RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B89 (2022), 127–138

インド算術書における平方と平方根のアルゴリズム：『トリシャティーバーシュヤ』10, 12-13を中心に
Algorithms for Square and Square root in Indian Arithmetic Books: *Triśatībhāṣya* 10, 12–13

徳武太郎
Taro Tokutake*

Abstract

The *Triśatībhāṣya* is an anonymous commentary on the *Triśatī* of Śrīdhara (ca. 800 CE) which is an arithmetic book written in Sanskrit. The *Triśatī* describes arithmetic rules and examples briefly. On the other hand, the *Triśatībhāṣya* explains the computational procedures in detail. The present pater attempts to reconstruct the algorithms for square and square root illustrated in the *Triśatībhāṣya* and to elucidate some of its mathematical features through the comparison with the algorithms given in other arithmetic books.

§1. はじめに

『トリシャティーバーシュヤ』（*Triśatībhāṣya*）は，インドの数学者シュリーダラ（Śrīdhara, 800年頃）が著した算術書『トリシャティー』（*Triśatī*）に対する，著者も年代も未詳の注釈である．同注釈は，唯一完全な写本 A_1（LD Institute, Ahmedabad, 1559）に伝えられるが，S. Dvivedīにより編集され，1899年にカーシー（現ヴァーラーナシー）で出版された『トリシャティー』の刊本には収録されておらず，先行研究はない.『トリシャティー』が算術の規則と例題を韻文で簡潔に表現するのに対し,『トリシャティーバーシュヤ』はそれらを散文で説明し，書板上で行われた算術計算の細部を示してくれる．その意味で，同注釈は，シュリーダラ以降のインド算術の歴史を解明するための重要な散文資料である．

Received October 15, 2021. Revised November 9, 2021.
2020 Mathematics Subject Classication(s): 01A32
Key Words: Algorithms, square, square root, *Triśatībhāṣya*, West India
This work was support by JSPS KAKENHI Grant Number JP21J23080, and the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.
*京都大学 Kyoto University, 606-8501 Japan
email: tokutake.taro.36w@st.kyoto-u.ac.jp

本稿では，平方と平方根のアルゴリズムについて『トリシャティーバーシュヤ』が与える計算手順を再現し，それを他の算術書の手順と比較することで，その数学的特徴の一端の解明を試みる．

§2. 先行研究

インド算術における平方と平方根のアルゴリズムについては，これまでにも多くの研究で取り上げられてきた．その中でも比較的新しい研究としては次のものがある．以下，出版年の古いものから昇順に並べる[1]．

Keller, Agathe. 2006. *Expounding the Mathematical Seed: A Translation of Bhāskara I on the Mathematical Chapter of the Āryabhaṭīya.* 2 vols. Basel: Birkhäuser.

Keller, Agathe. 2012. "Ordering Operations in Square Root Extractions: Analyzing Some Early Medieval Sanskrit Mathematical Texts with the Help of Speech Act Theory", August 30, 2012, 1–45. URL: https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00506929v2/document (accessed October 31, 2021)

Hayashi, Takao. 2017. "The *Bālabodhāṅkavṛtti*: Śambhudāsa's Old-Gujarātī Commentary on the Anonymous Sanskrit Arithmetical Work *Pañcaviṃśatikā*," *SCIAMVS*, 18, 1–132.

Kusuba, Takanori. 2018. "The So-Called "Dust Computations" in the *Līlāvatī*," *Computations and Computing Devices in Mathematics Eduacation Before the Advent of Electronic Calculators.* Edited by Alexei Volkov and Viktor Freiman. Cham: Springer, 95–113.

林隆夫. 2019. 『インド算術研究　『ガニタティラカ』+シンハティラカ注　全訳と注』. 東京: 恒星社厚生閣.

Keller [2006] は，アールヤバタ I（Āryabhaṭa I）の『アールヤバティーヤ』（*Āryabhaṭīya*, 499 年）と，それに対するバースカラ I（Bhāskara I）による注釈の翻訳研究である.『アールヤバティーヤ』には平方根のアルゴリズムしか述べられていないのに対し，バースカラは注釈において平方のアルゴリズムを簡潔に記述した韻文を引用する[2]．

Keller [2012] は，5 つの文献における平方根のアルゴリズムの手順を再現し，それを記述するサンスクリットの表現について分析した研究である．そこで扱われるのは,『アールヤバティーヤ』，それに対するバースカラ I の注とスールヤデーヴァ・ヤジュヴァン（Sūryadeva Yajvan）の注，シュリーダラの『パーティーガニタ』（*Pāṭīgaṇita*），それに対する著者年代未詳の注釈『パーティガニタティーカー』（*Pāṭīgaṇitaṭīkā*）の 5 つである．このうち,『パーティーガニタ』は『トリシャティー』とも多くの詩節を共有する算術の大

[1] 巻末の文献表もこの順序に従う．
[2] Keller [2006: vol. 1, 17; vol. 2, 7–9] 参照.

著である．本稿で扱う平方と平方根の規則についても両書は詩節を同じくする[3].

Hayashi [2017] は，著者未詳の算術書『パンチャヴィンシャティカー』（*Pañcaviṃśatikā*）と，それに対するシャンブダーサ（Śambhudāsa）による古グジャラーティーの注釈『バーラボーダーンカヴリッティ』（*Bālabodhāṅkavṛtti*, 1428/29 年）の研究である．そこでは，同注釈に基づき平方根のアルゴリズムが再現されている[4].

Kusuba [2018] は，バースカラ II（Bhāskara II）の『リーラーヴァティー』（*Līlāvatī*, 1150 年）における整数の 8 則[5]の計算手順の再現を試みた研究であり，そこでは平方および平方根のアルゴリズムについても言及されている．

林 [2019] は，シュリーパティ（Śrīpati）の『ガニタティラカ』（*Gaṇitatilaka*, 1040 年頃）とそれに対するシンハティラカ（Siṃhatilaka）による注釈の翻訳研究である．その序論 §1.7「中世インドの算術計算」では，インド数字を用いた筆算による整数の 8 則に関する各テキストの記述が，歴史的な展開を踏まえて網羅的に扱われている．

以上の研究によると，平方のアルゴリズムを扱うテキストは次の通り．

著者	著作 (略号)	年代
Bhāskara I	Bhāskara I's comm. on the AB (BAB)	629 年
Śrīdhara	*Pāṭīgaṇita* (PG)	800 年頃
未詳	*Pāṭīgaṇitaṭīkā* on the PG (PGT)	未詳
Śrīdhara	*Triśatī* (Tr)	800 年頃
未詳	*Triśatībhāṣya* on the Tr (TrBh)	未詳
Mahāvīra	*Gaṇitasārasaṃgraha* (GSS)	850 年頃
Śrīpati	*Gaṇitatilaka* (GT)	1040 年頃
Siṃhatilaka	Siṃhatilaka's comm. on the GT (SGT)	1265–70 年頃
Bhāskara II	*Līlāvatī* (L)	1150 年
Ṭhakkura Pherū	*Gaṇitasārakaumudī* (GSK)	1315 年頃
Nārāyaṇa	*Gaṇitakaumudī* (GK)	1356 年
Gaṇeśa	Gaṇeśa's comm. on the L (GL)	1545 年
Gaṇeśa*	*Gaṇitamañjarī* (GM)	1570 年

* このガネーシャは L の注釈者とは別人.

また，平方根のアルゴリズムを扱うテキストは上記に加えて次のものがある．

[3] PG 23=Tr 10, PG 25–26=Tr 12–13.

[4] Hayashi [2017: 83] 参照.

[5] 足し算，引き算，掛け算，割り算，平方，平方根，立方，立方根.

著者	著作 (略号)	年代
Āryabhaṭa I	*Āryabhaṭīya* (AB)	499 年
Śrīdhara	*Gaṇitapañcaviṃśī* (GP)*	800 年頃
Śrīpati	*Siddhāntaśekara* (SŚ)**	1040 年頃
Sūryadeva Yajvan	Sūryadeva Yajvan's comm. on the AB (SYAB)	12 世紀
未詳	*Pañcaviṃśatikā* (PV)	未詳 (1429 年以前)
Śambhudāsa	*Bālabodhāṅkavṛtti* on the PV (BBA)	1428/29 年
Āryabhaṭa II	*Mahāsiddhānta* (MS)	950 または 1500 年頃
Munīśvara	*Pāṭīsāra* (PSM)	17 世紀前半

* GP はシュリーダラの真作かどうか疑問が残る簡易算術教科書.
** 平方根の規則については SŚ と GT は詩節を共有する（GT 26=SŚ 13.5）.

これらのうち，BAB，SYAB，PGT，TrBh，SGT，BBA，GL は散文で書かれた注釈であり，それ以外は韻文資料である.

§ 3.　平方のアルゴリズム

ここではまず,『トリシャティーバーシュヤ』の説明に基づき平方のアルゴリズムの計算手順の細部を再現してから，それを他のテキストと比較していく.

§ 3.1.　『トリシャティーバーシュヤ』

『トリシャティー』が与える平方のアルゴリズムは次の通り[6].

> 最後の項（最高位）の平方を作ってから，二倍した最後［の項］に残りの項（位）を掛けるべきである.［残りの項を一つ一つ］繰り返し移動しながら．そして,［最後の］項からの残り［の項］を［1 桁右に］移動するべきである．平方［を作る］ために．/Tr 10/[7]

これは位取りによるアルゴリズムであり,

$$(a \cdot 10 + b)^2 = a^2 \cdot 10^2 + 2ab \cdot 10 + b^2$$

を原理とする.『トリシャティーバーシュヤ』はこのアルゴリズムを次のように説明する.

> ［平方されるべき数は］432．この項（432）の平方の演算が示される．**「最後の項は」**四．それ（最後の項）の**「平方」**（**kṛti**=vargra）[8]，すなわちそれ［自身］を乗数とするもの（tadguṇa），すなわち十六が置かれるべきである．**「二倍した最後［の項］に残りの項を掛けるべきである」**．**「二倍した最後［の項］に」**8**「残りの項を」**32，すなわち［十位の 3 と一位の 2 の］両方を掛ければ 256 が生ずる．そ

[6]和訳における（　）と［　］はそれぞれ直前の語句の説明とテキストを補う語句を囲む．以下同様.
[7]kṛtvāntyapadasya kṛtiṃ śeṣapadairdviguṇamantyamabhihanyāt/
utsāryotsārya padāccheṣaṃ cotsārayet kṛtaye//Tr 10//
[8]Tr 10a の kṛti が vargra（正規形は varga）という語によって言い換えられているが，どちらも「平方」を意味する.

れ（256）が十六の［六から］下に位を一つ引いたものとして（ekasthānonatayā）置かれるべきである．**「繰り返し移動しながら」**．**「［最後の］項からの」**．まさに再び，**「最後の項の平方を」**9**「作ってから」**，残りの［項の］下に置かれるべきである[9]．［この場合の］残りの項は二と呼ばれる．2．二倍した最後の項にこれ（2）を掛けたものが，九の下に置かれるべきである．それから，**「最後の項の」**，すなわち二 2 の**「平方を作ってから」**，四が置かれるべきである．このように［得られた］これらの数字が足し合わされたら，平方数が生ずる．186624．13.[10]/TrBh 10/[11]

上の記述に従うと計算手順は次のように再現される．

1）平方されるべき数を置く：

4	**3**	**2**

2）「最後の項」（4）の「平方」（16）を 4 の下に置く（TrBh 10 に「下に」とは明記されていない）：

	4	3	2
1	**6**		

3）「二倍の最後の項」（$4 \times 2 = 8$）に「残りの項」（32）を掛け，結果 256 を 16 の下に「位を一つ引いたものとして」置く：

	4	3	2
1	6	**5**	**6**
	2		

4）不要になった 4 を消し,「残りの項」（32）を移動する：

			3	**2**
1	6	5	6	
	2			

5）「最後の項」（3）の「平方」（9）をその 3 の下に置く：

			3	2
1	6	5	6	
	2		**9**	

[9] これは以下に再現した計算手順のステップ 5) にあたるが,「残りの［項の］下」ではなく,「最後の項の下」でなくてはならない．TrBh の著者の誤記だろうか．

[10] この “13” という番号が何を示すかは不明．Tr の規則の詩節と例題の詩節の通し番号だとすれば 1 少ない．

[11] 432/ asya padasya vargravidhirnidarśyate/ aṃtyapadaṃ catvārastasya kṛtirvargraḥ tadguṇaḥ ṣoḍaśaḥ sthāpyāḥ/ śeṣapadairdviguṇamamaṃtyamabhihanyāt/ dviguṇaṃ aṃtyaṃ 8 śeṣapadaiḥ 32 ābhyāṃ hataṃ 256 jātaṃ/ tat ṣoḍaśānāmadhaḥ ekasthānonatayā sthāpyaṃ/ utsārya utsārya padāt/ punareva kṛtvāṃtyapadasya kṛtiṃ 9 śeṣāṇāmadhaḥ sthāpyāḥ/ śeṣapadaṃ dvisaṃjñaṃ/ 2/ anena hataṃ dviguṇamamaṃtyapadaṃ navā⟨nā⟩madhaḥ sthāpyaṃ/ tato ’ṃtyapadasya dvikasya 2 kṛtiṃ kṛtvā catvāraḥ sthāpyāḥ/ evamete ’ṃkā yojitā vargrarāśirbhavati/ 186624//cha//13//TrBh 10//

6）「二倍の最後の項」（$3 \times 2 = 6$）に「残りの項」（2）を掛け，結果 12 を 9 の下に位を一つ引いて置く：

			3	2
1	6	5	6	**2**
	2		9	
			1	

7）不要になった 3 を消し,「残りの項」（2）を移動する：

					2
1	6	5	6	2	
	2		9		
			1		

8）「最後の項」（2）の「平方」（4）をその 2 の下に置く：

					2
1	6	5	6	2	**4**
	2		9		
			1		

9）「残りの項」がないので演算は終わり，不要になった 2 を消し，数字の和をとる：

1	**8**	**6**	**6**	**2**	**4**

したがって，$432^2 = 186624$．ステップ 2）には明記されていないが，ステップ 3），5），6）では「下に」（adhaḥ）と明記されているので，途中の計算結果を元の数の下に書いていると考えられる．ただし，ステップ 3）の「下に」は，空間的な上下関係だけでなく，位取りの上下関係も示す[12]．「両者を」（ābhyām）と述べていることから，ステップ 3）を次の 2 つに分けているようである．

3a）$8 \times 3 = 24$ を 16 の下に「位を一つ引いたものとして」書く：

	4	3	2
1	6	**4**	
	2		

3b）$8 \times 2 = 16$ を 2 の下に位を一つ引いて加える：

	4	3	2
1	6	**5**	**6**
	2		

ステップ 4），7），9）における不要になった数を消す操作は，林 [2019: 73–4] が示す『パーティーガニタティーカー』の手順に基づき補ったものであり，Tr 10 と TrBh 10 には明記されていない．

[12]以下に示すように，$8 \times 3 = 24$ では 4 が 6 のすぐ下（右）の桁になるように，$8 \times 2 = 16$ では 6 がさらにその下（右）の桁になるように置く．

§ 3.2. その他のテキスト

林 [2019: 71–7, 128–31] の比較研究によると，平方のアルゴリズムについてテキストごとに差異がみられるのは，途中の計算結果を書く位置においてである．それをまとめたのが次の表である．

韻文資料	計算結果の位置	散文資料	計算結果の位置
		BAB 2.3ab*	記述なし
PG 23	記述なし	PGṬ 23	上
Tr 10	記述なし	**TrBh 10**	**下**
GSS 2.31	記述なし		
GT 23	記述なし	**SGT 23**	**下**
L 19bcd	上	GL 19	上
GSK 1.34	記述なし		
GK 1.17bcd	上		
GM 23abc	上		

* Keller [2006: vol. 1, 17; vol. 2, 7–9] 参照.

TrBh 10 のように途中の計算結果を元の数の下に書くのは SGT 23 のみである．それ以外のテキストは元の数の上に書くか，あるいは，それに関する記述がないかのいずれかである．GL 19 はアルゴリズムに対する生起次第（upapatti）[13]を与える．そこでは「... それぞれ自分の上に」という本文を引用しており，計算結果を書く位置に関しては L 19 に従っているようである[14].

§ 4. 平方根のアルゴリズム

ここではまず,『トリシャティーバーシュヤ』の説明に基づき平方根のアルゴリズムの計算手順の細部を再現してから，それを他のテキストと比較していく．

§ 4.1. 『トリシャティーバーシュヤ』

『トリシャティー』が与える平方根のアルゴリズムは次の通り．

> 奇数項（奇数位）から平方を除去し，位置を落とした（右の位に移動した）二倍の根で残りを割るべきである．商を［根の］列に入れるべきである．//それの平方を［次の奇数位から］引き，前のように，商を二倍するべきである．それから，［根の列を 1 桁右へ］移動し，残りを割るべきである.［この操作を繰り返し，最後に,］二倍されたもの（根の列にあるもの）を半分にするべきである/Tr 12–13/[15]

[13]生起次第（upapatti）は，インド数学における「証明」に最も近い語．林・矢野 [1980: 186–89]，林 [2020: 268–72] 参照.

[14]林 [2019: 75–7] 参照.

[15]viṣamāt padatastyaktvā vargaṃ sthānacyutena mūlena/
dviguṇena bhajeccheṣaṃ labdhaṃ viniveśayet paṅktyām//Tr 12//
tadvargaṃ saṃśodhya dviguṇīkurvīta pūrvavallabdham/
utsārya tato vibhajeccheṣaṃ dviguṇīkṛtaṃ dalayet//Tr 13//

これは平方のアルゴリズムと同じ式,

$$(a \cdot 10 + b)^2 = a^2 \cdot 10^2 + 2ab \cdot 10 + b^2$$

で,右辺から左辺を求める操作である.『トリシャティーバーシュヤ』はこのアルゴリズムを次のように説明する.

> 書置．186624．この書置の奇数［位］は最後の手前．それ（奇数位）から四の平方が落とされたら（引かれたら），26624 が置かれる．上［の数字 26］を割るとき，それから，位置が落とされ，二倍された四により八がある 8．それら（8）で［上の数字 26］が割られたら $\begin{array}{|ccccc|} 2 & 6 & 6 & 2 & 4 \\ & 8 & & & \\ & 3 & & & \\ \hline \end{array}$，三が得られる 3．商（3）を列に入れ，三の平方も自分の数字の上から落として（引いて），二倍するべきである．$\begin{array}{|cccc|} 1 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & 6 & & \\ \hline \end{array}$ 得られたもの（86）を移動して，再び［上の 172 を 86 で］割るべきである.［商］二によって $\begin{array}{|cccc|} 1 & 7 & 2 & 4 \\ & 8 & 6 & \\ & & 2 & \\ \hline \end{array}$ がある．商二が［列に］置かれる $\begin{array}{|ccc|} & & 4 \\ 8 & 6 & 2 \\ \hline \end{array}$．さらに，それ（2）の平方を［上の 4 から］除去することで，［上の］四も消え去る．二が二倍されたら 864．全ての二倍された数字の半分が取られるべきである.［864 の］半分が［とられたら］，432 平方根となる．/TrBh 12–13.2/[16]

上の記述に従うと計算手順は次のように再現される.

[16] nyāsaḥ 186624/ asya nyāsasya viṣamamupāṃtyaṃ/ tato vargre caturṇṇāṃ pātite sthitaṃ 26624/ uddharati ūrdvaṃ tataḥ sthānacyutaiḥ 4 caturbhirdviguṇīkṛtairaṣṭau bhavaṃti 8/ tairbhāge hṛte $\begin{array}{|ccccc|} 2 & 6 & 6 & 2 & 4 \\ & 8 & & & \\ & 3 & & & \\ \hline \end{array}$ tra⟨yo⟩labhyaṃte 3/ labdhaṃ paṃktyāṃ viniveśya trayāṇāmapi vargraṃ svāṃkāt ūrdvāt pātayitvā dviguṇīkuryāt/ $\begin{array}{|cccc|} 1 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & 6 & & \\ \hline \end{array}$ labdhamutsārya punarbhajet/ dvikena $\begin{array}{|cccc|} 1 & 7 & 2 & 4 \\ & 8 & 6 & \\ & & 2 & \\ \hline \end{array}$/ labdhaṃ dvikaṃ sthitaṃ $\begin{array}{|ccc|} & & 4 \\ 8 & 6 & 2 \\ \hline \end{array}$/ punastadvargraṃ tyaktvā catuṣko 'pi gataḥ/ dvike dviguṇīkṛte 864/ sarveṣāṃ dviguṇīkṛtānāmaṃkānāṃ arddhaṃ grāhyaṃ/ arddhe 432 vargramūlaṃ bhavati//TrBh 12–13.2//

1）開平すべき数 186624 を置き，一位から順に，viṣama（奇），sama（偶），viṣama（奇），sama（偶），と名付ける：

sa	vi	sa	vi	sa	vi
1	**8**	**6**	**6**	**2**	**4**

2）「最後の手前」の奇数位 8 を始めとする数 18 から可能な最大の平方数 4^2 を引く（$18 - 4^2 = 2$）：

2	6	6	2	4

3) その平方数 4^2 の根 4 の二倍 8 を 1 桁右の 6 の下に置く（$2\sqrt{4^2} = 8$）．これを根の「列」（paṅkti）という：

2	6	6	2	4
	8			

4）その 8 で 26 を割るために商を 3 とし，それを仮に 8 の下に置く：

2	6	6	2	4
	8			
	3			

5）割り算を実行する（$26 - 8 \times 3 = 2$）：

2	6	2	4
8			
3			

6）商 3 を「列」に入れる：

2	6	2	4
8	**3**		

7）商 3 の平方を「自分の数字の上」26 から引く（$26 - 3^2 = 17$）：

1	**7**	2	4
8	3		

8）商 3 を二倍する（$3 \times 2 = 6$）：

1	7	2	4
8	**6**		

9）「得られたもの」86 を 1 桁右へ移動する：

1	7	2	4
	8	**6**	

10）その 86 で上の 172 を割るために商を 2 とし，それを仮に 6 の下に置く：

1	7	2	4
	8	6	
		2	

11）割り算を実行する（$172 - 86 \times 2 = 0$）：

$$\begin{array}{|ccc|} & & 4 \\ 8 & 6 & \\ & 2 & \\ \hline \end{array}$$

12）商 2 を「列」に入れる：

$$\begin{array}{|ccc|} & & 4 \\ 8 & 6 & \mathbf{2} \\ \hline \end{array}$$

13）商 2 の平方を上の 4 から引くと残りはない（$4 - 2^2 = 0$）：

$$\begin{array}{|ccc|} 8 & 6 & 2 \\ \hline \end{array}$$

14）商 2 を二倍する（$2 \times 2 = 4$）：

$$\begin{array}{|ccc|} 8 & 6 & \mathbf{4} \\ \hline \end{array}$$

15）「全ての二倍された数字」864 を半分にする（$864 \div 2 = 432$）：

$$\begin{array}{|ccc|} \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \hline \end{array}$$

したがって，$\sqrt{186624} = 432$．ただし，原文においてステップ 3），5），6），7），9），11），13）の数字配列の図（書置）は省略されている．ステップ 4）と 10）の商を仮に置く操作とステップ 15）の全ての 2 倍された商を半分にする操作の 2 つに関して，以下では他のテキストと比較する．

§4.2. その他のテキスト

『トリシャティーバーシュヤ』には商を仮に置く操作と全ての 2 倍された商を半分にする操作が行われていたが，他のテキストにはこれらの操作を行わないものもある．以下の表は，§2 に列挙した先行研究に基づき，各テキストにおける操作の有無をまとめたものである．ただし，操作を行う場合を ○，操作を行わない場合または記述がない場合を × と表記する．

韻文資料	商の仮置き	商を半分	散文資料	商の仮置き	商を半分
AB 2.4	×	×	BAB 2.4	×	×
			SYAB 2.4	×	○
PG 25-26	×	○	PGṬ 25-26	×	○
Tr 12-13	×	○	**TrBh 12-13.2**	○	○
GP 3-4ab	×	○			
GSS 2.36	×	○			
GT 26	×	○	**SGT 26**	○	○
SŚ 13.5	×	○			
L 22	×	○			
GSK 1.37-38	×	○			
GK 1.19-20	×	○			
PV 11-12	×	○	BBA 11-12.1	×	○
MS 15.6c-7	×	○			
GM 25	×	×			
PSM 21b-23	×	×			

TrBh 12–13.2 のように商の仮置きを行うのは SGT 26 のみである．AB 2.4，BAB 2.4，GM 25，PSM 21b–23 において最後に商を半分にする操作がないところをみると，根の列は 2 倍せず，除数として用いるときに暗算で 2 倍していたのかもしれない[17]．SYAB 2.4 は AB 2.4 に対する注釈であるにもかかわらず，最後に 2 倍された商を半分にする操作を実行する[18]．例外として，SGT 26 と BBA 11–12.1 は最後の商以外の根の列を半分にし，それに最後の商を 2 倍せずにそのまま加える[19]．これを §4.1 で再現したステップ 13）以降に適用すると次の通り．

13）商 2 の平方を上の 4 から引くと残りはない（$4 - 2^2 = 0$）：	8	6	2
14）なし．			
15）二倍されていた数を半分にする（$86 \div 2 = 43$）：	**4**	**3**	2

シンハティラカ注の著者シンハティラカは 13 世紀後半に西インドで活躍したジャイナ教徒の学者であり[20]，『バーラボーダーンカヴリッティ』は西インドで書かれた古グジャラーティーの注釈である．両書の地域が一致することから，この操作は西インドの算術の伝統に由来するものかもしれない．

§5.　結論

『トリシャティーバーシュヤ』が与える計算手順を再現し，他のテキストの計算手順と比較した結果，同書の特徴として次のことが分かった．1）平方のアルゴリズムにおいて，途中の計算結果を元の数字の下に書く，2）平方根のアルゴリズムにおいて，割り算を実行する前に商を仮に下に書く．そして，1）と 2）の特徴はいずれも，シンハティラカ注と共通する．

シンハティラカは西インドで活躍したジャイナ教徒の学者であった．『トリシャティーバーシュヤ』の著者に関する情報は乏しいが，古グジャラーティーなどで「十二」を表す数詞 bāra を用いていることから，彼の在所は西インドであったと考えられる[21]．シンハティラカと『トリシャティーバーシュヤ』の著者の在所が一致するならば，上でみた 1）と 2）のアルゴリズムの特徴は，西インドで伝えられていた算術に共通する特徴であった可能性がある．ただし，本稿では全ての散文資料を参照したわけではなく，なかには 1）と 2）と同じ特徴を持つものがあるかもしれない．今後は，他の散文資料の記述を調査し，そこから平方と平方根のアルゴリズムの手順を再現することにより，1）と 2）の特徴が西インドの算術の伝統に由来するか否かを検証する必要がある．

[17] Keller [2012: 39–41]，林 [2019: 80] 参照．
[18] Keller [2012: 18, fn. 31; 42–3] 参照．
[19] Hayashi [2017: 83]，林 [2019: 78–9, 135–38] 参照．
[20] 林 [2019: v, 16–9] 参照．なお，本稿における「西インド」はグジャラート周辺の地域を指す．
[21] 徳武 [2021: 15] 参照．

参考文献

[1] Dvivedí, Sudhákara (ed). 1899. *Triśatiká by Śrídharácárya*. Káśí: Pandit Jagannátha Śarmá Mehtá.

[2] 林隆夫・矢野道雄. 1980. 「リーラーヴァティー」. 矢野道雄編. 『インド天文学・数学集』科学の名著 1 . 東京: 朝日出版社 1980, 139–372.

[3] Keller, Agathe. 2006. *Expounding the Mathematical Seed: A Translation of Bhāskara I on the Mathematical Chapter of the Āryabhaṭīya*. 2 vols. Basel: Birkhäuser.

[4] Plofker, Kim. 2009. *Mathematics in India*. Princeton: Princeton University Press.

[5] Keller, Agathe. 2012. "Ordering Operations in Square Root Extractions: Analyzing Some Early Medieval Sanskrit Mathematical Texts with the Help of Speech Act Theory", August 30, 2012, 1–45. URL: https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00506929v2/document (accessed October 31, 2021)

[6] Hayashi, Takao (ed). 2017. "The *Bālabodhāṅkavṛtti*: Śambhudāsa's Old-Gujarātī Commentary on the Anonymous Sanskrit Arithmetical Work *Pañcaviṃśatikā*," *SCIAMVS*, 18, 1–132.

[7] Kusuba, Takanori. 2018. "The So-Called "Dust Computations" in the *Līlāvatī*," *Computations and Computing Devices in Mathematics Eduacation Before the Advent of Electronic Calculators*. Edited by Alexei Volkov and Viktor Freiman. Cham: Springer, 95–113.

[8] 林隆夫. 2019. 『インド算術研究　『ガニタティラカ』+シンハティラカ注　全訳と注』. 東京: 恒星社厚生閣.

[9] 林隆夫. 2020. 『インドの数学: ゼロの発明』. 東京: 筑摩書房.

[10] 徳武太郎. 2021. 「インド算術書『トリシャティー』——著者未詳の注釈『トリシャティーバーシュヤ』と共に——」. 修士論文, 京都大学.