RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B89 (2022), 49–76

元禄の中頃に成立した『算法大成』について
On the *Sanpō Taisei*, an interim version of the *Taisei Sankei*, established in ca.1695

長田直樹
Naoki Osada *

Abstract

The *Taisei Sankei* is an encyclopaedic work of Japanese mathematics compiled by three mathematicians, Seki Takakazu and his disciples, the Tatebe brothers. The compilation project began in 1683 on the initiative of the younger Takebe, Katahiro, and was completed by the elder Takebe, Kata'akira, in 1710. An interim edition in twelve volumes, entitled *Sanpō Taisei*, was drafted by Katahiro around 1695, but no manuscript of this edition survives. However, it is important to study the *Sanpō Taisei* because it is considered to be the culmination of Seki Takakazu's mathematical works.

By studying the mathematical manuscripts left behind by the three mathematicians, this paper deduces which volumes of the *Taisei Sankei* succeed the *Sanpō Taisei* and how the *Sanpō Taisei* was compiled. We also identify the author(s) of the four manuscripts *Kyūketsu Henkeisōkai*, *Kyūseki*, *Kaihō Sanshiki* and *Kaihō* whose contents are common to some parts of the *Taisei Sankei.*

§ 1.　はじめに

『算法大成』は、建部賢明編『建部氏伝記』によると、天和三 (1683) 年の夏に建部賢弘をリーダーとして、関孝和、賢明、賢弘の 3 人により開始された算書編纂プロジェクトにおいて、元禄の中頃 (1695 年頃) に一旦まとめられた全 12 巻の算書である。『算法大成』は写本も残っておらず実体はほとんどわからない。とはいえ、『算法大成』は関孝和の数学の集大成と考えられるので、研究の意義は大きい。

Received October 30, 2021. Revised February 9, 2022.
2020 Mathematics Subject Classification(s): 01A45
Key Words: History of Japanese mathematics, Seki Takakazu, Takebe Katahiro, Takebe Kata'akira, Taisei Sankei.
This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.
*東京女子大学
email: osada@lab.twcu.ac.jp

2021 年 6 月 6 日にオンラインで開催された日本数学史学会の桑原賞受賞記念講演 [19] において森本光生は、筆者から聞いたとして「(『大成算経』のうち) 関と建部の原稿のある巻は『算法大成』を構成していたと考えられる」を紹介した。確かにその通りなのであるが、関孝和および建部賢弘の著作を特定するのはそれほど簡単なことではない。筆者は『算法大成』についてまとまったものを書いてなかったので、この機会に新たに調査を行いまとめることにした。

本研究では、つぎの 3 点を考察する。

1. 『算法大成』はいつ頃どのようにして編纂されたか。
2. 内容が『大成算経』の一部と共通している稿本のうち、関と建部賢弘の著作はそれぞれどれか。
3. 『大成算経』のどの巻が『算法大成』を継承しているか。

カタカナのルビは原文にあるもの、ひらかなのルビは筆者がつけたものである。漢文を白文で引用する場合は必要に応じ書き下し文をつける。書き下し文における割注は【】で挟む。

§2. 算書編纂プロジェクト

『算法大成』の編纂過程を知る上で最も重要な資料は、当事者の一人建部賢明が編集した『六角佐々木山内流建部氏伝記』[1](正徳五 (1715) 年自序、学士院 5972, 以下『建部氏伝記』と略す) である。『建部氏伝記』における自伝「建部隼之助賢明伝」から引用する。読みやすさのため、引用にあたってはふりがなと句読点をつけ、筆者による補足を ( ) 内につける。

> 凡(およそ)倭漢ノ數學、其ノ書最モ多シトイヘトモ、未タ釋鎖ノ奥妙ヲ盡(つく)ササル叓(こと)ヲ歎(なげ)キ、三士 (関孝和、建部賢明、建部賢弘) 相議シテ、天和三 (1683) 年ノ夏ヨリ、賢弘其首領ト成テ、各新ニ考ヘ得ル所ノ妙旨悉(ことごと)ク著シ、就(つき)テ古今ノ遺法ヲ盡シテ、元禄ノ中年 (1695 年頃) ニ至テ編集ス。總十二巻、算法大成ト號シテ粗是ヲ書寫セシニ、事務ノ繁キ吏(つかさ)ト成サレ、自ラ其微ヲ窮(きはむ)ル事ヲ得ス。孝和モ又老年ノ上、爾歳病患ニ遭(あは)ラレテ考検熟考スル叓能ハス。是ニ於テ同十四 (1701) 年ノ冬ヨリ、賢明官吏ノ暇ニ躬(みづか)ラ其思ヲ精スル事一十年、廣ク考ヘ詳ニ註シテ二十巻ト作シ、更ニ大成算経ト號(なづけ)テ、手親(てづか)ラ草書シ畢(をは)レリ 此書天和ノ季ニ創(はじめ)テ寶永ノ末ニ終ル。毎一篇校訂スル事数十度也。此功ヲ積ムニ因テ総テ廿八年ノ星霜ヲ經畢ンヌ。

「各新ニ考ヘ得ル所ノ妙旨悉ク著シ」は、3 人がそれぞれ原稿を持ち寄ったと取れるが実際はどうであったのだろうか。最初の 3 年間における明確な記録が残っている 3 人の

[1]学士院 5972 は建部賢徳蔵書を鵜飼一徳が 1918 年に影写したものである。『六角佐々木山内流建部氏伝記』の抄録『建部氏伝記抄録』(東北大岡本写 1002) が東北大学デジタルコレクションとしてインターネットで公開されている。https://www.i-repository.net/il/meta_pub/detail

表 1. 算書編纂開始から 3 年間の関と建部兄弟

和暦	関孝和	建部賢弘	建部賢明
天和三年 (1683)	「算脱之法・験符之法」(小暑日 [閏五月十五日] 訂書),「方陣之法・円攅之法」(大暑日 [六月一日] 重訂),「拾遺諸約之法・翦管術解」(林鐘望日 [六月十五日] 重訂), 研幾算法跋文 (七月下弦日 [七月二十三日] 書),「角法並演段図」(八月下弦日 [八月二十二日] 重訂),「解伏題之法」(重陽日 [九月九日] 重訂書), [「解見題之法」(天和・貞享の奥書なし)]	『研幾算法』(七月哉生明 [七月三日] 序),『発微算法演段諺解』執筆	
天和四年 貞享元年 (1684)	検地 (二月、三月、四月、七月、八月)	『発微算法演段諺解』執筆	
貞享二年 (1685)	検地 (二月), 発微算法演段諺解跋 (孟穐 [七月] 筆)「解隠題之法」(八月戊申日 [八月二十日] 龔 書),「開方飜変之法」(仲冬十三日 [十一月十三日] 重訂),「病題明致之法」(麋角解日 [十二月一日頃] 重訂),「題術辯議之法」(十二月戊申日 [十二月二十二日])	『発微算法演段諺解』(季夏 [六月] 序)	発微算法演段諺解跋 (賢之・賢明、初秋 [七月] 書)

仕事を表 1 に示す。表 1 に記載した関の稿本は、編者名が関孝和編と記載され、天和あるいは貞享の年記のある写本が存在するものに限っており、天和あるいは貞享の年記はないが関が編集した可能性の高いものについては、カッコ [ ] 書きで記した。

関孝和は、天和三 (1683) 年の閏五月十五日[2]から九月九日にかけて、および貞享二 (1685) 年八月二十五日から十二月二十二日までは、半月あるいは一月に一冊原稿を書き下ろすか訂書あるいは重訂している。空白の天和三年冬[3](あるいは天和四年/貞享元年春[4]) から貞享二年夏 (あるいは貞享二年春) までは、検地[5]の仕事にかかりっきりと考えられる。

表 1 を詳しく見ていくと、類似のテーマを扱った稿本は続けて編集されている。数学遊戯を扱った「算脱之法・験符之法」と「方陣之法・円攅之法」は発展させた形で『大成算経』巻之七に収録されている。また、代数方程式論を除く純粋数学を扱った「拾遺諸約之

[2]小暑日などの日付 (旧暦) の特定は中根元圭『新撰古暦便覧』(東北大林文庫 682) による。ただし 1 日程度 (最大 3 日) の誤差を含む。
[3]本論文で春は旧暦の一月〜三月、夏は四月〜六月、秋は七月〜九月、冬は十月〜十二月を指す。
[4]改元は天和四年二月二十一日である。
[5]関の署名の 写 がある検地水帳 [10, p.57] の日付の月名のみ表 1 に示した。

表 2. 元禄までの建部賢弘

年号	歳	事項
寛文四 (1664) 年	1	建部直恒の三男として生まれる
延宝四 (1676) 年	13	賢明とともに数学研究に着手
天和三 (1683) 年	20	算書の編纂開始 (夏) 『研幾算法』出版 (七月序)
貞享二 (1685) 年	22	『発微算法演段諺解』出版 (六月序)
元禄三 (1690) 年	27	『算学啓蒙諺解大成』出版 (七月) 北條源五右衛門の養子となる (冬)
元禄五 (1692) 年	29	徳川綱豊に勤仕 (十二月)
元禄十六 (1702) 年	39	本家に帰り、建部姓に復姓し新たに臣下となる (秋)

法・翦管術解」と「角法並演段図」は、それぞれほぼそのままの形で『括要算法』巻亨と巻利に収録されているばかりでなく、それぞれ発展させた形で『大成算経』巻之六と巻之十一に収録されている。

一方建部賢弘は、天和三年七月までは『研幾算法』の執筆を行なっており、七月以降は「新ニ考ヘ得ル所ノ妙旨悉ク著シ」あるいは『発微算法演段諺解』の執筆に取り掛かったと思われるが、具体的なことは分からない。『発微算法演段諺解』の脱稿と関の復帰が同時期なので、関が検地の仕事のとき賢弘は、『発微算法演段諺解』の執筆あたっていたのであろう。

§ 3. 元禄までの建部賢弘

『算法大成』編纂の中心人物 (首領) である建部賢弘がその編纂の仕事をいつ頃どのように行ったかを見るため、元禄までの簡単な年譜を表 2 にまとめる。

建部賢弘は北條氏の養子となるまでは、「夙夜ニ心ヲ盡シテ學ヒシニ」(『建部氏伝記』の「建部彦次郎賢弘伝」) で一日中数学、暦学、天文などの研究をしていた。仕事は極めて速く『発微算法演段諺解』全 4 巻を 2 年程度 (あるいは 1 年数ヶ月) で完成させているので、『算学啓蒙諺解大成』4 巻 7 冊も 2 年程度で完成させたと思われる。

賢弘は、元禄三 (1690) 年冬に徳川綱豊の陪臣北條源五右衛門の養子になり北條源之進と改名し、元禄五 (1692) 年十二月に綱豊の家臣となった。賢弘が養子になる直前に北條源五右衛門に実子が生まれた[6]ため、賢弘は北條家で経済的精神的虐待を受け続けた。元禄十六 (1702) 年養子縁組を解消し、賢弘は建部姓に戻り、新たに綱豊が賢弘を臣下とした。これらのことから賢弘は、養子となった 1690 年以降数学の研究に没頭できなくなったと思われる。さらに家臣になった元禄五 (1692) 年十二月以降は「事務ノ繁キ吏ト成サレ、自ラ其微ヲ窮ル事ヲ得ス」とあるように、数学の研究をまったくできなかったのであ

[6]「建部彦次郎賢弘伝」に「是ヨリ先キ実子ヲ生スルニ因テ」とある。佐藤賢一は『御家人分限帳』の記述により、実子北條市之進は 1689 年前後に生まれたことになると推定している。

ろう。元禄二 (1689) 年と元禄三 (1690) 年に『算学啓蒙諺解大成』を執筆していたとすると、『算法大成』の草稿は貞享五/元禄元 (1688) 年頃、遅くとも元禄五 (1692) 年十二月までにほぼ完成していたと思われる。

§4. 関孝和編について

関孝和編「算脱之法 俗謂之繼子立」に建部賢明が発見した理論が記載されている。『綴術算経』[7]に

筭脱ノ術ハ兄賢明ガ探會スル所ナリ 『綴術算経』25 丁裏

とあるので、「算脱之法」、『大成算経』巻之七および『綴術算経』の算脱を比較する [2], [14, pp.231-235, 292-293, 397-398]。

『綴術算経』に記載された賢明による方法は、黒子 1 子、白子 n 子を環状に並べ黒子から数え始め、m 毎に石を取り除くとき、最後に黒子が残る n(m 脱の正限数) を求める。問題の立て方と正限数の決め方は、関孝和編「算脱之法」と同一である。したがって、関孝和編「算脱之法」には賢明の方法が記載されていることになる。さらに、『大成算経』巻之七の計子第八算脱は「算脱之法」より詳しくなっているものの同一である。

以上より、天和癸亥あるいは貞享乙丑の年記のある関孝和編の稿本であっても、関の弟子による結果が含まれていることがあることが分かる。和本において「編」は「諸説を集めたあと、それらを総合し系統立てること」[17, p.147] であるので、関孝和編にもこの意味が含まれているのだろう。

§5. 「解見題之法」について

以下の節では、「解見題之法」を関が天和三年に編集した関の真作として比較検討に用いる。しかしながら、「解見題之法」は、「享保丙午歳四月望前五日 (享保十一年四月十日)」(東北大岡本写 0021/東北大林集書 1354/学士院 118) など[8]の年記のある写本が存在することなどから、関の著作とはいえないとの解釈[9]もある。

これらの問題について筆者は [4] で詳述したが、要点を 4 点再掲する。

1. 建部賢弘編『発微算法演段諺解』亨巻の演段起例に「解見題之法」の要約[10]が記載されている。

[7]『綴術算経』国立公文書館内閣文庫、194-0214 による。影印は
`https://www.digital.archives.go.jp/DAS/meta/listPhoto?LANG=default&BID=F1000000000000030087&ID=&TYPE=`
で公開されている。

[8]「享保丙午歳四月望前五日主住冩之」(関算前伝九十三 [15]) あるいは「享保丙午歳四月望前五日山路主住書之」(学士院 8239) などもある。

[9]佐藤賢一は「『解見題之法』については、これを史料として見た場合、いくつかの問題点を含んでいるために関孝和の著作としてよいものかどうか、筆者は判断を保留している」[1, p.37] と書いている。

[10]演段起例は「凡(ヲヨソ)題ニ見隠伏(ケンインフク)ノ三品(ヒン)アリ見題ハ全折(センセツ)ノ法ヲ以テ正變(ヘン)ノ二形ニ随(シタカツ)テ所レ問(トフ)ヲ求(モト)ム」で始まる。

2. 「解見題之法」の 2 つの例題「假如有立圓徑 若干 問積」および「假如有方錐下方 若干 高 若干 問積」は、『大成算経』巻之十七に問題文がそのまま[11]採録されている。
3. 中根彦循は「見題解」(学士院 8886) に「解見題之法」から引用しており、「右題術共ニ關孝和先生編書之内ニ御座候由」と書いている。
4. 享保丙午歳四月望前五日は、山路主住が中根元圭あるいは久留島義太から「解見題之法」を提供され書写した日付と考えられる。

以上より「解見題之法」は関の著作であることがわかる。

関は『発微算法演段諺解』の跋 (貞享乙丑孟穐 [七月] 筆) において

> 一日門人建部氏三子相具來而謂曰發微筭法演段諺解既成矣欲附本書而刊之可乎
>
> (一日、門人建部氏三子相具(とも)に来て、而して謂て曰、発微算法演段諺解既に成れり。本書に付して之を刊せんと欲す。可ならんか。)

と書いている。すなわち、建部三兄弟が『発微算法演段諺解』の本文の完成原稿を持参して『発微算法』を付けた形での出版の許可を求めている。建部賢弘は関が検地の仕事の間に『発微算法演段諺解』の本文を完成させ、関の検地が終わるやいなや関を訪れたと解釈できるので、「解見題之法」の編集は検地の前 (天和三年) である。

山路主住は最初中根元圭の弟子になり、建部賢弘の門弟である中根、あるいは中根の友人である久留島義太から享保十一 (1726) 年に「解見題之法」を授けられた。このため、「享保丙午歳四月望前五日」は山路による書写奥書である。

最後に、「解見題之法」に天和癸亥 (天和三 (1683) 年) の年記がない理由を推定する。関は「解見題之法」と「解隠題之法」を「算脱之法・験符之法」などと同じように二篇で一冊にするつもりで「解見題之法」の編集を始めたが、検地の仕事のため続けて「解隠題之法」の編集を行うことができなかったので、「解見題之法」を単独のまま賢弘に書写させたか渡したと考えられる。そのため、「解見題之法」は編者名のみで年記がない。ちなみに、「算脱之法・験符之法」は算脱之法の内題に続き関孝和編と記載され、「算脱之法」の尾題の前に年記はなく、「験符之法」の内題には編者名がなく尾題の前に年記「天和癸亥小暑日訂書」がある。

§ 6. 『大成算経』巻之十二

『大成算経』巻之十二は『括要算法』巻貞と同じテーマを扱っている。表 3 に両者の構成を対比させる。関は天和三年六月十五日に「拾遺諸約之法・翦管術解」(『括要算法』巻亨の原書) を重訂し、八月二十二日に「角法並演段図」(『括要算法』巻利の原書) を重訂している。したがって、この前後に『括要算法』巻貞の原書 (「円率解」「弧背率解」「立圓率解」と考えられる) を著したと考えられる。

---

[11]割注の 若干 は 若干 と変更されている。

表 3. 『括要算法』巻貞と『大成算経』巻之十二の構成

『括要算法』巻貞	『大成算経』巻之十二
求円周率術 (円率解) 圓率解第一、第二求定周、第三求周徑率	圓率第一 截周冪、定周、定率、圓術
求弧術 (弧背率解) 第一求甲截背、第二求甲定背、第三 [以下第十まで]	弧率第二 截背冪、定背冪、汎背冪、一差、二差、三差、括率、定率、弧術
求立圓積術 (立圓率解) 第一求初積、第二求中積、第三求後積、第四求約積、第五定積、第六求乗率除率	立圓率第三 截積、定積、乗除率、立圓術
—	球缺率第四 起術、球缺術

『大成算経』巻之十二の圓率と弧率は『括要算法』巻貞を大幅に改良しているが、立圓率は『括要算法』巻貞さらには「立圓率解」(延宝庚申 (1680), 東北大狩野 7.20634.1) と定率が異なるだけでほぼ一致している。球缺[12]率は『括要算法』巻貞に記載されてない。また、立圓率第三までの例題は具体的な数値が与えられているが、球缺率第四では若干としている。賢弘は数値を求める球缺の問題を「求積」に載せたので省略したのか、あるいは第三までは賢弘が書き、第四は賢明が書き加えたのだろうか。

建部賢弘は圓率および弧率の改良の経緯について『綴術算経』において詳細に書いている。数カ所割注で「載于圓率故今畧此 (圓率に載す故今これを略す)」と書いていることから、『大成算経』巻之十二について述べている[13]ことがわかる。

§6.1. 定周

定周 (円周率の近似分数を求める際に基準とする円周率) を求める際に関は、正 2^n 角形の周を s_n としたとき、関は s_{15}, s_{16}, s_{17} を計算し、増約術 (現代では Aitken Δ^2 法)

$$s_{16} + \frac{(s_{16} - s_{15})(s_{17} - s_{16})}{(s_{16} - s_{15}) - (s_{17} - s_{16})}$$

により、定周 3.14159265359 微弱を与えた。一方、賢弘は s_n^2 を計算し、累遍増約術 (Richardson 補外)

[12] 球缺は「圓法」(東大 T20-67(霞洲本))、『大成算経』巻之十二 (京大和/た/005(京大 10 冊本)) では球缺であるが、『大成算経』巻之十二 (関算後伝四十七 [16]) では球鈌(Unicode U+920C で金偏に夬(けつ)) である。「求積」(霞洲本)、『大成算経』巻之十三 (関算後伝四十八 [16]、京大 10 冊本) および「求積」(東北大岡本写 0003) では球缺、「解見題之法」では立圓闕である。

[13]「圓率」と題する写本は発見されてないので、『大成算経』巻之十二「圓率第一」を指すと考えられる。

$$
\begin{aligned}
&T_n^{(0)} = s_n^2, \quad n = 0, \ldots, 9, \\
&T_n^{(k)} = T_{n+1}^{(k-1)} + \frac{T_{n+1}^{(k-1)} - T_n^{(k-1)}}{4^k - 1}, \quad k = 1, \ldots, 8; n = 1, \ldots, 9 - k
\end{aligned}
$$

により $T_1^{(8)} = 986.96044010893586188344909998747$ 微弱から円周率の 10 倍の平方を 986.9604401089358618834491 微弱とした。これを開平して円周率の 10 倍を 31.41592653589793238462643 弱とした。

これらに対し、賢弘は『綴術算経』に

> 始(ハシメ)關氏角面冪(カクメンヘキ)ヲ開平方ニシテ各(ヲノヲノ)角面ヲ求テ截周ヲ用ユ。
>
> 『綴術算経』36 丁表
>
> 始(ハシメ)關氏増約ノ術ヲ以テ定周ヲ求ルヿヲ理會(リクワイ)シテ一遍(ヘン)ニシテ止(トト)ム。故ニ十三萬千七十二角ニ到(イタ)ル截周ヲ求テ十五六位ノ眞數ヲ究(キハ)メ得(エ)タリ今累編増約(イマルイヘンソウヤク)ノ術ヲ用ルヿヲ探リ會シテ千二十四角ニ到(イタ)ル截周冪ヲ求テ四十餘位ノ眞數ヲ究(キハ)ム。
>
> 『綴術算経』37 丁表

と書いた。

関の方法と賢弘の方法を比較すると

1. 関は n 毎に平方根を計算するのに対し、賢弘の方法は平方根の計算は最後に 1 回行うだけである。(『綴術算経』36 丁表)
2. 関は正 $2^{17} = 131072$ 角形までの外周を求め Aitken Δ^2 法で定周を 12 桁求めたのに対し、賢弘は正 $2^{10} = 1024$ 角形までの外周を求めて Richardson 補外により定周を 40 桁求めた。計算回数が大幅に少なくなっている。(『綴術算経』37 丁表)

である。『大成算経』巻之十二は『綴術算経』と同じ方法で、正 $2^9 = 512$ 角形までの外周を求めて Richardson 補外により定周を 25 桁求めている。

§6.2. 定率

関は定率 (円周率の近似分数) を以下のように求めた。定周を $L = 3.14159265359$ 微弱とし、初期値を $p_0 = 3, q_0 = 1$ とする。$n = 1, 2, \ldots$ に対し近似分数の列 p_n/q_n を

$$
\begin{aligned}
p_{n-1}/q_{n-1} > L \ \text{ならば}\ p_n = p_{n-1} + 3, q_n = n + 1 \\
p_{n-1}/q_{n-1} < L \ \text{ならば}\ p_n = p_{n-1} + 4, q_n = n + 1
\end{aligned}
$$

により計算し、定率 $\dfrac{p_{112}}{q_{112}} = \dfrac{355}{113}$ を与えた。この方法を零約術[14]という。

これに対し、建部賢明は次のような方法を提案した。

[14]零約術は、『括要算法』巻亨の原書である「拾遺諸約之法」において $\sqrt{2}$ の近似分数が与えられている。

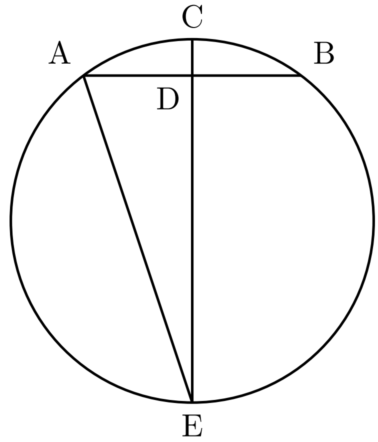


図 1. 弧法

> 賢明其(ソノ)ノ術ノ煩(ワツラハシ)キヲ厭(イトヒ)テ本術ヲ探リ設(マウケ)タリ。是亦首(コレマタハシメ)ヨリ本術ヲ察スルニ非ス。先(マツ)逐一ニ求ル術ヲ用テ後玄探(ノチフカクサクリ)テ眞法ヲ會セリ　　『綴術算経』38 丁裏

L を定周とし、補助整数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$、補助有理数列 $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ と近似分数の列 P_n/Q_n を以下のように求めた。初期値を $\omega_0 = 1, a_0 = \lfloor L \rfloor, \omega_1 = L - \lfloor L \rfloor, P_0 = a_0, P_1 = P_0 a_1 + 1, Q_0 = 1, Q_1 = Q_0 a_1,$ とする。ここで、$\lfloor x \rfloor$ は正の数 x の整数部分である。$n = 2, 3, \ldots$ に対し

$$\begin{aligned} \omega_n &= \omega_{n-2} - \omega_{n-1} a_{n-1} \\ a_n &= \lfloor \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \rfloor \\ P_n &= P_{n-1} a_n + P_{n-2} \\ Q_n &= Q_{n-1} a_n + Q_{n-2} \end{aligned}$$

とすると

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{3}{1}, \frac{P_1}{Q_1} = \frac{22}{7}, \frac{P_2}{Q_2} = \frac{333}{106}, \frac{P_3}{Q_3} = \frac{355}{113}, \frac{P_4}{Q_4} = \frac{103998}{33102}, \ldots, \frac{P_{11}}{Q_{11}} = \frac{5419351}{1725033}$$

が得られる。『大成算経』巻之十二には賢明の方法が与えられている。

§ 6.3.　弧率

弧率とは図 1 において、弓形 ACBA の矢 CD $= c$ と (直) 径 CE $= d$ の長さが与えられたときの弧 $\widehat{\mathrm{ACB}}$ の長さである。現代表示すると弧の長さは

$$d \sin^{-1} \frac{2\sqrt{cd - c^2}}{d} = 2d \sin^{-1} \sqrt{\frac{c}{d}}$$

である。

弧率について建部賢弘はつぎのように書いている。

表 4. 『綴術算経』以前の関と賢弘の弧率

出典	森本	筆者	公式の形
研幾算法	関孝和のものと考えるのが妥当	関孝和の式、「關氏所立四乗求背ノ術」	5 次形式/3 次式
『括要算法』	「吾、往歳立つるところの六乗求背の術の元術」なのか。疑問である。	関孝和の式、「往歳關氏弧率ヲ造改ヿ再次」の一つ	7 次形式/5 次形式
『大成算経』巻之十二	もしかしたら、『研幾算法』の公式ではなく、こちらが「関氏立つるところの四乗求背の術」	建部賢弘の式、「(吾) 六件ノ限ヲ立テ率數ヲ求テ總術トス委ク弧率ニ載之」	5 次形式/3 次形式
「弧率」(学士院 1427)	関や建部はこの形の分数式で、近似が良く、かつ係数が簡単なものをいくつも求めていたのであろう。	『綴術算経』では言及せず	5 次形式/3 次形式

> 往歳關氏弧率(コリツ)ヲ造改(ツクリアラタムル)ヿ再(フタタヒ)次、吾亦重(カサ子)テ造改ヿ一次(タヒ)。共皆(トモニミナ)不精(クハシカラ)シテ其術廢(ハイ)シヌ。
> 『綴術算経』41 丁表

関が二度、賢弘が一度造り直したが精度が悪く廃棄した。森本 [18] に基づき『綴術算経』41 丁表で述べられている関と賢弘の弧法を表 4 にまとめる。n 次形式とは $\sum_{\substack{i,j\\ i+j=n}} a_{i,j}c^i d^j$ の形の多項式である。

森本は「委ク弧率ニ載之」(54 丁裏) の弧率を「弧率」(学士院 1427) とみなしているが、賢弘が「圓率」と書いてあるのは『大成算経』巻之十二の圓率第一についてである[15]ので、弧率は弧率第二を指しているのではないか。

§ 6.4. 立圓率

立圓率は球の体積を計算する際の率 ($\pi/6$ の近似分数) である。立圓率について『綴術算経』では言及がない。

『大成算経』巻之十二も『括要算法』巻貞も、赤道面に平行な断面が正方形となる球に外接する立体の体積 (約積) を求め、その体積の $\pi/4$ 倍 (円と外接する正方形の面積の比) して球の体積 $\frac{\pi}{6}(\text{直径})^3$ を求めている。両者の違いは、関が定率として $\dfrac{355}{113}$ を用いたのに対し、『大成算経』巻之十二は賢明の定率 $\dfrac{5419351}{1725033}$ を用いたことである。直径を 10 寸と

[15]「圓率」と題する写本は、東北大学デジタルコレクション、日本学士院、東京大学総合図書館、京都大学数学教室貴重書には存在しないので、「圓率」は独立した稿本ではなく、『大成算経』巻之十二の圓率第一を指していると考えられる。

すると約積は 666 寸 $\frac{2}{3} = \frac{2000}{3}$ 寸であるので、球の体積 (立圓定積) は

$$\frac{2000 \times 5419351}{3 \times 4 \times 1725033} = \frac{10838702000}{20700396} = 523 + \frac{12394892}{20700396}$$

である。

§ 7. 関孝和と建部賢弘の著作の分離

関孝和編/編撰とある稿本で、『大成算経』に痕跡を残しているものの著者を特定する。取り上げる稿本は

1. 関孝和編「毬闕変形草解」
2. 関孝和編「求積」
3. 関孝和編撰「開方算式」
4. 関孝和編「開方」

である。

§ 7.1. 「毬闕変形草解」について

東北大学デジタルコレクションで影印が公開されている関孝和編「毬闕変形草解」は全部で 9 点あるが、内題はすべて「毬闕変形草解」で 2 点の外題が「毬闕変形草」である。また、日本学士院の 9 点のうち、学士院 245 の 1 点のみ内題が「毬闕変形草」である。したがって、内題は「毬闕変形草解」と考えられる。

「毬闕変形草解」は 18 世紀中頃以降関流において七部書の 1 つとして伝書されてきた。藤原松三郎は、「毬闕変形草解」を関孝和の著作とし、成立時期を「毬闕変形草解は弧環の求積を解いてゐるが、これは寧ろ求積篇中のものより以前にできたものらしい」[14, p.13] と指摘している。一方、佐藤賢一は、「同書 [毬闕変形草解] は『求積』を執筆する準備として『大成算経』の編者によって書かれたものなのか、それとも『求積』に影響を受けた後世のものが別の著として記したものなのか、あらためて問い直す必要がありそうである」[9, p.314] と書いている。

「毬闕変形草解」は、弧環 (弓形の回転体) の体積を求める 9 題の例題からなる。解が最も詳しく書かれている問題 1 と数値が共通の問題が「求積」に収録されている問題 2 を見てみる。両題とも外弧環の体積を扱っているが、問題 1 は問題 2 の特別な場合である。「毬闕変形草解」と「求積」の対応する問題の草および解を比較することにより、「毬闕変形草解」と「求積」の関係を明らかにする。

弧環とは弓形の回転体で、回転軸は弦に平行で弓形と同一平面上に取ったものである。弓形の弧が回転軸に関し凸のとき外弧環、凹のとき内弧環という。虚径とは回転軸と弦の距離の 2 倍、(拠弧) 離径とは弓形の外接円の中心と弦の距離の 2 倍である [7, p.273]。(拠弧) 満径は弓形の外接円の直径で、満径 = 離径 + 2 矢 となる。図 2 で、弓形 ACBDA を

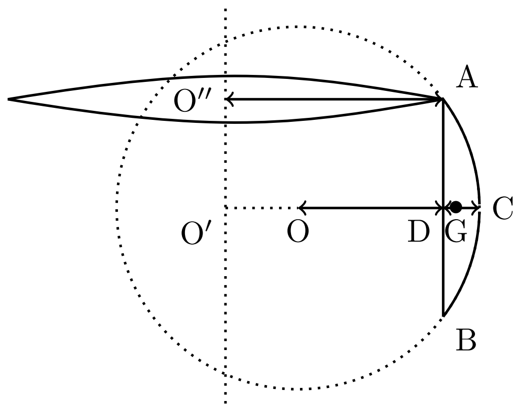


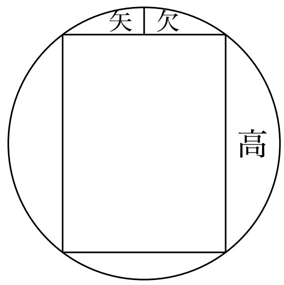
図 2. 外弧環

直線 O′O″ の周りに 1 回転してできる立体が外弧環である。とくに回転軸が弦に平行で外接円の中心を通るとき、すなわち O と O′ が一致するとき、立圓闕外弧環という。AB は弓形の弦かつ外弧環の環高、CD は矢、OD は $\frac{1}{2}$離径、O″A は $\frac{1}{2}$虚径、OC は $\frac{1}{2}$満径 である。また、G は弓形の重心である。

第 1 問

今有外弧環矢二寸虚径六寸高八寸
問積幾何
　　答曰積二百六十八寸〇八三二

草曰列高再自乗得數以立圓積法 五二三六
乗之得積 乃立圓積法五二三六此収去不盡而用之要令圓解易推也　圓積法圓背皆収去不盡而用之故所求積各有微差矣
　解曰列高自之得内減四段矢冪餘以
　四箇矢約之得拋弧離径 六寸 適合虚径
　此則立圓闕弧環也 別得満径一尺〇闕矢一寸
　以虚径爲立圓闕径以闕矢
　爲矢求得立圓闕積倍之得
　數寄位　以虚径爲圓壔径
　以環高爲高求得圓壔積加入寄位共
　得數以減全立圓積餘爲立圓闕外弧環積



「毬闕変形草解」

(草曰、高を列し再自乗、得る数に立円積法【五二三六】を以てこれに乗じ、積を得る。[割中略]

解曰、高を列しこれを自し、四段矢冪を内減し、余を四箇矢を以てこれを約し、弧による離径【六寸】を得て虚径に適合す。これすなはち、立円闕弧環なり。【別に満径一尺、闕矢一寸を得る。】虚径を以て立円闕径と為し、闕矢を以て矢と為

し立円闕積を得て、これを倍し得る数を位に寄す。虚径を以て円壔径と為し、環高を以て高と為し、得る円壔積を求め、寄位に加へ入れ、共に得る数を以て全立円積を減じ、余を立円闕外弧環積と為す。)

草曰では、立円積法 $\times$ 高$^3 = 0.5236 \times 8^3 = 268.0832$ を与えている。立円積法は『括要算法』巻貞の原書に $\frac{\pi}{6}$ の近似有理数 $\frac{355}{678}$ を与えている。$\pi = 3.1416$ とすると立円積法は 0.5236 である。

解曰では 離径 $= \dfrac{\text{高}^2 - 4\,\text{矢}^2}{4\,\text{矢}}$ を用いて[16]離径 $= \frac{8^2-4\cdot 2^2}{4\cdot 2} = 6 =$ 虚径 を示している。したがって、円の中心は回転軸の上にあるので、本問の外弧環は立円闕弧環、すなわち赤道面に平行に球の上下を対称に切り取り、さらに虚径を直径とし環高を高さとする円壔を切り取った立体になる。球の直径 (満径) は 離径 $+ 2$ 矢 $= 10$ 寸である。切り取る部分の矢 (闕矢) は (満径 $-$ 高)$/2 = 1$ 寸である。

解曰の割注の後に、立円闕弧環積の計算方法が書いてある。

$$\text{立円闕外弧環積} = \text{立円積} - 2\,\text{立円闕積} - \text{円壔積}$$

ここで、立円の径は満径、立円闕の径は虚径、矢は闕矢にとり、円壔の径は虚径、高は環高にとる。立円闕積の求め方はこの書では与えてないが、「解見題之法」で

$$\text{立円闕積} = \frac{\pi}{6}\frac{1}{4}\text{矢}\left(4\,\text{矢}^2 + 3\,\text{弦}^2\right)$$

を与えている[17]。矢 $=$ 闕矢 $= 1$, 弦 $=$ 虚径 $= 6$ とすると 立円闕積 $= \frac{14\pi}{3}$ である。

$$\text{円壔積} = \frac{\pi}{4}\text{虚径}^2 \times \text{高} = 72\pi = \frac{\pi}{6} \times 432$$

したがって、

$$\begin{aligned}\text{立円闕外弧環積} =& \text{立円積} - 2 \times \text{立円闕積} - \text{円壔積} \\ =& 0.5236\left(10^3 - (56 + 432)\right) = 268.0832\end{aligned}$$

虚径と離径が等しいので簡単な形になる。虚径 $=$ 離径 $= d$, 闕矢 $= s$, 環高 $= h$ とおく。$(s + \frac{h}{2})^2 = (\frac{h}{2})^2 + (\frac{d}{2})^2$ より、$d^2 = 4s(s + h)$ であるので

$$V = \frac{\pi}{6}\left((h + 2s)^3 - \frac{1}{2}s(4s^2 + 3d^2) - \frac{3}{2}d^2 h\right) = \frac{\pi}{6}h^3$$

草曰ではこの式を用いている。

「毬闕変形草解」の第 2 問をみる。

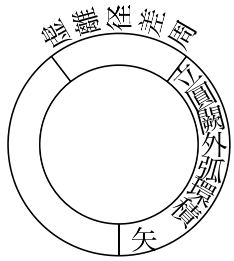
[16] 図 2 の三角形 OAD に三平方の定理を適用した $(\frac{1}{2}\text{離径} + \text{矢})^2 = (\frac{1}{2}\text{離径})^2 + (\frac{1}{2}\text{高})^2$ から容易に導ける。

[17] 「解見題之法」の立円闕積は次のように証明できる。立円の半径を r, 矢を s, 弦を c とすると、$r = \frac{c^2}{8s} + \frac{s^2}{2}$ である。

$$V = \int_{r-s}^{r}(r^2 - y^2)dy = \frac{\pi}{24}s(3c^2 + 4s^2)$$

第 2 問
今有外弧環矢二寸虚径一尺一寸高八寸
問積幾何
　答曰積四百四十三寸七分三七九一
別得抛弧満径一尺〇離径六寸　背九寸二分七三〇
弧積一十一寸一分八二五
草曰列虚径内減離径余以弧積相乗六之得數寄位
〇列高再自乗之得數加入寄位共得數以立圓積法乗之得積

圖　　解



「毬闕変形草解」

(草曰、虚径を列し、離径を内減した余に弧積を以て相乗、これを六たびし、得る数を位に寄す。高を列し、これを再自乗、得る数に寄位を加え入れ、共に得る数に立円積法を以てこれに乗じ積を得る。)

草曰では、

$$\text{外弧環積} = \frac{\pi}{6}\left(6(\text{虚径} - \text{離径}) \times \text{弧積} + \text{高}^3\right)$$

を説明抜きで与えている。この式は、第 1 問の草で与えた

$$\text{立円闕積} = \frac{\pi}{6}\text{高}^3$$

と Pappus-Guldin の定理に基づく

$$\begin{aligned}\text{立円闕積} &= \text{重心が回転軸の周りに 1 回転したときの軌跡の長さ} \times \text{弧積}\\ &= 2\pi\overline{\mathrm{OG}} \times \text{弧積}\end{aligned}$$

から $\text{高}^3 = 12\overline{\mathrm{OG}} \times \text{弧積}$ がいえるので、

$$\begin{aligned}\text{外弧環積} =&\frac{\pi}{6}\left(6(\text{虚径} - \text{離径}) \times \text{弧積} + \text{高}^3\right)\\ =&\frac{\pi}{6}\left(6(\text{虚径} - \text{離径}) \times \text{弧積} + 12\pi\overline{\mathrm{OG}} \times \text{弧積}\right)\\ =&\pi(\text{虚径} - \text{離径} + 2\overline{\mathrm{OG}}) \times \text{弧積} = 2\pi\overline{\mathrm{O'G}} \times \text{弧積}\end{aligned}$$

が導かれる。重心が回転軸の周りに 1 回転したときの軌跡の長さを「求積」では中心周と呼んでいる。重心の位置は、Pappus-Guldin の定理を使わずに導いた第 1 問に Pappus-Guldin の定理を適用して決定している。弧積 (弓形の面積) は「解見題之法」に

$$\text{弧積} = \frac{1}{4}\left(\text{背} \times \text{径} - (\text{径} - 2\,\text{矢}) \times \text{弦}\right)$$

が記載されている[18]。与えられた数値を代入すると

$$弧積 = \frac{1}{4}\left(9.273 \times 10 - (10 - 2 \times 2) \times 8\right) = 11.1825$$

である。したがって、

$$V = \frac{\pi}{6}\left(6(11-6) + 8^3\right) = \frac{\pi}{6} \times 847.475$$

$\pi/6 = 0.5236$ とすると $V = 443.73781$ となる[19]。第 2 問では Pappus-Guldin の定理を表に出してないが、事実上 Pappus-Guldin の定理を用いている。

つぎに「毬闕変形草解」の第 2 問と数値の設定が共通である「求積」の外正弧環の問題をみる。下線部分は「求積」にあって、『大成算経』巻之十三に記載がない。

假如有外正弧環矢二寸虚径一尺一寸高八寸問積
　荅曰積四百四十三寸七三七九一
草曰 別得旁圓径一尺弧積一十一寸一八二五 置虚径 一尺一寸 加入倍矢 四寸 得内減旁圓径餘以弧積相乘六之得 三百三十五寸四七五 寄位　置高 八寸 再自乘之得 五百一十二寸 加入寄位共得數以立圓積法 五分二三六 相乘得積 [割注略]
　解曰是弧壔周旋之形以虚灣合于環背之規者爲界而起於立圓旁之環求之 [中略]
　併上下缺積以之減全立圓積餘爲立圓旁周之弧環積 此積適合于環高再自乘以立圓積法相乘之數也 以弧積除之 註云中心周 亦以圓周法 三箇一四一六 除之 是立圓旁環中心径 得内減缺弦餘爲二箇中矢加入虚径 是即環之中心径也 以圓周法相乘爲環中心周 乃擬弧壔正高 以弧積 即環面積 相乘得環積也 「求積」

(草曰、【別に旁円径一尺、弧積一十一寸一八二五を得る。】虚径【一尺一寸】を置き、倍矢【四寸】を加え入れ、旁円径を内減して得る余に弧積以て相乗、これを六たびし、【三百三十五寸四七五】を得て位に寄す。高【八寸】を置き、これを再自乗し【五百一十二寸】を得て、寄位を加え入れ、共に得る数立円積法【五分二三六】を以て相乗積を得る。

[18]「解見題之法」の弧積は次のように証明できる。弓形の弦を c, 矢を s, 弧長 (背) を l, 面積を S とする。弓形の弧を共有する扇型の中心角を θ, 直径を d とする。$l = \frac{1}{2}d\theta$ より

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2\theta - \frac{1}{2}c\left(\frac{d}{2} - s\right) = \frac{1}{4}(ld - c(d-2s))$$

[19]弧積の正確な値は $5^2 \sin^{-1}\frac{4}{5} - 12 = 11.18238045$ であるので、4 桁正しい。

> 解曰、これ弧壔周旋之形、虚湾を以て環背の規に合するものを界となし、而して立円旁の環より起こしこれを求む[20]。[中略] 上下の欠積を併せ、これを以て全立円積を減じ、余を立円旁周の弧環積となす。【この積環高再自乗に適合し、立円積法を以てこれを相乗する数なり。】弧積を以てこれを除き 【注に言う中心周】また円周法【三箇一四一六】を以てこれを除す【これ立円旁環中心径】[21]。得る数から欠矢を内減し、余を二個中矢となし、虚径を加え入れる。【これすなはち環の中心径なり。】円周法を以て相乗し環の中心周となす。【すなはち弧壔を正高に擬す。】弧積【すなはち環面積】を以て相乗環積を得るなり。

「求積」の正弧環、旁円径、缺矢は、それぞれ「毬闕変形草解」の弧環、満径、闕矢である。「求積」の草曰で、別得として旁円径一尺、弧積一十一寸一八二五を与え、引き続き計算方法を書いている。

$$\frac{\pi}{6}\left(6((\text{虚径} + 2\,\text{矢}) - \text{旁円径}) \times \text{弧積} + \text{高}^3\right)$$

により $0.5236(6 \times (11 + 2 \times 2) - 10) \times 11.1825 + 8^3) = 0.5236(335.475 + 512) = 443.73791$ を与えている。「求積」の $\text{虚径} + 2\,\text{矢} - \text{旁円径} = \text{虚径} - (\text{旁円径} - 2\,\text{矢})$ は「毬闕変形草解」の $\text{虚径} - \text{離径}$ なので、「毬闕変形草解」第 2 問の草と同じ式である。

「求積」の解曰で弓形の重心を中心、重心が回転してできる円周の長さを中心周と名付けている。「環中心周以弧積相乗得環積也」は Pappus-Guldin の定理である。弓形の重心を G, 外接円の中心を O, 直線 OG と回転軸の交点を O$'$ とする。弓形の弦と平行な外接円の直径を軸とする回転体の体積を立圓旁積という。弧積を S, 立円旁積を V とおく。「毬闕変形草解」の問題 1 より $V = 268.0832$ である。「解見題之法」より $S = 11.1825$ である。Pappus-Guldin の定理により $2\pi\overline{\mathrm{OG}}S = V$ だから、

$$\overline{\mathrm{OG}} = \frac{V}{2\pi} = \frac{268.0832}{2 \times 3.1416 \times 11.1825} = 3.8154855$$

したがって、

$$\overline{\mathrm{O'G}} = \overline{\mathrm{O'O}} + \overline{\mathrm{OG}} = \tfrac{1}{2}(\text{虚径} - \text{離径}) + \overline{\mathrm{OG}} = 6.3154855$$

となる。求める体積は

$$2\pi\overline{\mathrm{O'G}} \cdot S = 2 \times 3.1416 \times 6.3154855 \times 11.1825 = 443.7379096$$

となる。

---

[20]「求積」の写本では解曰の何箇所かで、文の切れ目 (句点をつける場所) に句あるいは勾が書かれている (東北大岡本写 0010, 学士院 507 など)。関算前伝八十三 [15] では求之句となり、東北大林文庫 870 では求之$_{\text{句}}$ のように右下付きになっている。原本に原因があるのか、伝写の際についたのかは不明である。

[21]「求積」(東北大岡本写 0010, 九大桑木/和書/685) は割注「〓曰是則虚高再乗冪以弧積六段除之數也」が続く。〓は解読不能。

「毬闕変形草解」は第 1 問の結果を第 2 問で用いるというように問題が系統的に並べられており、未完成の草稿ではなく[22]完成している。

「毬闕変形草解」の第 8 問と第 9 問も「求積」に載録されている。「毬闕変形草解」では図形の用語が弧環加臺と弧環減臺であるのに対し、「求積」ではそれぞれ外偏弧環と偏内弧環である。一方、解見題之法」の最後に「其餘環圓壔圓錐圓臺環錐環臺 [中略] 皆載于其術於別記 (皆その術別記に載す)」と記されているが、環臺は弧環加臺と弧環減臺を含んでいる。したがって、「毬闕変形草解」の用語法は関のものである。

「毬闕変形草解」は、用語法は関のもので、説明の仕方や図は「解見題之法」と同じ直感に訴える簡潔なスタイルで書かれており、関の著作と考えられる。

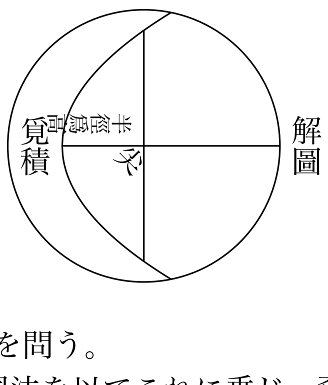
§ 7.2. 関孝和編「求積」

関孝和編「求積」と『大成算経』巻之十三はいくつかの文字を除いて一致している。「求積」は 18 世紀中頃以降関流では七部書の 1 つとして伝書されてきた。かつて藤原松三郎は、『大成算経』巻之十三について「巻 13 は求積と題され、關孝和の求積と全く同一である。」[14, p.429] とのみ記し、関の求積がそのまま『大成算経』巻之十三に取り入れられたように書いている。一方、佐藤賢一は、「『求積』は、『大成算経』の一部をそのまま抜粋したものである」[1, p.37] としている。

7.1 節で取り上げた外弧環 (弓形の回転体) の体積は、「毬闕変形草解」では Pappus-Guldin の定理を表に出さずに求めているが、「求積」では重心を中心と呼び Pappus-Guldin の定理を明示的に用いている。「毬闕変形草解」と「求積」は同じ理論を用いているが、「求積」は理論的に整理されている。

「毬闕変形草解」と「求積」の術語は、外弧環、離径などが異なり、「求積」の説明の仕方が丁寧で関のものではないので、建部賢弘あるいは賢明ということになるが、「求積」の執筆者はどちらであろうか。「求積」と『大成算経』巻之十三で何文字か異なる記載のある球の表面積の問題について、「解見題之法」(学士院 118)、「求積」(関算前伝八十三[23][15]) と『大成算経』巻之十三 (東大 T20-69; 旧南紀文庫[24]) を見てみる。「求積」と『大成算経』の異なる部分に下線を引く

假如有立圓徑 若干 問冪積
置徑自乘之得數以圓周法乘之得冪積
　解術視錐而半徑爲高中心
　爲尖立圓積爲錐積三之以
　高除之得錐面之冪積卽立
　圓冪積也



「解見題之法」

(たとへば、立円有り。径【若干】冪積を問う。
径を置き、これを自乗し、得る数を円周法を以てこれに乗じ、冪積を得る。

[22]「毬闕変形草解」の草は草稿の草ではなく、草日の草と思われる。
[23]内題は「求積前編」、編者名は関孝和編撰であるが、本文は親本に忠実に写していると考えられる。
[24]内題も外題も「求積」であるが、『大成算経』巻之十三成立の直前の版の榊原霞洲による写本である。

解術。錐を視、半径を高さとなし、中心を尖となし、立円積を錐積となし、これを　三たびし、高さを以てこれを除し、錐面の羃積、すなはち立円羃積を得るなり。)

假如有全球徑一尺問冪積[25]
　荅曰冪積三百一十四寸 一百一十三分寸之一十八
術曰置徑 二尺 自之以圓周率相乗得 三萬五千五百寸 爲實以圓徑率除之得冪積
　解曰界于半径視圓錐 乃中心爲尖球徑爲錐徑球半徑爲高 求半球積準錐積
　三之準壔積以錐高 即球半徑 除之得圜面平積即爲半球冪積倍之得全球冪積　「求積」

(解曰半径を界とし、円錐と視る。【すなはち中心を尖となし、球径を錐径となし、球半径を高となす。】半球積求め、錐積に準じこれを三たびし、壔積に準じ錐高【すなはち球半径】を以てこれを除し、円面平積すなはち半球冪積となし、これを倍し、全球冪積を得る。)

假如有全球徑一尺問冪積
[中略] 得全徑冪積　『大成算経』(霞洲本)

「解見題之法」、「求積」および『大成算経』の球の表面積を求める方法は同じである。この方法に対し賢弘が数値計算で求めることを関に提案したところ、賢弘の方法は下等であるとされたとの記載が『綴術算経』探求球面積術第八 (球面の積を求る術を探る) にある。

關氏曰ク、萬法ヲ理(リ)會(クワイ)スルハ形(カタチ)ヲ見(ミ)、道條(ミチスチ)ヲ立(タツル)ヲ以テ原要(ケンエウ)トス。是(コレ)ハ此探(コレサクル)ヿヲ不爲(セ)シテ首(ハシメ)ヨリ眞術(シンシユツ)ヲ會(クワイ)スルノ奥旨也(アウシナリ)ト。乃(スナハチ)後(ノチ)ノ術球(タマ)ノ形(カタチ)ヲ察(サツ)シテ中心ヲ極(キヨク)トシ錐形(スイケイ)ニ見造(ミナス)ハ即(スナハチ)形(カタチ)ヲ見(ミ)、道條(ミチスチ)ヲ立(タツ)ルニシテ探(サク)ルヿ無ク直(タタチ)ニ眞術ヲ理會スル也。故ニ始(ハシメ)ノ術ヲ以テ下等(トウ)ナリト爲(セ)リ。　『綴術算経』28 丁裏

球の表面積を「解見題之法」では羃積あるいは覓積と表しており、「求積」および『大成算経』巻之十三は冪積としている。賢弘は『綴術算経』では球面ノ積としている。

外弧環 (弓形の回転体) の体積、表面積の用語より、「求積」の執筆者は建部賢弘、『大成算経』巻之十三の執筆者は建部賢明と考えられる。「求積」の説明は賢弘によるが、書かれている数学は関のものである。

最後に球の表面積の問題の「求積」と『大成算経』の相違点について述べる。「求積」は得全球冪積[26]であるのに対し、『大成算経』(霞洲本) は得全徑冪積、『大成算経』(関算後伝四十八、京大 10 冊本、理科大物 424[27]) では得全形冪積である。半球冪積を 2 倍にする

[25]「求積」岡本写 0003 は「問羃積 羃冪同」となっている。羃の字と割注が原本にあったものか、書写者がつけたものかは不明である。また、学士院 511 には割注はないが、「問羃積」となっている。
[26]「求積」(学士院 511) は得全球羃積である。
[27]菅野元健による写本である。

のであるから、得全球冪積が本来の表現である。建部賢弘が「得全球冪積」と書いたのに対し、賢明は「得全徑冪積」あるいは「得全形冪積」と書き直した[28]と考えられる。

§7.3. 関孝和編撰「開方算式」について

関孝和編撰「開方算式」の全文は、『大成算経』巻之三にほぼ含まれている。従来「開方算式」は関孝和の著作と考えられていたが、近年は S. W. Zagier と D. Zagier が「「開方算式」の著者 (表向きは関であるが、おそらくは建部賢弘)」[29][11] と述べるなど、従来と異なる説が出されている。

「開方算式」の参照可能な 10 写本[30]と『大成算経』巻之三 (東大 T20-67 変技、関算後伝三十八 [16]、京大和/た/005) の相違点を比較検討することで、「開方算式」と『大成算経』巻之三の関係、および「開方算式」の著者を明らかにする。詳細は現在準備中の [6] に記す。

7.3.1. 課商の 2 つの例題

「開方算式」の課商には類似の問題である第 1 例 $16-8x+x^2=0$ と第 2 例 $25-10x+x^2=0$ がある。「開方算式」の第 2 例では $x = y+1$ と変数変換することにより、第 1 例の $16-8y+y^2=0$ を導き出しているが、第 1 例とは異なる方法で $y=4$ を求めている。一方、第 1 例 $16-8x+x^2=0$ は『大成算経』巻之三には記載されてない。

「開方算式」が『大成算経』巻之三を抜粋してできたとすると、抜粋した者は例題 $25-10x+x^2=0$ の直前に類似の例題 $16-8y+y^2=0$ を書き加えたことになるが、この例題だけを書き加える必然的理由はない。「開方算式」に類似の 2 つの例題が記載されているのは、「開方算式」の編集者は、いずれか 1 つを採用するつもりだったと考えられる。

7.3.2. 「大誤也」か「太誤也」か

序文の最初の割注の最後が、「開方算式」では 10 写本中 8 写本[31]が「大誤也」であるが、『大成算経』は「太誤也」である。「大誤也」と「太誤也」の古典における用例を調べると、「大誤也」については顔之推(がんしすい)撰『顔氏家訓』書証第十七に「既無宿根、至春方生耳、亦大誤也」[32]などの用例があるのに対し、「太誤也」を古典から見つけることはできなかった。

漢文として「大誤也」が正しいと考えられる。「開方算式」が『大成算経』の抜粋であるとすると、抜粋の際に訂正したことになるが、そのようなことは考えにくい。「開方算式」

[28] 賢明は当初「得全徑冪積」と書き直したが、最終的には「得全形冪積」としたのかもしれない。なお、『大成算経』(東北大狩野 7.20820.20) は「得全球巾責 (得全球冪積の略字)」となっているが、巻之十三として「求積」を書写した可能性がある。拙論 [3] を見よ。

[29] "the author (ostensibly Seki, but probably Takebe Katahiro) of the *Configurations for the Extraction of Roots* [開方算式 *Kaihō Sanshiki*]"

[30] 国会図書館 244-137, 学士院 134, 学士院 230, 東大 T20-596, 東大 T20-920, 東北大岡本写 19, 東北大林集書 657, 東北大林文庫 1075, 宮内庁書陵部 557-46, および筆者蔵の 10 点である。

[31] 国会図書館本と宮内庁書陵部本が「太誤也」である。

[32] 原文は `http://www.guoxue123.com/zhibu/0301/00ysjx/006.htm` にある。引用部分の宇都宮清吉訳を示す。「江南の苦菜はもとより多年生の根がなく、春になって初めて種子から発芽することは確かである。だから梁朝学者の説は非常に誤りを犯しているわけだ。」[8, pp.71-72]

が先に出来上がり、それを一部手直しして『大成算経』に取り込んだということになる。

7.3.3. 「百開分子方」か「古開分子方」か

通商の冒頭は「開方算式」と『大成算経』巻之三で一文字異なっている。「開方算式」の 10 写本すべてで「百」となっているが、『大成算経』は「古」である。

> 是開商命不盡數也蓋百開分子方是也　　「開方算式」
> (是、商を開き、不尽数を命ずるなり。蓋(けだ)し、百(ももたび)分子方を開くは是なり)
> 是開商命不盡數也蓋古開分子方是也　　『大成算経』巻之三
> (是、商を開き、不尽数を命ずるなり。蓋し、古(いにしへ)分子方を開くは是なり)

百と古の違いを通商の第 1 例を使って見てみる。

$-33+9x+3x^2=0$
正商二を立て (根 x の整数部分を 2, 小数部分を y とする。すなわち $x=2+y$ と変数変換すると)

$$-33+9(2+y)+3(2+y)^2=-3+21y+3y^2=0$$

最大公約数 3 で約すと

$$-1+7y+y^2=0$$

となる。$y(7+y)=1$ から

$$y=\frac{1}{7+y} \tag{7.1}$$

が得られ、これを $x=2+y$ に代入した

$$x=2+\frac{1}{7+y} \tag{7.2}$$

が通商である。

(7.2) において $y=1$ と置くのが古開分子方である。一方、(7.2) に (7.1) を代入すると、

$$x=2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{7+y}}$$

となる。さらに繰り返すと、

$$x=2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{7+\ddots}}}}$$

となる。これが百開分子方である。

百開分子方を古開分子方に変えると

> 五曰開分子方是開方命不盡之法也 但古法不稱于真理故不載之　「開方」、『大成算経』巻之二
>
> (五曰開分子方、この開方不尽に命ずるの法なり【ただし古法は真理にかなはず、故にこれを載せず】)

に矛盾するので、百開分子方が正しい。

7.3.4. 「開方算式」と『大成算経』巻之三

「大誤」および「百開分子方」より、「開方算式」が先に執筆され、『大成算経』巻之三にほぼそのまま取り込まれたと考えられる。「建部氏伝記」によると、『大成算経』を完成させたのは賢明であるので、「開方算式」の著者は建部賢弘、『大成算経』巻之三の編集者は建部賢明ということになる。

したがって、「大誤」を「太誤」に変えたのは賢明である。『顔氏家訓』は寛文二 (1662) 年に和刻本が刊行されており、祖沖之の子息の数学者で天文学者の祖暅についての記述[33]があるので、賢弘は熟読していたと考えられる。

「百開分子方」については、賢明が「古開分子方」と書き直したのである。定率 (円周率の近似有理数) を連分数展開と同等の方法により発見した賢明が、何故百を古と書き直したのかは謎である。

なお、中根元圭の門弟である入江脩敬は宝暦十 (1760) 年に出版した『一源活法』(学士院 6) 巻一において「十商建不休先生之所撰」と書いている。「開方算式」は十商を扱っているので、入江は「開方算式」の著者は建部賢弘 (建不休先生) であると述べている。

§ 7.4. 関孝和編「開方」について

関孝和編「開方」の写本は東大総合図書館と日本学士院に 1 点ずつ存在する。「開方」からの引用は東大 T20-1201 に基づき、学士院 133 と異なる場合は脚注に示す。本項で比較に用いる『大成算経』巻之二の写本は、東大 T20-72 雑技 (霞洲本)、関算後伝三十七 [16]、京大和/た/005(京大 10 冊本)、理科大物 423(菅野本) の 4 点である。

「開方」は『大成算経』巻之二の開方をほぼ含んでおり、『大成算経』巻之二には含まれてない開分母子の項目のほか、何箇所か『大成算経』にない記述がある。このことについて藤原松三郎は、「帝國學士院及ビ東京帝大圖書館ニ収蔵サレテキル開方一編ハ大成算經巻二ノ「開方」ト殆ンド一致シテキル。唯後人ガ加筆シタ箇所ガ三箇處バカリ存在シ、

[33]「算術亦是六藝要事；自古儒士論天道，定律者，皆學通之．然可以兼明，不可以專業．江南此學殊少，唯范陽祖暅精之，位至南康太守．河北多曉此術」http://www.guoxue123.com/zhibu/0301/00ysjx/007.htm ちなみに宇都宮清吉訳では、「算術もまた六芸の大切な一科目であった。昔から儒学の専門家で天体のことを論じ、暦書に関係した者は何れも算術に明るかった。しかしこの道も余業としてこそ修業すべきで、決して専門にやるべきものではない。江南では、この学問はことさらにふるるわず、ただ一人范陽出祖氏の祖暅だけが精通している。この人は南康太守 (郡長官) にまで昇進している。河北 (北方) には算術に長じたものが多数いる。」[8, p.187] である。

ソノ一ツハ原文ト矛盾シテキルカラ、加筆ノ跡ガハツキリスル」[13, p.212]。として、『大成算経』にない記述は後世の加筆であると断定している。

「開方」にあって、『大成算経』巻之二にない記述は以下の下線の部分である。

> 平方<u>舊法</u>者遞倍商爲法即除實而後自相呼除之
> <u>新法者以商爲法即除實而後自相呼半之除之</u>[割注略] 「開方」
> (平方旧法は、つたへて[34]商を倍して法となし、すなはち実を除(のぞ)き、しかして後自ら相呼びてこれを除(のぞ)く。新法は商を以て法と為し、すなはち実を除(のぞ)き、しかして後自ら相呼びてこれを半(なかば)し、これを除(のぞ)く。)

『大成算経』巻之二の平方は「開方」の旧法であり、新法は記載されてない。『大成算経』巻之二の帰除開方の例題「假如有方地積二百三十五万三千一百五十六坪問方面」の法曰[35]は、旧法で解いていると考えられるので、一般化して現代的に表す[36]。被開平方数を N とし、$n = \lfloor \log_{100} N \rfloor + 1$ とする[37]。j 番目の商 $Q_j = q_j 10^{n-j}$ を q_j が 9 以下の非負整数となるようにとる。旧法のアルゴリズムは $N_0 = N = (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4)^2$ としたとき、

$$
\begin{aligned}
N_1 &= N_0 - Q_1^2 \\
N_2 &= N_1 - Q_2^2 - 2Q_1Q_2 \\
N_3 &= N_2 - Q_3^2 - (2Q_1 + 2Q_2)Q_3 \\
N_4 &= N_3 - Q_4^2 - (2Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3)Q_4
\end{aligned}
$$

である。すなわち、

$$
N_k = N_{k-1} - Q_k^2 - \left(\sum_{j=1}^{k-1} 2Q_j \right) Q_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n
$$

を繰り返す。しかしながら、新法については不明である。

開立方および相応開方についても、「開方」には旧法と新法が記載されており、『大成算経』には旧法のみが記載されている。

「開方」の最後におかれている開分母子は『大成算経』には記載がない。

> <u>開分母子</u>此法不稱于真理
> <u>今有方碑一千四百六十一塊欲爲平方問一</u>

[34] 遞 (新字の逓) について、『全訳漢辞海』(三省堂) には語義として、たがいに (タガヒニ)、つたえる (ツタフ)、かえる (カフ) が挙げられているが、「開方」(学士院 133) には 遞テ と送り仮名が付けられている。

[35] 数学史名古屋セミナーによる現代語訳と解説が [12, p.230,262] にある。

[36] $Q_1, Q_2, \ldots$ は初商、次商、..., $2(Q_1 + Q_2 + \cdots)$ は共得、$Q_1^2, Q_2^2, \ldots$ は自相呼、$N_1, N_2, \ldots$ は実余である。

[37] $\lfloor N \rfloor$ は N を超えない最大の整数である。n は N を 100 進数で表したときの桁数になる。

面方若干
　答曰面方三十八塊　七十七塊分之十七
術曰置積$\frac{\text{二千四百}}{\text{六十一寸}}$爲實如法平方開之得殘
實$\frac{\text{二十}}{\text{七寸}}$法數$\frac{\text{七十}}{\text{六寸}}$以残實則爲分子$\frac{\text{二十}}{\text{七寸}}$法數
加一$\frac{\text{七十}}{\text{七寸}}$爲分母[以下略]　「開方」

『算法統宗』の問題[38]の引用である。今有の上に統宗と頭注があり、割注として「この法は真理に称(かなは)ず」[39]とある。

$\sqrt{1461}$ を $1461-38^2=17$ から

$$\sqrt{1461}=38+\frac{17}{2\times 38+1}=38+\frac{17}{77}$$

としている。この方法は開分子方である。序文の「五曰開分子方」には「但古法不稱于真理故不載之 (ただし古法は真理にかなはず故にこれを載せず)」と割注がある。

「開方」は、『大成算経』巻之二開方を抜き出し新法や開分母子を後に書き加えたものか、「開方」から新法や開分母子を削除して『大成算経』巻之二開方が執筆されたのかを検討する。そのため、「開方」と『大成算経』巻之二が 1 文字異なる相応開方の第 2 問 (『大成算経』巻之二の最後の問題) を見る。

仮如有方壔方六寸高八寸今以積二千三百
零四寸應準[40]而作之問今方高
　答曰今方一尺二寸
　　　今高一尺六寸
法曰置積$\frac{\text{二千三百}}{\text{〇四寸}}$以原方$\frac{\text{六}}{\text{寸}}$相乗以原高$\frac{\text{八}}{\text{寸}}$
除之得$\frac{\text{一千七百}}{\text{二十八寸}}$爲實一筭爲隅法開立方除
之得今方以原高相乗以原方除之即今高[割注略]　「開方」

(法曰、積【二千三百〇四寸】を置き、原方【六寸】を以て相乗、原高八寸を以てこれを除き【一千七百二十八寸】[41]を得て実となす。一算を隅法となし、これを立方に開き、今方を得る。原高を以て相乗、原方を以てこれを除し、すなはち今高。)

「開方」の下線の部分は『大成算経』(霞洲本、関算後伝三十七、京大 10 冊本) では方である。現代の記法を用いて解説する。正四角柱の体積が 2304[立方] 寸のとき、方 (底面の 1

[38]『新編直指算法統宗』少廣章第四、『中國科學技術典籍通彙』數學卷、二、p.1310

[39]東大 T20-1201 の割注は「此法不稱于真理」であるが、学士院 133 の割注は「此法不稱于真理故雖」である。学士院 133 の「故雖」の意味は分からない。この 2 文字があったとするとさらに何文字か欠落しているかもしれない。

[40]「開方」(学士院 133) は應平であるが、「開方」(東大 T20-1201) は『大成算経』と同じ應準であるので、「開方」の祖本は應準と思われる。

[41]「開方」(学士院 133) は一千七百二十寸であるが、「開方」(東大 T20-1201) は一千七百二十八寸であるので、学士院 133 は誤写と思われる。

辺)x と高 y の比が $6:8$ になるような x, y を求めよ、という問題である。

$$x^2 y = 2304, \quad y = \tfrac{8}{6}x$$

なので、

$$x^3 = \frac{2304 \times 6}{8} = 1728$$

より

$$x = \sqrt[3]{1728} = 12\ 寸, \quad y = \tfrac{8}{6} \times 12 = 16\ 寸$$

となる。したがって、最後に得たのは今高の十六寸 (一尺六寸) であるので、「開方」および『大成算経』(菅野本) が正しい。

「建部氏伝記」の記載を考慮すると、建部賢弘が「開方」を執筆し、賢明が「開方」の何箇所かを削除して『大成算経』巻之二に取り込んだと考えられる。『大成算経』巻之二の最後の問題の割注を除く最後の文字を賢弘は高と書いたが、賢明は方と誤ったので、『大成算経』は方[42]である。「開方」と『大成算経』巻之二の関係は、「開方算式」と『大成算経』巻之三の関係と同じであることがわかる。また『大成算経』巻之二には [12] の脚注で指摘されているようないくつかの誤りがあるが、それらのほとんどは「開方」と『大成算経』の共通の誤り[43]である。すなわち、建部賢弘の誤記を賢明がそのまま転記したものである。

賢弘は「開方算式」に類似の例題を 2 題与えたように、「開分母子」は削除するつもりで、序文で述べた「五曰開分子方」とはどのようなものであるかを示すために参考として載せたのではないだろうか。

§8. 『算法大成』の構成

§8.1. 関あるいは賢弘の著作の痕跡がある『大成算経』の巻

『大成算経』巻之十二 (全 44 丁[44]) および巻之十三 (全 40 丁) は『算法大成』の原形をとどめていると考えられるので、『算法大成』の一つの巻は 40 丁前後と思われる。『建部氏伝記』にあるように、全十二巻として『算法大成』の構成を検討する。

関孝和あるいは建部賢弘の著作の痕跡がある『大成算経』の巻を表 5 に示す。『大成算経』のうち関あるいは賢弘の著作の痕跡が残っているのは、巻之二、三、五、六、七、十一、十二、十三、十六、十七、十八の 11 巻である。とはいえ、これらのすべての巻が『算法大成』の原形をとどめているわけではないだろう。

[42]『大成算経』(菅野本) の書写者である菅野元健は方は正しくないと考え高と正している。

[43]たとえば、積平圓の「得 二百八十 以之呼初商除實」の初商は次商の誤りである。『大成算経』(菅野本) のみ正しい。

[44]賢明が執筆した可能性がある「球缺率第四」を除くと 42 丁である。

表 5. 関あるいは賢弘の著作の痕跡がある『大成算経』の巻

『大成算経』	関の著作	賢弘の著作
首	霞洲本に含まれてないので賢明の書	
巻之一		
巻之二		関孝和編「開方」
巻之三	「開方飜変之法」「解隠題之法」	関孝和編撰「開方算式」
巻之四		
巻之五	「累裁招差之法・垜積術解」	
巻之六	「拾遺諸約之法・翦管術解」	
巻之七	「方陣之法・円攢之法」「算脱之法・験符之法」	
巻之八		
巻之九		
巻之十		
巻之十一	「角法並演段図」	
巻之十二	『括要算法』巻貞の原書 (「円率解」「弧背率解」「立圓率解」 と考えられる)	
巻之十三	「毬闕変形草解」	関孝和編「求積」
巻之十四		
巻之十五		
巻之十六	「題術辯議之法」	
巻之十七	「解見題之法」「解隠題之法」「解伏題之法」	
巻之十八	「病題明致之法」	
巻之十九		
巻之二十		

§8.2. 『大成算経』の例題の文型

建部賢弘と建部賢明は数学表現に少し違いがある。本項では、假如ではじまり答を求めるタイプの例題を見てみる。そのような例題のうち各巻に最初に現れるものを抜き出し表 6 に示す。

法曰と術曰と解曰について、賢明は『大成算経』の首篇の用字例において

法曰 是術首之辭乃所爲本自定而爲準者皆註如此而爲其技之規範也
術曰 與前同辭也但其技本無定式而臨機施之者皆用此文而別應變之義也
解曰 是又演段之首辭也

すなわち、法曰と術曰は術の冒頭につける言葉で「同辭也」と説明している。解曰は演段の冒頭の句である。

賢弘が書いたと考えられる巻之二、三、五、六は「荅曰 [後略]　法曰 [後略]」であり、

表 6. 『大成算経』各巻の最初の例題の文型

巻数	例題	型
巻之一	假如有三百四十二箇半加八百一十九箇半問共數 荅曰一千一百六十二箇　法曰置先數 [後略]	A
巻之二	假如有布七百四十五端毎端價銀二十四銭八分問該銀 荅曰銀一十八貫四百七十六銭　法曰置布 [後略]	A
巻之三	假如有牛三十頭生犢二十四頭育之問共數 答曰共五十四頭　法曰置牛 [後略]　解曰是一次加也 [後略]	A
巻之四	無し	
巻之五	無し	
巻之六	假如八十分之三十五問約數　荅曰一十六分之七　法曰 [後略]	A
巻之七	[驗符六十字局配之圖は略す] 假如在第一局一行第二局一行第三局五行 問是何字　荅曰辰字　法曰 [後略]	A
巻之八	假如有粟二百二十五斛毎斗礱得糙米六升問糙米 答曰糙米一百三十五斛　術曰 [後略]	B
巻之九	假如有銀六百三十二銭今甲乙丙三人作三十七差分之問各分銀 答曰甲三百九十二銭 [略]　術曰 [後略]	B
巻之十	假如有平方面各一尺問斜 荅曰斜一尺四寸一分四釐二毛一絲三五六強　術曰 [後略]　解曰 [後略]	C
巻之十一	假如有三角毎面一尺問平径角径及積 荅曰平径二寸八分 [略]　求平径術曰 [後略]	D
巻之十二	假如有圓径若干問周　荅曰得周　術曰 [後略]	B
巻之十三	假如有平方自方二尺五寸問積　荅曰積六百二十五寸 術曰置自方 二尺五寸 自乘之得積也　解曰是平形之首也 [後略]	C
巻之十四	假如有勾股勾五尺六寸股九尺一寸只云縦稍截長一尺三寸問截闊 答曰截闊八寸　術曰 [後略]　解曰 [後略]	C
巻之十五	假如有圓球三隻径各七寸只下數二球上載一球問高 荅曰載高一尺三寸 [後略]　術曰立天元一爲載高 [後略]　解曰 [後略]	C
巻之十六	假如有銀二百三十銭 [略]　荅曰甲六十銭 [後略]　術曰 [後略]	B
巻之十七	無し	
巻之十八	無し	
巻之十九	假如有直積二百五十一寸只云長闊差九寸問長闊 荅曰長二尺一寸　闊一尺二寸　術曰置直積 [後略]	B
巻之二十	假如有人借米四斛 [後略]　荅曰年數 若干 [後略]　術曰 [後略]	B

賢明が書いたと考えられる巻之二十は「荅曰 [後略]　術曰 [後略]」である。

巻之十一は角術の問題であるが、賢弘編『研幾算法』の第二問は「求五角積術曰」であるので、「求平径術曰」は賢弘の文と考えてよく、巻之十三の第 1 問は関孝和編「求積」と同一であるので、「術曰置自方」は賢弘の文である。

以上より、法曰で始まる文は賢弘のものであるが、術曰は賢弘も賢明も用いている。表 5 (背景を灰色にした巻は内容あるいは文体から賢弘筆) を考慮すると、賢弘が執筆した文が元になっているのは
巻之一、二、三、五、六、七、十一、十二、十三、十六、十七、十八
の 12 巻と考えられる。

§9.　おわりに

『建部氏伝記』と『綴術算経』より、『算法大成』はある時期までは、以下のようにの編纂されたことが推測される。

1. 編者名に関孝和編と記載され、天和三年および貞享二年の年記がある稿本は、関孝和による算書編纂プロジェクトの叩き台である。
2. 叩き台に含まれる数学であっても、「算脱之法」のように門弟の数学が取り入れられているものがある。
3. 叩き台に対し、賢弘と賢明が「新ニ考ヘ得ル所ノ妙旨悉ク著シ」たものを賢弘が『算法大成』の草稿にまとめ、関の意見を求めて異論を出されたときは書き直した。
4. 上記 3 が具体的かつ詳細にわかるのが『大成算経』巻之十二である。『括要算法』巻貞の原書に対し、定周は賢弘の修正案が、定率は賢明の修正案が関により承認され採用された。弧率は賢弘の方法が採用された。立圓率は関の方法を超える妙旨は出されなかったが、定率は $\frac{355}{113}$ ではなく、賢明の出した $\frac{5419351}{1725033}$ を用いた。
5. 上記 3 の作業は 1685 年から 1688 年まで行われた。これらの作業終了により、賢弘は『算学啓蒙諺解大成』を執筆した。

以下の 3 点がおおむね明らかになった。

1. 『算法大成』が基になっている『大成算経』は、巻之一、二、三、五、六、七、十一、十二、十三、十六、十七、十八の 12 巻である。
2. 関孝和編「毬積変形草解」は関孝和の執筆である。
3. 編者名が関孝和編/編撰である稿本のうち、「求積」「開方算式」「開方」は建部賢弘の執筆である。

参考文献

写本は、本文あるいは脚注に所蔵館と請求番号を記す。

[1] 上野健爾・小川束・小林龍彦・佐藤賢一、関孝和論序説、岩波書店、2008
[2] 小川束、『綴術算経』の「探算脱術第七」について、数理解析研究所講究録 1257 (2002), 205-209
[3] 長田直樹、関孝和と『大成算経』、数理解析研究所講究録、1831(2013)、85-103
[4] 長田直樹、『解見題之法』について、RIMS Kôkyûroku Bessatsu B50(2014), 9-33
[5] 長田直樹、関孝和編『開方飜変之法』の諸写本について、数学史研究 224(2016), 1-22
[6] 長田直樹、関孝和編撰「開方算式」について、準備中
[7] 加藤平左エ門、算聖関孝和の業績、槇書店、1972
[8] 顔之推、宇都宮清吉訳注、『顔氏家訓』2、東洋文庫 514, 平凡社、1990
[9] 佐藤賢一、近世日本数学史 — 関孝和の実像を求めて、東京大学出版会、2005
[10] 佐藤健一・真島秀行編集、関孝和の人と業績、研成社、2008
[11] Silke Wimmer-Zagier and Don Zagier, Some questions and observations around the mathematics of Seki Takakazu, in *Seki, Founder of Modern Mathematics in Japan*, Spinger, 2013, 275-297.
[12] 名古屋数学史セミナー (小川束、北河一生、小林博行、藤井康生、森本光生)、『大成算経』雑技(巻之二) 現代語訳、関孝和数学研究所報告 2009-2014, II, 201-300, 四日市大学研究機構、2015
[13] 藤原松三郎、和算史ノ研究, VII, 東北数学雑誌第一輯、第 48 巻, 1941
[14] 日本学士院編 (藤原松三郎)、明治前日本数学史第二巻、岩波書店、2008 (初版 1956)
[15] 東アジア数学史研究会編、関流和算書大成、関算四伝書第一期、勉誠出版、2008
[16] 東アジア数学史研究会編、関流和算書大成、関算四伝書第二期、勉誠出版、2010
[17] 橋口侯之介、和本入門、平凡社ライブラリー、平凡社、2011
[18] 森本光生、古法、四乗求背の術、六乗求背の元術について、数理解析研究所講究録 1546 (2007), 175-180
[19] 森本光生・小川束、和算研究の国際化に向けて、数学史研究、239(2021), 105-113.