RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B89 (2022), 139–153

オーガスタス・ド・モルガン　ー人と業績ー
Augustus De Morgan: his life and work

小藤俊幸
Toshiyuki Koto *

Abstract

Recently, special attention has been paid to Augustus De Morgan concerning his influence on mathematics and mathematical education of Japan in the Meiji period (1868-1912). In this note, we survey his life and work, which seems to have contributed indirectly to the development of mathematics from the late 19th century to the 20th century.

§1.　はじめに

明治期の日本の数学，数学教育に関連して，オーガスタス・ド・モルガン (Augustus De Morgan, 1806-1871) が注目されている [34, 41]．19 世紀のイギリスを代表する 10 人の数学者の 1 人に挙げられており [45]，日本でも数学，数学教育に携わる人で，その名前 [1] を知らない人はいないであろうが，実像は，あまり知られていないように思われる．カントル (Georg Gantor 1845-1918) による集合論の創始を 1 つの契機として，19 世紀末から，数学は抽象的な対象を扱うことが主流となった．ド・モルガンが活動したのは，そうした古典的な数学から現代的な数学への移行期にあたり，その中にあって，独創的な研究をしたとはいい難い．数学者というより，教育者，啓蒙家の傾向が強いため，数学史において大きく取り上げられることは少ない．

アメリカの数学史家スミス (David Eugene Smith, 1860-1944) は，1923 年初版の著書 ”History of Mathematics”[56] において，ド・モルガンについて，”Educated at Trinity College, Cambridge, he became pofessor of mathematics in London in 1828, displaying unusual gifts as a teacher and scattering his energies recklessly.” と述べている (p. 462)．

Received October 31, 2021. Revised January 31, 2022.
2020 Mathematics Subject Classification(s): 01A55
Key Words: Augustus De Morgan, Algebra, Probability, Logic
*南山大学 Nanzan University, Nagoya, 466-8673 JAPAN
email: koto@ms.nanzan-u.ac.jp
[1] イギリス人なので「ド・モーガン」と表記するほうがよいと思われるが，数学分野では定着している「ド・モルガン」を用いる．

最後の ”scattering his energies recklessly” は直訳すると,「活力を無鉄砲にまき散らした」である．さらに，ド・モルガンの執筆した教科書について，”He wrote various textbooks, each a mine of information for the teacher and entirely hopeless for the pupil.” と評している．小倉金之助 (1885-1962) も 1932 年初版の『数学教育史』[50] において，いくつかの個所でド・モルガンに言及している．特に「ド・モルガンとトドハンターとを同列にして談ずることなかれ．ド・モルガンは今一度，全面的に，再吟味を要する人である.」と述べて（p.138）ド・モルガンに強い関心を寄せているが，小倉が，その後，ド・モルガンについて論じた形跡はない．興味深いが捉え難い人物というのが当時のド・モルガンの評価ではないかと思われる．

そうした評価は現在でも大きく変わってはいないと思われる.「興味深いが捉え難い人物」の人となりや業績をできるだけ分かりやすくまとめ，今後の研究のための一助としたいというのが本稿の目的である．

§ 2.　ド・モルガンの経歴と時代背景

ド・モルガンの経歴（と主要業績）については，安藤 [1] の補遺 1 (pp. 209–2011) に簡潔にまとめられている．河野・中山 [34] でも触れられている．ここでは，より詳しく述べる．参考にしたのは，イギリスの数学教育の歴史をまとめた書籍 [31] の第 5 章，”Lectures on Ten British Mathematicians of the Nineteenth Century” [45] の第 2 章，ならびに，夫人の著した伝記 [23] である．

§ 2.1.　ド・モルガンの経歴

ド・モルガンはインド南部の都市 Madurai (マドゥライ) で生まれる．インドにいたのは生後 7 か月までで，家族とともイギリスに戻るが，インドで眼病にかかり右目の視力を失う．父親は東インド会社に勤める army colonel (陸軍大佐) で，その後，家族をイギリスに残したまま再びインドに赴任し，ド・モルガンが 6 歳の頃に病気で亡くなる．母方の曽祖父ドドソン (James Dodson, 1705-1757) はド・モアブル (Abraham de Moivre, 1667-1754) とも親交のあった数学者であったが，一族にとって，ドドソンの存在は skeleton in the cupboard[2] であったという（[31], p. 76)．

1823 年，16 歳のとき，ケンブリッジ大学のトリニティ・カレッジに入学している．今の大学とは状況が違うが，当時も多くの学生が 20 歳前後で入学しているので，やはり早いのであろう．1827 年に 4th Wrangler[3] で卒業している．その頃，初めてド・モルガンと会った夫人は ”Mr. De Morgan first came to our house with Mr. Stratford. He then looked so much older than he was that we were surprised by hearing his real age –just twenty-one. I was nineteen.” と述懐している（[23], p. 20)．

[2]食器戸棚の中の骸骨．他人に知られたくない家の恥の意．

[3]ケンブリッジ大学の卒業試験である数学トライポスと Wrangler 制度については，拙論 [40]，第 3 節「ケンブリッジ大学の数学トライポス」を参照されたい．

当時のケンブリッジ大学は，学位授与や教員採用をイギリス国教会 (Anglican Church) 教徒に限定していた．非国教会徒であったド・モルガンは the Thirty-Nine Articles[4] への同意を拒否したため，大学院への進学すら認められなかった．そうして大学教員への道が断たれ，一旦は，法律家を志すことになった．しかし，ほどなく，1826 年に宗教色を排し「無神の大学」として設立されたロンドン大学に数学教授として迎えられる．1828 年，ド・モルガンが 21 歳のときである．ロンドン大学は，通学制を採用して学費を低く抑え，新興の中流市民階級の子弟を対象にして，幅広いカリキュラムを提供した．大学評議会との対立から，1831 年から 1835 年まで一旦，職を離れるが，1836 年に復職し，以降 30 年間にわたり数学教授を務めた．Oxford Dictionary of National Biography には ”His income as professor never reached £500, and in later years declined, seldom exceeding £300.” とある．これは年収のことで，500 ポンドは現在の価値に換算すると 450 万円ぐらいである．収入を補うために，私的に生徒[5] を教えた．9 時から 10 時まで午前中の授業を行い，15 時から 16 時まで午後の授業を行い，合間に私的な生徒を教えるのが標準的な日課であった（[31], p. 82)．さらに，ロンドン大学では evening class と呼ばれる市民講座的な授業も開講されていた．そうしてド・モルガンは，豊富な教育経験を積んだと考えられる．

1837 年にフレンド (William Frend, 1757-1841）の長女ソフィアと結婚する．フレンドはド・モルガンと同様な理由でケンブリッジ大学を離れた数学者であり，負の数の使用に異議を唱えたことから,『数学教育史』では旧習にとらわれた時代遅れの人物のように書かれている（[50], p.136）．ド・モルガン夫妻には，三男四女 7 人の子供があった．長男のウィリアムは陶芸作家として有名であり [66]，末娘のメアリは 3 冊の童話集を著している [22]．ド・モルガンの後を継いで数学者となったのは次男のジョージである．ド・モルガンは 1865 年に新設された London Mathematical Society の会長に就任した．学会設立とド・モルガンの会長就任に尽力したのがジョージである．その 2 年後，25 歳の若さで亡くなる．ド・モルガンの亡くなる 4 年前のことである．

§2.2.　解析協会と有用知識普及協会

19 世紀初頭のイギリスは，植民地を拡大し世界の陸地面積の 1/5 を占有したといわれる．また，世界で初めて産業革命に成功し，全世界の衣料品の半分，工業製品の 4 割を生産したことから,「世界の工場」と呼ばれた．そうして経済的に発展したが，一方で様々な社会問題も抱えていた．

数学界のレベルは，ヨーロッパ大陸，特にフランスと比べて高くはなかった．1889 年に出版されたボール (Walter William Rouse Ball, 1850-1925) の ”A History of the Study of Mathematics at Cambridge” [3] では，1800 年代初頭から 1850 年代までのケンブリッジ大学（出身）の研究者を Analytical School と総称している．この名称は，1812 年に 3 人の学生，ピーコック (George Peacock, 1791-1858)，ハーシェル (Sir John Fredrick

[4]アングリカン 39 箇条．イギリス国教会の教理規定．

[5]そうした生徒の中に，後に「世界初のプログラマー」と呼ばれるラブレス (Ada Lovelace, 1815-1852，[46] の訳・注者) がいた．アメリカ国防総省の開発したプログラミング言語 ADA の語源となった女性である．

William Herschel, 1792-1871)，バベジ (Charles Babbage, 1792-1871) を中心に結成された Analytical Society (解析協会) にちなむ.『数学教育史』 ([50]，p. 136) には，次のように書かれている.

> 今やケンブリッヂのピーコック (1791-1858) は，数学研究ならびに数学教育の振興のため，立ち上がった．彼はイギリスの数学界が，先ずニュートンの偶像視を止めて，大陸の学風を容れざるべからざるを痛感した．彼がその同僚と着手した第一の仕事は，ラクロアの初等微積分学の翻訳であった.

1818 年に英訳書が出版されたフランスの数学者ラクロア (S. F. Lacroix, 1765–1843) の ”An Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus” は，当時の微分積分学では先端的と思われる内容も含んだ教科書で，付録も含めると 720 頁ほどになる．簡単な偏微分方程式などの微分方程式の解法が書かれていて，変分法にも触れられている．19 世紀後半，イギリスでは偏微分方程式論や数理物理学が飛躍的に発展した ([37], 第 V 章)．その下地を作るのに貢献したのではないかと思われる．ド・モルガンも Analytical School の末期のメンバーである.

当時の社会情勢を象徴するのが，ロンドン大学と同じ年に設立された Society for the Diffusion of Useful Knowledge (有用知識普及協会) であろう．公的な教育を受けられない人のために，さまざまな書籍を出版して安価で提供することを目的として，民衆教育活動家として知られるブルーム (Henry Brougham, 1778-1868. [62], pp. 224-229) を中心に設立された．書籍シリーズ Library of Useful Knowledge や百科事典 Penny Cyclopaedia，教育雑誌 Quarterly Journal of Eduction などを出版した．伝記 [23] の巻末の List of Writings (pp. 401-415) によると，ド・モルガンは，書籍シリーズの 3 冊の書籍を執筆し，Penny Cyclopaedia の約 700 の項目を担当し，Quarterly Journal of Eduction に 33 編の記事を書いている．数学用語 ”Mathematical Induction” は，ド・モルガンが Penny Cyclopaedia に執筆して広まったという [6]．Stiger [58] では，Penny Cyclopaedia に ”Probability”, ”Mean”, ”Least squares”, ”Weight of obserbations” を執筆したことが取り上げられている（p. 158)．また，Quarterly Journal of Eduction に掲載された論説では，算術や幾何学の初等教育に関して，ペスタロッチ (Johann Heinrich Pestalozzi, 1746-1827) 流の実物教授を提唱している [41].

§3. 主要著作から見る業績

ド・モルガンの主要な著作を挙げる．ほとんどがロンドン大学の出版物の出版・販売を請け負った Taylor and Walton の出版である.

1834 年 The Elements of Arithmetic [10]
1835 年 Elements of Algebra Preliminary to the Differential Calculus [11]
1836 年 On the Study and Difficulties of Mathematics [12]
1836 年 Connection of Number and Magnitude: An Attempt to Explain the Fifth

Book of Euclid [13]
1837 年 Theory of Probabilities [14]
1838 年 Essay on Probabilities, and on their Appilcation to Life Cotingencies and Insurance Offices [15]
1839 年 First Notions of Logic (Preparatory to Study of Geometry) [16]
1842 年 The Differential and Integral Calculus [17]
1847 年 Arithmetic Books from the Invention of Printing to the Present Time [18]
1847 年 Formal Logic: Or the Calculus of Inference Necessary and Probable [19]
1849 年 Trigometry and Double Algebra [20]

1847 年出版の ”Formal Logic” 以外は，基本的に，教科書や啓蒙書である．例えば，1834 年初版の ”The Elements of Arithmetic” は，位取り記数法など，算術の基本原理をまとめたものである．算術の教科書というより，算術を教える教師のための参考書だったと考えられる．伝記の List of Writtings には，1857 年の第 16 版まで版を重ねたことが記されている（[23], p. 401）．そうした純然たる教育とみなされるものは外し，独創性があると考えられる内容をまとめる．大きく，数の理論・代数学，確率論，論理学の 3 つの分野に分けられる．確率論と論理学については，ド・モルガンの著述 ”Essay on Probabilities” (1838 年)，”Formal Logic” (1847 年) の順にそれらの内容を中心に述べる．ド・モルガンの時代には，確率論が数学の独立した分野として確立していなかったと思われ，確率と論理とをうまく切り分けできなかったためである．

§ 3.1. 数の理論・代数学

19 世紀末に構築されたデーデキント (Richard Dedekind, 1831-1916) の実数論（無理数論）[9] との関連が推察されて興味深いのは，ユークリッドの『原論』，第 5 巻の比例論の解釈 [13] である．ユークリッドの『原論』では，比例は次のように定義される（例えば，[49]，p. 22）．

量 A, B, P, Q について，$A : B = P : Q$ であるとは，任意の自然数 m, n に対して，以下が成り立つことをいう．

$$mA > nB \;\Rightarrow\; mP > nQ, \quad mA = nB \;\Rightarrow\; mP = nQ$$
$$mA < nB \;\Rightarrow\; mP < nQ \tag{3.1}$$

無理数の発見が，整数で表せない比をもたらしたため，このような定義になったといわれている（[49]，pp. 57–59）．ド・モルガンは，この定義から次のことが導かれることに着目して，比例を解釈しようとした．

> m を任意の自然数とするとき，0 以上の整数 n を $nB \leq mA < (n+1)B$ を満たすように選ぶと，$nQ \leq mP < (n+1)Q$ が成り立つ．

この性質を（実数の割り算が可能であることは既知として）比の値を使って表現しなおすと次のようになる．比の値 A/B，P/Q はともに区間幅 $1/m$ の区間 $[n/m, n/m+1/m)$

に含まれる．したがって，m の任意性により両者は一致する．菊池大麓による明治期の幾何学の教科書では，この解釈に基づいて比例が説明されている（[36]，p. 261）.『数学教育史』([50]，p. 259) では,「しかるに菊池は，ユークリッド流の一般比例論を，ード・モルガンとほとんど同様の方法によってー 最初から，取り入れたのである.」とド・モルガンの解釈が元になっていることが示唆されている．

任意の m に対して，上のような n がとれることは，現代的な数の理論では，アルキメデスの公理と自然数の基本的性質「空でない自然数の集合は最小元をもつ」から示される．実際，$U = \{k \in \mathbb{N} \,|\, mA < kB\}$ とおくと，アルキメデスの公理から $U \neq \emptyset$ であり，k_0 を U の最小元とし，$n = k_0 - 1$ とおけば，$nB \leq mA < (n+1)B$ が成り立つ．ド・モルガンは，ユークリッドの互除法に基づく無理数の有理近似（pp. 13-23，より整理された説明は [25], pp. 159-174 参照）を用いて，このことを示している．

さらに，2 人の学習者の会話の形で，$\sqrt{2}$ のような無理数の存在そのものに関する疑義も示している（pp. 48-50）．およそ 20 年後，デーデキントは「数の理論の真に科学的な基礎が欠けていることを痛感」し（[9], p. 9)，無理数の理論を構築した．それに近い問題意識をド・モルガンも持っていたと推測される．

1849 年の ”Trigometry and Double Algebra” [20] は，三角法・三角関数とその応用として複素数のベクトル表示，極形式表示を述べた教科書である．実数体を single algebra，複素数体を double algebra と呼んでいる． 複素数のベクトル表示は，アイルランドの数学者ハミルトン (Willam Rowan Hamilton, 1805-1865) によるものである（[7], pp. 23-27）. ド・モルガンはハミルトンと交流があり，四元数 (quaternion) に関する膨大な著作の草稿をチェックしたといわれる [55]．三角関数を解説した前半部と複素数を解説した後半部の間に，記号代数 (symbolic algebra) を解説した短い 2 章 ([20], pp. 89 - 105) が挟まれいて，次のような説明がある（p. 93）.

> Given symbols M, N, $+$, and one sole relation of combination, namely that $M + N$ is the same result (be it of what kind soever) as $N + M$. Here is a symbolic calculus: how can it be made a significant one? In the following ways, among others. 1. M and N may be *magnitudes*, $+$ the sign of addition of the second to the first. 2. M and N may be *numbers*, and $+$ the sign of multiplying the first by the second. 3. M and N may be *lines*, and $+$ a direction to make a rectangle with the antecedent for a base, and the conseqent for an altitude. 4. M and N may be *men*, and $+$ the assertion that the antecedent is the brother of the consequest, 5. M and N may be *nations*, and $+$ the sign of the consequent having fought a battle with the antecedent: and so on.

代数学に現れる記号は通常の数を表さなくともよいという記号代数の考え方はもともとド・モルガンがケンブリッジ大学で指導を受けたピーコックが提唱したものである [51]. ピーコックの研究で知られる Helena M. Pycior は，ド・モルガンの時代に，この分野の大きな発展はなかったと述べている [52]．1920 年代にドイツの数学者ネーター (Emmy Noether, 1822-1935) によって主導された抽象代数学の急速な発展（[38]，第 6 章）を念

頭においているのではないかと思われる．

§ 3.2. Essay on Probabilities

時代がド・モルガンに近いボール（[3], p.133) やスミス ([56], p. 462) は，論理学ではなく，確率論に関する著作や研究を高く評価している．

1838 年に Cabinet Cyclopaedia に執筆された ”Essay on Probabilities, and on their Appilcation to Life Cotingencies and Insurance Offices” [15] は，日本にも影響を与えたようである [34]．全 13 章のうち第 8 章以降の 6 章は，生命表，年金，生命保険などに関する説明に充てられている [6]．これらは，現代の感覚では「確率論」の内容とは思われないが，歴史的に見ると，それほど不自然ではないようである (例えば，[65]，第 4 章参照)．特に，当時のイギリスの数学者にとって，生命保険は「身近な存在」だったと思われる．ド・モルガンの曽祖父ドドソンは，アクチュアリー（保険数理士）の元祖といわれる．40 歳のとき，年齢を理由に生命保険への加入を断られたことをきっかけに，新たな生命保険会社の設立を目指して，生命保険の数学的な研究を行った．1753 年から 1755 年にかけて出版した『数学博物館』(Mathematical Repository) という 3 巻本の中で年金に関する問題を扱っている（[60], p. 278）．また，ド・モルガンの義父フレンドや，14 歳のときにド・モルガンの指導を受けたシルベスター (James Joseph Sylvester, 1814-1897) も一時期，アクチュアリーをしていた（[4], p. 353）．

興味深いのは，前半 7 章の内容である．ド・モルガンは ”Essay on Probabilities” を執筆する前年に，”Theory of Probabilities” という解説 [14] を Encyclopaedia Metopolitana (大都会人のための百科全書）に書いている [7]．主として，ラプラス (Pierre Simon Laplace, 1749-1827) の確率論 [43] を数学的にきちんと説明したものである（全体的な内容については，長岡 [48]，最小二乗法について，安藤 [1], 補遺 1 参照)．一方，”Essay on Probabilities” では，Preface, p. viii で，次のように述べている．

> To understand the demonstration of the method of Laplace would require considerable mathematical knowledge; but the matter of using his results may be described to a person who prossesses no more than a common aquaintance with decimal fractions. To reduce this method to rules, by which such an arithmetician may have use of it, has been one of my primary objects in writting this treatise.

具体的には，例えば，第 1 章 (pp.15-16) で，次のような RULE が紹介されている．

> RULE. −− To find very nearly the value of [a given number], from the logrithm of that number, substract .4342945, and multiply the difference by the difference

[6] 日本でも，明治 41 (1908) 年出版の林鶴一・刈屋他人次郎著『公算論（「確カラシサノ理論」)』[30] が 1 章を「年金・生命保険」に充てている．

[7] 伝記 [23], pp. 92-93 には，Encyclopaedia Metopolitana の編者が，学術的な”Theory of Probabilities” と啓蒙的な ”Essay on Probabilities” の違いを理解せず，出版者への説明に苦労したことが書かれている．

by the given, for a first step. Again, to the logarithm of the given number add .7981799, and take half the sum, for a second step. Add together the results of the first step and second steps, and the sum is nearly the logarithm of the product of all numbers up to the given number inclusive. For still greater exactness, add to the final result its aliquot part, whose diviosr is 12 times the given number.

これは，スターリングの公式から導かれる近似式

$$n! \fallingdotseq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}\right) \tag{3.2}$$

を用いた $n!$ の近似値の計算法を示している．右辺の $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ は，対数をとって，

$$\log_{10}\left(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\right) = n\left(\log_{10} n - \log_{10} e\right) + \frac{1}{2}\left(\log_{10} n + \log_{10} 2\pi\right)$$

のように変形して計算する．Rule の ".4342945" は $\log_{10} e$ の近似値，".7981799" は $\log_{10} 2\pi$ の近似値である．

この近似法の意義は第 7 章で明らかになる．二項分布の正規分布による近似を用いた確率の計算法が紹介される．二項分布の正規分布による近似は，ド・モアブル-ラプラスの定理と呼ばれ，通常，スターリングの公式などを用いて証明がなされる．ただし，実際の計算は正規分布表ではなく，誤差関数

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

の数表を用いて行われる．天文学で使われてきた手法とのことである（[60], p. 480, 訳注 (7) 参照）．上記の Rule と同様，計算法が示されているだけで[8] 基になる理論の説明（積分論が必要になる）は一切なされていない．第 6 章では，ベルギーの統計学者ケトレ (Lambert Adolphe Jacques Quételet, 1796-1874) の考え方が紹介されるなど，全体的に統計学を意識しているように思われる．

第 1 章から第 4 章までの内容については，[8]，pp. 315-319 でも簡単に解説されている．同書 (p. 315) によると，イギリスでは，第 3 章 "On Inverse Probabilities" を根拠に，"Inverse Probability" という用語をド・モルガンによるものとしてきたが[9]，フランスでは，それ以前から，"Méthode inverse des probabilités" という用語が使用されていたとのことである．また，ド・モルガンの逆確率の考え方には問題があるらしく[10]，例えば，ケインズ (John Maynard Keynes, 1883-1946) は，"Essay on Probabilities", p.27 の次の部分を"the uninstructed view" (型破りの見解) と批判している ([35], p.178, 邦訳 p. 205)．このことは，Dale [8], p. 316 でも取り上げられている．

[8] ド・モルガンの意図を図りかねるという趣旨のコメントを査読者から頂いた.「すべての人に教育を」という有用知識普及協会やド・モルガン自身の理想を実現するために考えたのではないだろうか.

[9] 例えば，ベンは，著書 [64], p. 179 で，ド・モルガンの"Essay on Probabilities", p. 53 を参照している．

[10] "Theory of Probabilities" についても批判がされている．Hailperin [28], pp. 153-159.

Now it will hereafter be shewn that causes are likely or unlikey, just in the same proportion that it is likely or unlikely that observed events should follows from them. The most probable cause is that from which the oveserved event could most easily have arrisen.

河野・中山 [34] で指摘されている確率の公理（[34], p. 38）については，§ 3.4 で考察する．

§ 3.3. Formal Logic（その 1）－論理－

ド・モルガンの論理学の研究のきっかけは，幾何学に関する推論の教育にあると考えられる．1847 年出版の "Formal Logic" [19] の第 1 章は，1839 年に "First Notions of Logic (Preparatory to Study of Geometry)" [16] として単独で出版されている．さらにさかのぼると，1836 年出版の "On the Study and Difficulties of Mathematics" [12] の中に関連する内容がある．有用知識普及協会の書籍シリーズ Library of Useful Knowledge の 1 冊で，数学学習者のための「手引書」のような本である．第 14 章 "On Geometrical Reasoning" で，論理の説明を行っており，ベン (John Venn, 1834-1923) よりも 50 年ほど早く，ベン図 [11] を用いている．なお，ド・モルガンの法則は，論文 [21], p. 208 に現れる．ベンが著書 "Symbolic Logic" [63], p. 418, 下部の脚注で "This symmetrical form of contradiction was probably first proposed by De Morgan." と述べたことから，「ド・モルガンの法則」が広まったが，法則自体はもっと古くから知られているという（[59]，p.47）．

"Formal Logic" では，第 8 章までが syllogism (三段論法）の記号化と解析に充てられている．基本的な命題を

(A) 全称肯定	X)Y	Every X is Y	(E) 全称否定	X.Y	No X is Y
(I) 特称肯定	XY	Some Xs are Ys	(O) 特称否定	X:Y	Some Xs are not Ys

のように表し（p. 60），例えば，

$$X)Y \;=\; X.y \;=\; y)x \tag{3.3}$$

の同値関係を右のような表から示している．同値関係 (3.3) における "=" は現代的な記号で書けば "⇔" である．また，x, y はそれぞれ X, Y の否定を表す．表が 12 列になっていることに特に意味はないらしい．"A dozen will do as well for illustration as a million." と述べている．この例の場合，「X と y（Y の否定）」の組がないことが肝心である．ベン図や真理値表の代替と考えられる．

U U U U U U U U U U U
X X X X X x x x x x x
Y Y Y Y Y Y y y y y

[11] オイラー図ともいう．ド・モルガンはオイラーが用いていることを知らずに使用したと述べている（[19], p. 323）．

さらに， syllogism を

$$\begin{array}{lccccc} \text{Barbara} & \text{Y)Z} & + & \text{X)Y} = & \text{X)Z} \\ \text{Celarent} & \text{Y.Z} & + & \text{X)Y} = & \text{X.Z} \\ \text{Darii} & \text{Y)Z} & + & \text{XY} \ = & \text{XZ} \\ \text{Ferio} & \text{Y.Z} & + & \text{XY} \ = & \text{X:Z} \end{array}$$

のように記号化している（p. 130）．例えば，Y)Z + X)Y = X)Z は大前提 Y)Z と小前提 X)Y から結論 X)Z が導かれるという意味である．大前提，小前提，結論がいずれも「(A) 全称肯定」であることから，中世の論理学では，B<u>a</u>rb<u>a</u>r<u>a</u> 式と呼ばれている．

大前提 XY と小前提 YZ からは一般には何も結論されないが,「X かつ Y であるもの」の個数を m,「Y かつ Z であるもの」の個数を n,「Y であるもの」の個数を η とし，$\eta < m+n$ とすると,「X かつ Z であるもの」が少なくとも $m+n-\eta$ 個あることになる．このことを

$$mXY \ + \ nYZ \ = \ (m+n-\eta)XZ \tag{3.4}$$

のように表し，対応する推論法を numerically definite syllogism と呼んでいる（第 8 章）．論理学と確率的な考察を結びつける意図が伺われる．

”Formal Logic” の数理論理学の内容に関しては，コルモゴルフ (Andrei Nikolaevich Kolmmogorov, 1903-1987) 編の『19 世紀の数学 I』([47], pp. 12-17) で扱われており,「ド・モルガンの形式論理」を次のように総括している．

> 彼が導入しようとした諸概念の意味の微妙な意味合いを強調しようとするあまり，彼の着想を完全に理解することはいまにしてもなかなか困難な状態であり，構想としても全体像の印象を弱いものにし，また衝撃力を散漫なものにしてしまっている．しかしながら，彼の観察の深さと正確さを彼の着想の多様な広がりと併せて考えるとき，ド・モルガンのこの分野への貢献は，いまだに十分には認識・理解され，かつ展開され尽くしてはいないように思われる．

なお，ド・モルガンは関係の論理学 (logic of relations) に関する研究も行っている．末木 [59] はその内容のいくつかを紹介し (pp. 44-46)，一定の評価を与えつつ，次のようにしめくくっている．

> しかしここにあげなかった諸定理のなかには理解に苦しむようなものもあるので，全体として彼の研究が始めから完成したものだとは言えない．いわば玉石混淆なのである．

§3.4. Formal Logic（その 2）ー確率ー

第 9 章 ”On Probability”，第 10 章 ”On probable Inference”，第 11 章 ”On Induction” では，確率論，確率的推論が論じられている．

確率は，現在の数理論理学では主たる題材とはいえないようであるが，黎明期において，確率と論理は密接な関係にあった．用語 ”probabilité” が，可能性の割合を表す意味で初めて用いられたのは,『ポール・ロワイヤル論理学』[2] であったという（[24], p. 775, [26], pp. 125-128)．また，論理を最初に数学的に扱ったとされるライプニッツ (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716) は，確率を扱う論理学の構築に関心を寄せていた ([27], ド・モルガンの ”Formal Logic” は，そうした伝統を引き継いだものとも考えらえる．その伝統は，イギリスの論理学者に引き継がれ，ブール代数で知られるブール (George Boole, 1815-1864) の著書 ”An Investigation of the Laws of Thought” [5] も確率論の章を含む．ロンドン大学でド・モルガンから論理学の教授を受けたジェボンズ (William Stanley Jevons, 1835-1822) も，著書 ”The Principles of Science” [33] の中で，論理と確率を関係づけて論じている．また，ベンには，”The Logic of Chance” [64] と題する著書があり，[42] にも，1888 年のベンによる論説 ”The Subjective Side of Probabilities” をはじめとし，関連する論説が集められている．

第 9 章を見る限り，ド・モルガンは主観的確率 [42, 61] を考えている．まず，”By degree of probability we really mean, or ought to mean, degree of belief.” と述べ（p. 172)，続いて，”belief is but another name for imperfect knowledge, or it may be, expreses the mind in a state of imperfect knowlege” のように (p. 173) ”belief” という言葉を説明している．さらに，”we treat knowledge and belief as magnitudes” (p. 174)，”the object of all quantitavite science is not merely magnitude, but *mesurement* of magnitude” (p. 175) のように述べ，確率を「量の測定」と捉えることを示唆する．量の代表として，重さについて考察し，”the weight of the (conjunctive) mass is the sum of the weights of its parts” の類比から，次の Postulate (公準) を提唱している (p. 179).

> When any number of events are disjunctively possible, so that one of them may happen, but not more than one, the measure of our belief that one out of any some of them will happen, ought to be the amount of the measures of our separate beliefs in each one of those some.

河野・中山 [34], p. 38 で述べられている ”Essay on Probabilies” の Axiom 2 と実質同じものである．ラプラスの『確率の哲学的試論』においても，確率の一般原理の第二原理（[44], p. 18) で同じことが述べられているが,「量の測定」と捉えている点で，ド・モルガンのほうが，測度論的であり，その意味では，現代の確率論 [39] の考え方に近いともいえよう [12]．

ド・モルガンはブールと親しく [55]，両者が交わした書簡集 [57] が出版されている．編者の G. C. Smith は，確率を論じたブールの手紙に関連して，次のように述べている（[57], p. 59）.

> The concluding paragraph of this letter contains an interesting remark: ’I have long been trying to get at the principle of a suspected connexion between the

[12] 伊藤清は，確率の公理化の先駆者として，ブールやデーデキントの名前を挙げている（[43], p. 439)

> results of my methods and those of integration', which suggests that Boole may have had some inkling of the common ground of probability and integration which later became explicit in measure theory.

このことを，長岡 [48] , p. 41 の注 (15) で知った．ブールが確率と積分（測度）の間の関係に気がついていたとしたら，ブールと親しかったド・モルガンが知らないはずはないという．

第 10 章では，証言 (testimony) や推論 (argument) の確率の問題が論じられている．古典的な確率論において，しばしば取り上げられてきた問題である（[60], p. 64, p.76, pp. 324-325, [28], pp. 133-136）．この章の内容についても，"Theory of Probabilities" や "Essay on Probability" の逆確率の部分と同様，不十分な点があるなど数学的には問題があるらしい（[28], pp. 159-167, [29], pp. 98-107）．

§4. おわりに

講演の際の質疑で指摘されたように，ド・モルガンには，数学や天文学などの自然科学の歴史に関する著述も多い．そうした方面では，[53, 54] のような研究もなされている．ド・モルガンは 19 世紀で最も傑出した bibliophile (愛書家，蔵書家) であったという ([53], p. 222)．そのことがかえってマイナスに作用したのか，数学史家 D. E. スミスは "He devoted considerable attension to the history of mathematics, but his articles are not only eccentric but unreliable." と述べている．数学史が学問の 1 分野として定着していなかったこともあるのだろう．出典を明示しないことも多かったのではないか思われる．今回調べた著作についても同様なことがいえる．基本，参考文献のようなものは挙げられていないため，どこまでがド・モルガンの独創といえるのか判断が難しい．古い時代にド・モルガンの確率論に関する研究が高く評価されていたのは，"Theory of Probabilities" の内容の多くが，ド・モルガンの独創とみなされたためではないだろうか．

査読者から，ド・モルガンの確率概念を数学的な側面からしか考察していないとの指摘を受けた．確率は，現在でも数理哲学の分野で研究されている．ましてド・モルガンが活動したのは，コルモゴルフの公理的確率論が受け入れられ [13]，確率論が数学の 1 分野として広く認められるようになる以前でのことである．より広い視点で捉える必要があるとの指摘である．非常にもっともな意見であるように思う．付け加えて述べるならば，論理学についても，同様なことがいえるのではないだろうか (例えば，[32])．そうした方向での研究を今後の課題として挙げさせて頂きたい．ただし，非常に荷が重いと感じられる．一人でも多くの方に，こうした分野の研究に関心を持って頂き，研究を進めて頂きたいと切に願うものである．

[13] 伊藤 [32] や内井 [61] を読むと，現代数学の確率概念はコルモゴルフの理論に集約されたとする見方も（そのように考えていたのだが）視野が狭いように思われる．これらの文献は査読者に教えて頂いた．

参考文献

[1] 安藤洋美,『最小二乗法の歴史』，現代数学社，1995.
[2] A. アルノー，P. ニコル（山田弘明，小沢明也訳）,『ポール・ロワイヤル論理学』，法政大学出版局，2021 (原著 Arnauld, A. et Nicole, P., "La logique ou l'art de peuser", 5th ed. 1683).
[3] Ball, W. W. Rouse, "A History of the Study of Mathematics at Cambridge", Cambdrige University Press, 1889.
[4] E. T. ベル (田中勇・銀林浩訳),『数学をつくった人びと II』，早川書房，2003 (原著 1937).
[5] Boole, G., "An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the mathematcial theories of logic and probabilities", Watchnaker Publishing, 1854.
[6] Cajori, F., Origin of the Name "Mathematical Induction", *The American Mathematical Monthly*, **25** (1918), 197–201.
[7] Crowe, M. J., "A History of Vector Analysis: the Evolution of the Idea of a Vectorial System", Dover Publications, Inc., New York, 1967.
[8] Dale, A. I., "A History of Inverse Probalility: from Thomas Bayes to Karl Pearson", 2nd ed., Springer-Verlarg, New York, Berlin, Heidekberg, 1999.
[9] デーデキント（河野伊三郎訳）,『数について』，第 1 編　連続性と無理数，岩波書店，1961 (原著 Dedekind, R., "Stetigkeit und irrationale Zahlen, 1872).
[10] De Morgan, A., "The Elements of Arithmetic", Taylor and Walton, London, 1834.
[11] De Morgan, A., "Elements of Algebra Preliminary to the Differential Calculus", Taylor and Walton, London, 1835.
[12] De Morgan, A., "On the Study and Difficulties of Mathematics", New Edition, The Open Court Publishing Company, Chicago, 1898.
[13] De Morgan, A., "Connection of Number and Magnitude: An Attempt to Explain the Fifth Book of Euclid", Taylor and Walton, London, 1836.
[14] De Morgan, A., "Theory of Probabilities", Encyclopaedia Metropolitana, Volume 2, 393–490, 1845.（伝記 [23], p.92 には，1836 年から 1837 年の間に書かれ，Encyclopaedia Metropolitana の出版者との契約で 1838 年 1 月に出版されたとある．Hailperin [28], p. 190 の文献リストによると，抜き刷りの出版年は 1837 年になっているとのことである.）
[15] De Morgan, A., "Essay on Probabilities, and on their Applications to Life Confingencies and Insurance Offices", Cabinet Cyclopaedia, 1838.
[16] De Morgan, A., "First Notions of Logic (Preparatory to the Study of Geometry), Taylor and Walton, London, 1839.
[17] De Morgan, A., "The Differential and Integral Calculus", Taylor and Walton, London, 1842.
[18] De Morgan, A., "Arithmetical Books, from the invention of printing to the present time, being brief notices of a large number of works, drawn from actual inspection", Taylor and Walton, London, 1847.
[19] De Morgan, A., "Formal Logic: Or the Calculus of Inference Necessary and Probable", Taylor and Walton, London, 1847.
[20] De Morgan, A., "Trigometry and Double Algebra", Taylor, Walton and Maberlt, London, 1849.
[21] De Morgan, A., On the Syllogism, No III, and on Logic in general, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, **10** (1858), Part I, 173–227.
[22] メアリ・ド・モーガン（矢川澄子訳）,『風の妖精たち』(岩波少年文庫 2087)，岩波書店，1979.
[23] De Morgan, S.E., "Memoir of Augusts De Morgan", Longmans, Green, and co., London, 1882.

[24] J. デュドネ編（上野健爾，金子晃，浪川幸彦，森田康夫，山下純一訳）,『数学史 III』，岩波書店，1985 (原著 Dieudonné, J. (ed.), "Abrégé d'Histoire des Mathémathiqus", 2 volumes, Hermann, Paris, 1978).
[25] 藤原松三郎（浦川肇，高木泉，藤原毅夫編）,『代数学第 1 巻－改訂新編－』，内田老鶴圃，2019 (原著 1928).
[26] I. ハッキング（広田すみれ，森元良太訳）,『確率の出現』，慶応義塾大学出版会，2013 (原著 Hacking, I., "The Emergnde of Probability: A Philoshophical Study of Early Ideas about Probability Induction and Statistical Inference", 2nd ed., Cambridge University Press, 2006).
[27] Hailperin, T., Probability Logic, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **25** (1984), 198–212.
[28] Hailperin, T., The Development of Probability Logic from Leibniz to MacColl, *History and Philosophy of Logic*, **9** (1988), 131–191.
[29] Hailperin, T., "Sentential Probability Logic. Origins, Development, Current Status, and Technical Applications", Lehigh University Press, Bethlehem, 1996.
[30] 林鶴一・刈屋他人次郎,『公算論（「確カラシサノ理論」）』，大倉書店，1908 (明治 41 年).
[31] Howson, A. G. "A History of Mathematics Education in England", Cambdge University Press, 1982.
[32] 伊藤邦武,「ケインズとラムジー：確率と合理性をめぐって」,『京都大學文学部研究紀要』，**35** (1996)，27–108.
[33] Jevouns, W. S., "The Principles of Science", Volumes I & II, Routedge/Tohemmes Press, London 1996 (Reprint of the 1874 edition, with a new Introduction by Andrew Pyle).
[34] 河野敬雄，中山素生,「藤澤利喜太郎著『生命保険論』にみる数学者の社会貢献の在り方」，*RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B81** (2020), 33–52.
[35] Keynes, J. M., "A Treatise on Probability", Macmillan, London, 1921.（邦訳 佐藤隆三訳，『確率論』，ケインズ全集第 8 巻，東洋経済新報社，2010.）
[36] 菊池大麓,『初等幾何学教科書　平面部』，大日本圖書，1888 (明治 21 年).
[37] F. クライン (彌永昌吉監修，足立恒夫・浪川幸彦監訳，石井省吾・渡辺弘訳）,『クライン：19 世紀の数学』，共立出版，1995.
[38] I. クライナー (齋藤正彦訳）,『抽象代数学の歴史』，日本評論社，2011.
[39] A. コルモゴルフ（根本伸司，一條洋訳）,『確率論の基礎概念』，東京図書，1969 (原著 Kolmogoroff, A., "Grundbergiffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung", 1933).
[40] 小藤俊幸,「順列・組合せの数学教育史」,『数学教育史研究』，**20** (2020)，27–34.
[41] 小藤俊幸,「オーガスタス・ド・モルガンの数学教育論」,『数学教育史研究』，**21** (2021)，1-11.
[42] Kyburg, H. E., Jr. and Smokler, H. E. (ed.), "Studies in Subjective Probabilitity", John Wiley & Sons, New York, London and Sydney, 1963.
[43] P. S. ラプラス（伊藤清，樋口順四郎訳・解説）,『確率論 －確率の解析的理論－』，共立出版，1986 (原著 Laplace, P. S, "Théorie analytique des Probabilités", 1812).
[44] P. S. ラプラス（内井惣七訳）,『確率の哲学的試論』，岩波書店，1997 (原著 Laplace, P. S, "Essai Philosophique sur les Probabilités", 1814).
[45] Macfarlane, A., "Lectures on Ten British Mathematicians of the Nineteenth Century", Chapman & Hall, London, 1916.
[46] Menabrea, L. F. (Lovelace, A. 訳・注), Sketch of the Analytical Engine Invented by Charles Babbage, *Scienfigic Memoirs*, **3** (1843), 666–731.
[47] 三宅克哉監訳,『19 世紀の数学 I －数理論理学・代数学・確率論－』，朝倉書店，2008.
[48] 長岡一夫,「ド・モルガンの『確率論』 － ラプラスの『確率の解析的理論』の再生」,『科学史研究』，**31** (1992), 181, 27–42.
[49] 中村幸四郎,『数学史 －形成の立場から－』，共立出版，1981.

[50] 小倉金之助,「数学教育史」,『小倉金之助著作集第 6 巻 数学教育の歴史』，勁草書房，1974（『數學教育史』，岩波書店，1932）.

[51] Pycior, H M., Goerge Peacock and the British Origins of Symbolical Algebra, *Historia Mathematica*, **8** (1981), 23–24.

[52] Pycior, H. M., Augustus De Morgan's Algebraic Work: The Three Stages, *Isis*, **74** (1983), 211–226.

[53] Rice, A., Augustus De Morgan: Historian of Science, *History of Science*, **34** (1996), 201–240.

[54] Richards, J. L., Augustus De Morgan, the History of Mathematics, and the Foundation of Algebrra, *Isis*, **78** (1987), 6–30.

[55] Simmons, C., De Morgan Behind the Scenes, *The Collegd Mathematics Journal*, **42** (2011), 30–40.

[56] Smith, D. E., "History of Mathematics, Vol. I, General Survey of the History of Elementary Mathematics", Dover, New York, 1958 (1923 年出版の再版).

[57] Smith, G. C., "The Boole-De Morgan Correspondence 1842-1864", Clarendon Press, Oxford, 1982.

[58] Stigler, S. M., "The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900", The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, and London, 1982.

[59] 末木剛博,『記号論理学』，東大出版会，1962.

[60] I. トドハンター（安藤洋美訳）,『確率論史　パスカルからラプラスの時代までの数学史の一断面』，現代数学社，1975.（新装版 2017．原著：Todhunter, I., "A history of mathematicsl theory of probability from time of Pascal to that of Laplace", 1865.)

[61] 内井惣七,「賭・確率・帰納法 ー主観主義確率論の基礎ー」,『人文學報』，**37** (1974), 京都大学人文科學研究所，1–74.

[62] 梅根悟，川合章，佐伯正一,『イギリス教育史 I』（世界教育史体系 7），講談社，1974.

[63] Venn, J., "Symbolic Logic (2nd ed.)", Macmillan an co. , London 1894 (初版 1881).

[64] Venn. J., "The Logic of Chance", Dover, New York, 2006 (Originally publishing: 3rd ed. Macmillan, 1888).

[65] 吉田忠,『近代オランダの確率論と統計学』，八朔社，2014.

[66] 吉村典子,『ウイリアム・ド・モーガンとヴィクトリアン・アート』，淡交社，2017.