と八節を参照）。

（八杉 2013）および本論における「拡張の妥当性」というのは基礎づけ的な構成性あるいは無矛盾性を意味するものではない。それは数学の各場面でその拡張が数学的に自然であることの説明可能性なのである。そしてその妥当性はそこで問題になる演算やその法則に関して相対的なものである。このような妥当性の意味付けは『資格論文』の趣旨に

も適うものと考える。

「接続的な概念拡張」は、理論の領域や演算の本質が保存されるという意味で、妥当な拡張であると考えられる。接続性を内的必要性と保存性に絞ることが可能なのは、『資格論文』の内容全体から汲み取れることであった。本論では「接続性原理」がさらに『建築術』の数学論にも適用可能なことを示す。

非常に単純な具体例で、接続性原理の説明をしよう。なお、(八杉 2013) には『資格論文』からの例に加え、独自の例が挙げられている。

正整数を領域とする加法の算術を初期理論として、加法に関する逆演算としての減法の導入を考える。加法に関する方程式が常に解けるような理論を求めることが内的要求である。この要求を満たすためには領域の拡張と減法という逆演算の導入が必要である。領域が整数領域に拡張され、減法が導入された算術が新理論になる。その際に加法は拡張された領域で定義し直される。しかし拡張された加法を正整数上に限定すれば、もとの加法の意味を持つ。加法に関する基本性質は等式で表現され、それは拡張された加法についても成り立つ。これらが実質保存と形式保存である。

ここで加法の意味とは、いわゆる足し算でイメージされる計算であり、その際に数値計算だけでなく、加法の可換性などの性質も同時にイメージされる。それが加法の法則に反映されるのであるが、実質としての加法の可換性と法則としての可換性の区別を論じるのは容易ではない。前述のように、ここでは一つの事柄の表裏と表現するに留める。

『資格論文』においても『建築術』においても、直接に哲学が論じられているわけではなく、数学の発展あるいは数学の理論構造の仕組みについてのそれぞれの洞察が示されているだけだ。しかしその背後にあるデデキントやブルバキの数学発展に関する哲学的思考を汲み上げることは可能なのである。

『資格論文』は十九世紀半ば、『建築術』は二十世紀半ばという時代の産物である。その内容もその意義も時代の中で位置づけられることが望ましい。しかしここでは原典を丁寧に読み込んで、その意図を汲み上げることに専念してい

る。

『資格論文』の概念拡張の特色は具体的な一段階の拡張であり、遺伝的拡張と呼ぶことができる。この拡張様式から、一節で述べた不連続関数の計算可能性研究の三手法のうちの（3）が、連続関数の場合からの自然なつながりを持ち、したがってアドホックでなく妥当な手段と言えることになる。その状況を五節で具体的に説明する。（1）については次節以下の構造理論から導かれる拡張様式で説明される。

三　構造理論的数学論の概説

デデキントの数学論から得られた接続的概念拡張という知見は、さらにブルバキ構造理論という別の数学論についても適用可能である。ブルバキの数学論については、『建築術』によって、またその実践である数学のテキストシリーズ「数学原論」を通して、広く知られているので、ここでは本論に必要な説明に留める。

『資格論文』と並んで『建築術』をとり上げる理由は、一節で述べた発端の問題、とくにその（1）、にある。すなわち、（プールーエル・リチャーズ 1989）で明確にされている解析学および物理学における計算可能性理論に関する視点が、構造理論あるいは公理的方法論そのものなのである。

ブルバキの数学論の核心は「構造」概念である。構造とは個別の数学理論から個別性を捨象して得られる、多くの理論に共通な性質の公理的規定と言える。公理を増やすにしたがって「下部構造」が定義される。本論では個別の数学理論がある構造の公理系を満たすときに、それは「その構造に所属する」と表現することにする。

『建築術』は「数理科学は一見多様であるが、異なる諸数学理論間に存在する諸関係の系統的研究という内的進化(l'evolution interne)が、我々を公理的方法へと導いた」という趣旨で始まる。なお、ここでいう公理とは、一つの数学的対象を決める規約としての公理であり、式や文章で明記されるものである。真理としての公理とは区別されるべき

ことに留意する必要がある。

さらに、「公理的方法論で重要なことは、対象領域の個々の要素の性質は完全に無視されること」であり、「構造における諸概念の共通の特性は、それらを性質が明記されていない要素の集合に適用可能だということだ。そして明示的に表現された公理からの論理的諸帰結がその構造の理論である」と述べている。

このような状況を簡単な例で説明しよう。整数全体の集合 Z 上では加法という演算が可能であり、それに関して特殊な性質をもつ 0（加法の単位元）および各要素 n に対して $n+m=0$ となる要素 m がある。m は n の逆元と呼ばれ、$-n$ と記される。演算と Z の要素に関して周知の性質が成り立つ。たとえば

$$n+0=n,\ n+(-n)=0,\ n+m=m+n,\ n+(m+1)=(n+m)+1$$

などである。

次に「整数」を「整数を係数にもつ一変数多項式」（たとえば x を変数とする）と読み替え、そのような多項式全体の集合を $Z[x]$ と表す。$Z[x]$ 上で加法という演算が定義可能であり、整数は零次の多項式なので、単位元 0 も存在する。前記の諸式は多項式についても成り立つ。

このような例は多く存在する。そこで、空でない集合の上で加法に当たる演算、加法に関する逆元と単位元 0 を持ち、整数で成り立つ典型的な諸性質を公理とする構造を定義できる。そのような構造は群と呼ばれている。Z や $Z[x]$ は群という構造に所属する個別の理論である。群という構造には整数とか多項式などという要素の指定は一切なく、集合の要素を一般に表す記号、演算を表す記号、特殊要素を表す記号およびそれらに関する公理が与えられるのみである。要素も演算も未定義対象であることが、「構造」の意義なのである。群に関する数学を展開しておけば、その結果は整数、多項式、その他多くの個別の理論にただちに適用可能なのである。

このように、個別性の捨象の結果得られる構造は、個別理論のある側面の本質を示すとともに、数学遂行の道具とし

て数学の発展の原動力になった。そして計算可能性研究においても、構造理論は道具として有効に働くのである。ブルバキは、構造理論は道具である、という立場を堅持しており、「数学者の研究における特殊な直観の役割を強調しすぎるということはない」ともいう。本質的には形式と実質の協働を説いていると考えられる。ブルバキはまた『建築術』における描写は非常に大まかな近似に過ぎず、「図式的で理想化されているとともに凍結されている」と釘を刺している。数学は流動的な営みであることを喚起したいのだろう。数学について語るときに、我々はそのことに十分留意しなければならない。

これらの意味を簡単に説明しよう。

図式的（Schematic）：数学の実践において、物事はそんなに単純に組織的には起こらない。

理想化されている（Idealized）：整数や実数の諸性質など、構造理論に乗らず個別に工夫が必要な分野も多い。

凍結されている（Frozen）：構造の種類は数学の発展や視点によって変化し得る。数学はつねに未完成なのである。公理的方法の効力はその後の数学の発展によって実証されてきた。しかし抽象の際に何を捨象し何を保存するか、は、一意的に決まっているわけではない。内的必要性に沿って数学者が選び取ってゆくのである。

『建築術』についての考察はここまでにする。

『建築術』で主張される構造理論の現代数学への貢献は多大であり、また、五節で示されるように本論の目的にとっても有効である故に、『建築術』の見解に即して次節の議論を進める。

四　構造理論における接続性原理

（八杉 2013）では、『資格論文』における具体例に即して接続性の確認を行った（本論二節も参照）。本節では構造理論における接続的概念拡張原理について、前節の例で説明し、それを参考に一般論を導く。

三節で整数の集合 Z の加法についての理論は群という構造に所属することを説明した。Z では乗法も定義できる。さらに乗法に関する方程式を解けるようにしたいという内的必要性が生じるときに、有理数の集合 Q を考えることができる。これは領域として Z の拡張になり乗法と除法という演算が導入される。Z は Q の中に「加法に関して同型に埋め込まれている」のである。その意味で Z の拡張である。Q の理論は加法の群に乗法と除法に関する公理を加えた体という構造に所属する。体は群の下部構造である。したがって群の公理を継承する。つまり形式保存性が成り立つ。Q における加法を Z に限定すれば、もとの加法と同じ意味をもつ。すなわち実質保存が成り立つ。以上により Q は Z の接続的拡張といえる。

もう一つ、後の節で使う例を挙げる。詳細は省略して理論の拡張についてのみ述べる。バナッハ空間はノルムを持つ線形空間に完備性（ノルムに関する収束について閉じている）公理を加えた構造である。単位閉区間上の連続関数の理論 C は最大値ノルムによってバナッハ空間に所属する。ある種の不連続関数も同時に扱いたいという内的必要性にこたえるのが、たとえば単位閉区間上の二乗可積分実関数の理論であり、それを L と呼ぼう。L は二乗積分の平方根をノルムとしてバナッハ空間に所属する。C の領域は L の領域に同型に埋め込まれ、線形結合に関して閉じている。ゆえに L の線形結合という演算を C に限定すれば、元の意味を持つ。C におけるノルムと L におけるノルムは異なるのであるが、C のノルムに関する収束列は L のノルムでも収束列となるので、C における「収束列である」という述語の外延は L における収束列の部分集合になっている。以上で実質保存が成り立つ。同じ構造に所属しているので、C と L は公理（法則）を共有している。その意味で形式保存も成り立つ。以上より L は C の接続的拡張といえる。

これらの例が示唆する一般論は以下のようになる。「一つの数学理論に関して領域の拡張、新しい演算や関係の導入、あるいは既存の演算の定義域の拡張や関係の外延の拡張への内的必要性が生じたとしよう。その要求に応えて得られる新理論が、初期理論が所属する構造と同じ構造あるいはその下部構造に所属し、その領域に初期理論の領域が同型に埋

め込まれているならば、新理論は初期理論の接続的な拡張といえる。」初期理論の所属する構造の公理が保存されるべき法則である。下部構造が公理を形式的に引き継ぐので、法則保存性あるいは形式保存性は成り立つ。埋め込みの定義から、実質保存性も成り立つ。

五　発端の問題への応用

実数上の関数についての自然な計算可能性概念は連続関数に対して定義される。それは関数の定義（入力値に対する一意的出力値の存在）と連続性の定義（連続率）を再帰関数で記述することによって可能になる。しかし「連続に近い不連続関数」を連続関数と統一的に扱いたいという数学の要求と同様に、「連続に近い不連続関数の計算可能性概念」を確立したいという内的必要性があった。それへの応答から、いくつかの異なる方法が提案された。そのうち当初我々が採用し研究したのは（プールーエル・リチャーズ 1989）の「関数空間論による手法」である（一節の（1））。その後「極限再帰関数」による手法（八杉 2003）（一節の（3））と「実効的一様位相」による手法（辻井・八杉・森 2001）（一節の（2））を開発した。本論では（3）と（1）を取り上げる。極限再帰関数論の手法における計算可能性概念の拡張の接続性は、『資格論文』で検討された数学論によって説明される。関数空間論の手法における接続性は『建築術』で展開された数学論によって説明される。

連続関数についての「計算可能な引数から計算可能な関数値を得る再帰的（実効的）な方法の存在」の拡張として、計算可能な入力値に対して関数値の評価が極限再帰関数に依存するものを容認する方法が（3）である。

本節ではその数学的評価自体は省き、極限再帰関数が再帰関数の概念拡張として接続性を持つことを見よう。両者の相違は、所与の再帰関数に関する停止性（halting property）と極限同定可能性（identifiability in the limit）の相違にある。前者はゼロ点の存在保証、すなわち関数値が0になる点（入力値）の存在の保証を意味する。後者は定常点の存

在保証、すなわちその先は関数値が一定になるような点の存在保証を意味する。両者はその表現が明らかに異なり、実際に論理的な強さが異なる。しかもこのままの形では、後者が前者の概念的に自然な拡張になっているか否かを論じるのは難しい。

これらは以下のような形に還元される。この還元は数学的な事実であり、その還元過程は省略するが、筆者は数学的に同値な形で接続性が成り立てば十分である、という立場をとっている。すなわち、ある命題Pについて、Bという主張をするべきときに、Pと数学的に同値な命題QについてBが主張できれば良い、という立場である。この状況を、Bに関してPをQに還元する、と表現したのである。

初期理論の全体領域を自然数の再帰的な集合列全体とし、その上での述語「有界である」とは、「集合列の共通部分、すなわちその列に属するすべての集合の共通部分（無限積）は、ある長さNの有限部分列の共通部分（有界積）に等しい」こととする。この述語をBと表記するならば、集合列$\{C_n\}$について、$B(\{C_n\})$が成り立つことは

$$\exists N.\ \cap_n C_n = \cap_{n \le N} C_n$$

という式（有界性法則）で表現される。（$\exists N.$は「以下のようなNが存在する」を意味する。）初期理論では有界性述語Bの外延を、上界Nを実効的（具体的・再帰的）に提供する列$\{C_n\}$全体とする。しかし、上界Nが具体的に得られなくても有界性法則が成り立つ列は多数ある。したがって有界性述語の外延を上界Nの取得が非実効的である場合に拡張したい、という内的必要性があった。その要求を満たすように新理論を定義すると、有界性法則は成立し、初期理論に限定すれば、Nが実効的に求まる。ゆえに形式保存性も実質保存性も満たされる。したがって接続的な拡張が得られたことになる。再帰関数の停止性がこの場合の初期理論に、極限同定可能性が新理論に当たる。それゆえに極限再帰関数の理論は再帰関数の理論の接続的拡張になっていると見なせるのである。

次に方法（1）について述べる。関数空間論による不連続関数の計算可能性理論は、バナッハ空間の公理に計算可能

性構造の公理を加えた構造の理論で実現される。計算可能性構造とはバナッハ空間の点列（要素の列）のある族である。それはバナッハ空間の特性をシミュレートする以下の三個の公理から成る。（プールーエル・リチャーズ1989）の二章を参照。）

空でない集合$\mathcal{X}$上のバナッハ空間が計算可能性構造Sを持つとは、Sが次の公理群を満たすことをいう。（バナッハ空間の公理は前提とする。）ここで$\mathcal{X}$は空でない集合という以外に属性を一切付与されておらず、$\mathcal{X}$の要素のノルムにはノルムとしての公理以外の制約がない。Sは$\mathcal{X}$からの点列全体の集合の部分集合であり、以下の公理はSに関するものである。Sに属する点列を「計算可能である」という。

公理1（線形性：Linear forms）Sに属する二個の点列から、計算可能実数列を係数として再帰的な方法で得られる線形結合列はSの要素である。

公理2（極限：Limits）Sはノルムに関する実効的（収束率が再帰関数で得られる）極限に関して閉じている。

公理3（ノルム：Norms）Sに属する点列のノルムの列は計算可能実数列である。

このように計算可能な対象は公理的に述べられるのであって、既存の領域から構成されるものではない。三個の公理は、個別の性質を持たないという意味の未規定の集合$\mathcal{X}$の要素列について未規定の述語「計算可能である」によって記述されている。その意味で典型的にブルバキ的なのである。

これらの事実を念頭に四節と照合すると、たとえば単位閉区間上の連続関数の理論Cについては、数学的詳細は省くが、大筋次のようになる。Cはバナッハ空間に所属し、同じくバナッハ空間に所属する理論Lに同型に埋め込まれている。前述のとおりLはCの接続的拡張である。Cのなかの計算可能連続関数列の集合S_1が計算可能性構造の公理を満たすことは数学的事実である。また、LにS_1を部分集合として含む計算可能性構造S_2が定義されることは、（プールーエル・リチャーズ1989）で示されている。すなわち計算可能性構造を伴うCとLは「計算可能性構造をも

つバナッハ空間」に所属し、C の領域と計算可能性構造はそれぞれ L の領域と計算可能性構造に同型に埋め込まれている。計算可能性を伴う L は計算可能性を伴う C の拡張であり、同じ構造に所属することと同型な埋め込みによって四節の一般条件を満たす。したがって前者は後者の接続的拡張になっている。このことは、関数空間論的手法による不連続関数を含む計算可能性理論が連続関数に関する計算可能性理論の自然な延長になっていることを示す。

六　接続性原理に関する考察

（八杉 2013）では概念拡張の妥当性の条件として内的必要性、（法則の）保存性、および（内容が不変と言う意味の）健全性の三項目を提案し、総合して同質性と名付けた。本論ではこれらの用語を多少変更しており、それは以下に述べる理由による。

保存性と健全性は共に初期理論の保存性を意味していて、ただその質が異なるのである。それゆえ本論では二節において両者を「保存性」という一つの原理に統一し、そのうち法則遵守のほうを「法則保存性」あるいは「形式保存性」と名付け、健全性を「実質保存性」と名付けた。これは一つの現象の表裏を「形式」と「実質」と見ることであり、デデキントが様々な表現で述べている条件が、数学理論の本質の不変性のこの二面に相当するのである。これら二種の保存性が成り立つときに、理論拡張の前後における諸対象が「同質」である、と見なすことができる。内的必要性による拡張であれば、単に同質というだけでなく拡張過程につながりがある。その意味で三要件を総称して「接続性」原理と名付けたのである。

形式保存性とは理論の概念規定として式または文章で表現されている法則あるいは公理が成り立つことであり、理解しやすい。他方「実質保存性」は実は難しい問題なのである。

『資格論文』においては実質保存は比較的明確に記述されている。二節で見たように、正整数上の加法の逆演算とし

ての減法の導入の際に、対象領域の拡張が生じる。したがって加法の定義の拡張も必要になるが、拡張後の加法を元の領域に限定すると元の加法と同じ内容をもつ。これが『資格論文』で意図されている加法の実質保存である。しかしながら実質保存性は『資格論文』においても完全に規定されているわけではない。本論では（八杉 2013）と同様に、『資格論文』の記述にしたがって、加法の例のような「元の領域での機能・意味の一致」を実質保存として話を進めたが、機能とか意味の内容は自明ではないのである。

構造理論においては、四節で検討したように、初期理論における個体領域、演算の定義域、述語の外延等が新理論の対応する集合内に同型に埋め込まれることを実質保存とみなすことができる。

デデキントが何故「内的必要性」にこだわったのか、については本論参照の文献の範囲では明らかでない。実数およびその上の初等演算が有理数とその上の演算のみから定義可能であることを（デデキント 1872）で明言しているが、それは有理数から実数への拡張が内的必要性から生じているゆえに可能だと言える。しかし自然数の構成は集合論の枠組みで行われている（デデキント 1888）。それをデデキントがどのように捉えていたかについては、本論の目的を越えるのでここでは立ち入らない。構造理論においては、内的必要性も保存性も明示的に言及されることはない。しかしその含意を明らかにしてゆくと、四節のように接続性原理が構造理論において成り立つ条件を規定し得るのである。

数学における概念拡張は何等かの必要性が契機になるが、現実にはそれが対象理論以外の数学から、あるいは数学外からの要請でもあり得る。しかし目的が数学における概念拡張である限りはその必要性は数学の問題として提示される訳であるから、多くの場合内的必要性は成り立つものと考えられる。

他方、内的必要性なくしても二つの保存性は成り立つかもしれない。しかし数学は自由といっても意味ある成果を得るためには、ある程度の方向性を持つ数学観、方法論、目的等に沿って進められることが重要である。理論の拡張の際に初期理論からの要求にしたがうことは、そのための一つの保証になる。本論では内的必要性を起源にもつ拡張に考察

の対象を限定している。

『資格論文』における数学観によれば、数学のある場面において、自ずと新たな目的が生じ、その目的達成のために、あるいはその問題解決のために、新たな演算、関係、領域などの創造が行われ、理論が発展する。内的必要性とは、このように次なる目的が自ずと生じることとも言える。そして生成される新たな概念は、一意的ではないがその目的に適うという制約のもとで規定される。このような数学概念の拡張による数学の発展は、数学の一つの大きな流れである。『資格論文』はそのような視点の源流といえるし、現在でもその意義は失われていない。

三節でも触れたように、『建築術』の第二節に、「異なる諸数学理論間に存在する諸関係の系統的研究という内的進化が我々を公理的方法に導いた」とあり、筆者はこの内的進化を内的必要性と解釈している。ここでは内的必要性が生じる過程と呼ぶほうが適切であろう。この場合の内的必要性の帰結は、一つの理論の領域や関数の拡張ではないが、数学の新しい見方が数学の内からの要請で生じたことは確かである。

七　二つの数学論について

『資格論文』と『建築術』における数学論は、両者ともに現実の数学活動に基づいている。それは二節および三節の内容からも推測できるであろう。両者に接続的拡張という拡張様式を読み込むことが可能であることは、二節と四節で既に論じてきた通りである。具体例では両方の様式に当てはまるものがある。しかし数学の発展をどう捉えるか、という哲学的観点から見れば、両数学論には基本的な相違がある。

二つの数学論については有意義な研究が多くあるが、ここでは触れない。本論では概念拡張において初期理論と新理論が自然に接続する、という視点からのみその類似性と相違性を考察している。すでに処々で述べてきたこともあるが、ここで再考しておこう。

『資格論文』で示されている概念拡張という意味の数学観は遺伝的であり、『建築術』で示されている数学観は構造理論的であるが、その相違は同じ場面の異なる見方ではない。『資格論文』における考察は数および数に密着した数学という原初的な対象に向けられており、必要最小限の新しい対象の構成が問題になっている。

ブルバキの数学観の特徴は、多くの理論の個別的詳細を捨象し、それらの共通項を一つの構造として取り出すことにあった。そこでは『資格論文』で問題にされた数体系やその上の数学は、基本的対象として常に利用されるべきものになっている。ブルバキの構造理論は概念拡張自体を主題にしているわけではない。構造を考察の対象とすることによって、概念拡張が同構造または下部構造として実現されるような仕組みになっているだけだ。概念拡張という視点から見るときに、この点が『資格論文』との大きな相違である。他方、概念拡張における接続性という原理については、双方において同じ表現が可能だったのである。

ブルバキの構造理論に集約された数学観の背景には、数学の多大な発展と分岐の流れのなかで、それらの再整備が求められ、個別の多様な理論に共通な本質を見出すという、数学自体からの要請があったのである。デデキントに見られる個別理論の、より広い領域への発展という要請とは対照的であり、それは時代的相違に起因するところが大きいだろう。当然ながらデデキント的数学論がその後無効になったわけではなく、デデキントの考察対象と同じ場面に遭遇すれば、それはよみがえるものである。

なお、ブルバキは『建築術』のなかで自分たちの数学論を構造「主義」とは述べていない。ブルバキは、他の方法を排除するという意味での「主義」にしたがって数学を展開したのではなく、数学の扱い方の重要な一つが「構造」によるものとしたのである。したがって筆者は構造「主義」という表現は適切ではないと考え、構造理論と記してきた。他方「ブルバキの構造主義」という表現があることも確かである。

数学における概念拡張の様式は当然本論で扱った二種類に限定されない。ここでは筆者の目的である、不連続関数の

計算可能性理論のうちのいくつかの妥当性の説明が依拠できる二様式を採用したのである。他の様式の可能性や、接続性に拘らない概念発展などについての考察はまた別の課題である。

八　おわりに

以下で数学における概念拡張に関する雑感を記して、本論を終えることにする。

数学の発展には様々な様式がある。数学活動は多彩であり、分野や時代によっても異なる様相を呈する。したがって数学について論じるときには、取りこぼしも覚悟で広く「数学とは」と語るか、目的にしたがって扱う範囲を明確に限定するか、しなければならない。

筆者は、数学とは何か、という問いは立てないが、数学は数学者たちの広範な活動の総体であると考えている。たとえば、数学者たちが数学の問題やその解決へのアイディアなどを思いつくこと、それらを言語化・記号化して計算、証明などによる検証を行うこと、それらの結果を数学のコミュニティーあるいはより広い社会へ様々な形で発信・交流すること等々、時間・空間のなかで繰り広げられる活動の総体が数学であるというのが筆者の数学観である。それら個々の活動の意味・意義が相互に関係し、大局的なネットワークを形成する。そのネットワークが必要に応じて広がり得るという意味で、数学は開かれた世界を作っている。なお、ここで活動とは人の動きのことではなく、人の活動から生じる、数学と呼ばれ得るもの、を意図している。

数学の「健全性」はそのようなネットワークという「場」において破綻が生じていないことであり、その活動に意味があり、全体として成功していて、問題が生じたら局所的に解決でき、不都合な事柄はとりあえず枠外に置くことが可能である、という状態を指す。いわゆる無矛盾性問題ではない。健全性も含めて、数学とは前述のように柔軟で包括的で活動的な営みといえる。それゆえに数学について論じる際には考察対象の範囲を明確にしておかなければならないの

である。本論はそのような筆者の数学観のなかで展開されていることを述べておきたい。

保存性に関連しては、（カッシーラ 1910）における見解が興味深い。たとえば「空間概念と幾何学」のなかでポンスレの「連続性の原理」(Kontinuitätsprinzip)、後に「数学的関係不易の原理」(Prinzip der Permanenz der mathematischen Relationen)、と定式化された見解を参照して「われわれが出発点においた唯一の要請は、一度定義されたある関係の妥当性を、個々の関係項の内容が変化しても保存可能ということで、概念的に表現されうる」と述べ、形式保存性を重視している。実質あるいは内容の問題の難しさを示すものと言えよう。

筆者は、概念拡張における実質保存とは、いわば数学者たちの想念の保存であり、その内容は概念拡張の各場面において具体的に記述されるべきことである、と考えている。デデキントは『資格論文』で、概念拡張における内容の変化の許容範囲を注意深く観察している。本論の三節では、構造理論に関して、同型な埋め込み可能性によって実質保存性を記述できた。

最後に、言うまでもないことだが、本論の二つの様式は、数学における概念拡張様式の例にすぎない。ここでは自分たちの問題解決のために有用な二つの拡張様式を採用し研究した。もちろんそれらは多くの数学の場面に共通するものであり、その有効性は我々の個別の目的に限定されるものではない。

参考文献

Nicholas Bourbaki, The Architecture of Mathematics, The American Mathematical Monthly 57, no. 4 (1950), 221-232. (Authorized translation of one chapter from Les grands Courants de la pensee mathematique, 1948.)

Ernst Cassirer, "Substanzbegriff und Funktionsbegriff", Untersuchungen über die Grundfragen der Erkenntniskritik, Berlin, Bruno Cassirer (1910).（山本義隆訳『実体概念と関数概念―認識批判の基本的諸問題の研究―』みすず書房、第四刷、一九八六）

Julius Wilhelm Richard Dedekind, Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik, delivered as Habilitationsvorlesung in Göttingen on 30 June 1854; first published in "Dedekind Gesammelte mathematische Werke" 1932, vol. III, 428-438.

———, On the introduction of new functions in mathematics, "From Kant to Hilbert, A Source Book in the Foundations of Mathematics" vol. II (1996), edited by William B. Ewald, Clarendon Press, Oxford, 754-762.

———, Stetigkeit und irrationale Zahlen (1872), in "Dedekind Gesammelte mathematische Werke" 1932, vol. III, 315-334.

———, Was sind und was sollen die Zahlen? (1888), in "Dedekind Gesammelte mathematische Werke" 1932, vol. III, 335-391.

David Hilbert, Axiomatisches Denken, Mathematische Annalen 78, 8 (1917), 405-415.

中村幸四郎訳『ヒルベルト　幾何学基礎論』清水弘文堂、昭和四四年発行、昭和四五年再版（原文は昭和一八年、Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 8（1900）から終わりの一文章を削除して転載）：D・ヒルベルト、中村幸四郎訳『幾何学基礎論』ちくま学芸文庫、第四刷（新字・新かな表記、二〇一二）。

David Hilbert, On the infinite, in "Philosophy of mathematics", Selected readings, edited by Paul Benacerraf and Hilary Putnam (1998), 183-201; translated from Mathematische Annalen, vol. 95 (1926), 161-190.

野本和幸「R・デデキントの数論：(1)「無理数論」—論理主義の一出発点—」『創価大学人文論集』二二号（二〇一〇）、一—三五。

Marian B. Pour-El and Jonathan I. Richards, "Computability in Analysis and Physics", Springer-Verlag, 1989: available at http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI¥&version=1.0¥&verb=Display¥&page=toc¥&handle=euclid.pl/1235422916

Willard van Orman Quine, Epistemology Naturalized, in "Ontological Relativity and Other Essays" (1969), Columbia University Press, 69-90.

Yoshiki Tsujii, Mariko Yasugi and Takakazu Mori, Some properties of the effectively uniform topological space, Computability and Complexity in Analysis, LNCS 2064, (2001), Springer, 336-356.

Mariko Yasugi and Masako Washihara, Computability structures in analysis, Sugaku Expositions (AMS) 13 (2000), no. 2, 215-235.

八杉満利子「不連続関数の極限計算可能性—意義と問題点—」『科学基礎論研究』vol. 30, No. 2（二〇〇三）、一三—一八。

———「連続体上の計算概念について—再帰関数を超えるもの—」『哲学論叢』ＸＸＸＶ（二〇〇八）、一九九—二〇九。

——「数学における概念拡張の仕組み—デデキントの研究計画に沿って—」『哲学論叢』XXXIX別冊(二〇一二)、サーベイ論文集、二四—三五。

——「デデキントの数学観—大学教授資格取得講演における概念拡張の仕組み—」『哲学研究』五九六号(二〇一三)、二四—四五。

——「数学における概念拡張の二つの様式」学位論文、京都大学文学研究科哲学専修、二〇一四年三月、一—一五九。

(筆者　やすぎ・まりこ　京都産業大学名誉教授/数学の哲学)

remarkable confirmation of the existence of atoms). Their positions based on such information may not be the same as those without it, and we can find hints in their writings on what would be their reactions.

The Conjunctive Concept Extension in Mathematical Theories

Two Types

by

Mariko YASUGI

Professor emeritus

Kyoto Sangyo University

I consider two types of a certain concept extension in mathematical theories, Dedekind's "genetic" type and Bourbaki's "structural" type, and propose a principle, called "the conjunctive principle", common to those two types. The principle secures a natural conjunction between the original theory and the extended theory.

In a preceding article, I studied Dedekind's "Habilitationsrede" and was led to the three conditions of the conjunctive concept extension: inner necessity (necessity from within a mathematical theory); soundness (conservation of the content); conservation (conservation of the laws characterizing the original concepts). "Soundness" will be renamed as "substantial conservation" and "conservation" as "formal conservation" in this article. The conjunctive principle consists of those three conditions.

A detailed analysis of Bourbaki's article "The Architecture of Mathematics" has revealed that the conjunctive principle can be interpreted also in the theory of structures.

The background of all this is the author's mathematical interest in computable aspects of the mathematics on the continuum. Computability of continuous functions has a natural definition, which is generally agreed. There had been a demand from inside mathematics that some of the discontinuous functions be also endowed with some notion of computability. Among several methods of extending the computability concept to discontinuous functions, I have employed three of them. In order to guarantee that they are not ad hoc methods, I needed a ground which can give an account of the validity of those extensions.

The conjunctive principle applies to those methods via the two types of concept extensions as described above.

I will also mention some of my thoughts on the two types of concept extensions, *genetic one and structural one.*

What is it for one to mean?

by

Nayuta MIKI

JSPS fellow/Nihon University

What is it for one to mean something by uttering something? This is the problem of "utterer's meaning". In this article, I propose a new approach to this problem, according to which utterer's meaning is based on evidence-relation between utterer's utterance and her belief. This view is contrasted with so far the most influential approach to utterer's meaning, which is called intention-based semantics. Theorists of intention-based semantics hold that utterer's meaning is essentially a kind of her intention.

This article consists of three sections. The first section gives an overview of intention-based semantics and the reason why this view is problematic. The second section introduces my approach which I call "belief-evidence semantics". This section also contains a characterization of the concept of evidence in terms of abductive reasoning. The third section is a supplementary one, where an implication of belief-evidence semantics is examined. Belief-evidence semantics, together with Peirce's idea of the continuity between perception and abduction, makes it possible that we sometimes misperceive an utterer's meaning. This happens when, for example, we read a novel, watch a theater performance, or see a robot talking.

This article concludes that utterer's meaning is accounted in terms of evidence-relation between uttering and believing, and that this view has several advantages over the traditional intention-based view.