

『四元玉鑑』の円箭問題について
On problems on arrow bundles
in the *Siyuan Yuqian*

By

森本 光生
Mitsuo Morimoto *

Abstract

Zhu Xhijie was a Chinese mathematician and wrote two influential books, the *Suanxue Qimeng* (1299) and the *Siyuan Yuqian* (1303). The former book was transferred to Japan in the 16th century and gave the foundations to the Japanese traditional mathematics *wasan*, while the latter one seemed to be unknown to Japanese during the Edo period (1604 – 1868). In this note, we discuss a problem treated in both the *Suanxue Qimeng* and the *Siyuan Yuqian*.¹

§ 1. 『算学啓蒙』と『四元玉鑑』

元初期の数学者朱世傑（生没年不詳）は、1299年に『算学啓蒙』を、1303年に『四元玉鑑』を著わした。『算学啓蒙』は我が国にもたらされて、和算の基礎、特に、天元術の普及に大きな働きをした。建部賢弘（1664–1739）は、1690年に『算学啓蒙諺解大成』を刊行し、『算学啓蒙』のわが国での普及に、決定的な貢献をした。（筆者も、[3, 4]で論じたことがある。『算学啓蒙』の影印は中国でも出版されている。例えば、[6]）

Received November 8, 2021. Revised March 21, 2022.

2020 Mathematics Subject Classification(s): 01A25, 01A27, 01A45

Key Words: History of Japanese Mathematics, Seki Takakazu, Takebe Katahiro.

The author is supported by Grant-in-Aid for JSPS Fellows Grant Number 18F17786. This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

*関孝和数学研究所、Seki Kowa Institute of Mathematics, Yokkaichi, 512-8512 Japan
email: mormormor@kxe.biglobe.ne.jp

¹このノートは、2021年2月2日に数理解析研究所での講演（『四元玉鑑』と『四元玉鑑細草』について）の記録である。RIMS 共同研究（公開型）『数学史の研究』の報告集（RIMS Kôkyûroku Bessatsu B85）に載せることになっていたが、原稿の完成が締め切りに間に合わず、今回の講究録に載せて頂くことになった。編集者のご配慮に感謝する。

しかしながら、『四元玉鑑』は江戸時代にわが国に伝わらなかった。中国においても、『四元玉鑑』は失伝していた。19世紀になり『四元玉鑑』を発見した羅士林により、その評釈書として「細草」が1835年に編まれた。

中国では、郭書春が英訳現代中国語訳対照の『四元玉鑑』[1]を、また、李兆華は考証本[2]を刊行した。

京都数学史セミナー（代表・上野健爾）では、『四元玉鑑』を通読することになり、そのテキストとして、『中国科学技術典籍通彙』にある影印を用いることになった。その冒頭には、孔国平による「四元玉鑑提要」が置かれている。

『四元玉鑑』のテキストは、以下の目次のように巻首に、四象細草假令之図（四象假令）があり、そのあと、巻上、巻中、巻下とがあり、最後に、補章として、四象假令の「細草」があり、末尾に光緒2年（1876年）の後記があるので、この影印は、1876年刊行と知れる。

『四元玉鑑』の目次

序	1.1	『四元玉鑑』前序
	1.2	松庭先生『四元玉鑑』後序
	1.3	四元玉鑑目録、総二十四門、凡二百八十八問
巻首	2.1	今古開方會要之圖（圖一）
	2.2	四元自乘演段之圖（圖二）
	2.3	五和自乘演段之圖（圖三）
	2.4	五較自乘演段之圖（圖四）
	2.5	四象細草假令之圖（四問）
巻上	3.1	1. 直段求源（一十八問）
	3.2	2. 混積問元（一十八問）
	3.3	3. 端匹互隱（九問）
	3.4	4. 廩粟回求（六問）
	3.5	5. 商功修築（七問）
	3.6	6. 和分索隱（一十三問）

卷中	4.1	7.	如意混和 (二問)
	4.2	8.	方圓交錯 (九問)
	4.3	9.	三率究圓 (一十四問)
	4.4	10.	明積演段 (二十問)
	4.5	11.	勾股測望 (八問)
	4.6	12.	或問歌象 (一十二問)
	4.7	13.	菱草形段 (七問)
	4.8	14.	箭積交參 (七問)
	4.9	15.	撥換截田 (一十九問)
	4.10	16.	如像招數 (五問)

卷下	5.1	17.	果塚疊藏 (二十問)
	5.2	18.	鎖套吞容 (一十九問)
	5.3	19.	方程正負 (八問)
	5.4	20.	雜範類會 (一十三問)
	5.5	21.	兩儀合轍 (一十二問)
	5.6	22.	左右逢元 (二十一問)
	5.7	23.	三才變通 (十一問)
	5.8	24.	四象朝元 (六問)

四象仮令細草	1	一氣混元
	2	兩儀化元
	3	三才運元
	4	四象會元
	5	後記 (光緒 2 年丙子孟春月、長沙、丁取忠記)

このテキストには、本文 (巻上中下) の「細草」は付いていない。それらは、東北大学図書館の東北大学デジタルコレクションにおいて、次のように公開されている。

- 新編四元玉鑑、(元) 朱世傑撰 鐘華較正、藤原集書 112、画像あり、161 葉
- 四元玉鑑細草、(元) 朱世傑撰、付 (清) 羅士琳撰、光緒 17 (1891) 年、林文庫 2292、画像あり、731 葉
- 四元玉鑑細草、(元) 朱世傑撰、付 (清) 羅士琳撰、光緒 22 (1896) 年、林文庫 2293、画像あり、201 葉
- 四元玉鑑細草、(元) 朱世傑撰、光緒 2 (1896) 2 年、林文庫 2294、画像あり、201 葉
- 四元玉鑑細草、(元) 朱世傑撰、道光 17 (1837) 年刊、狩野 7.31524.6、画像あり、185 葉

新編四元玉鑑（藤原集書 112）は、1 葉が、1 丁の裏と、次丁の表からなっている。また、細草（林文庫 2292）も同じような構成になっている。しかし、その他の細草での葉数が著しく少ないのは、大部分の葉で、1 葉に 4 丁分の影印が含まれているからである。「藤原集書 112」では、仮令四草は、上巻の中におさめられている。

また、細草（林文庫 2292）では、影印の並びが、巻上、巻下、巻中、演段例となっている。このことも、比較するときにはオヤッとするとところである。

§ 2. 本稿の目的

『算学啓蒙』は入門書で、『四元玉鑑』は専門書とよく言われるが、『四元玉鑑』で二元術（5.5 節、5.6 節）、三元術（5.7 節）、四元術（5.8 節）について触れている箇所は少なく、大部分は『算学啓蒙』と同様に天元術（一元術）で解けるものである。『四元玉鑑』を通読してみると、四元術に至るまでに『算学啓蒙』の繰り返しのような感が強い。

ここで扱うものは、『四元玉鑑』4.8 節の円箭、方箭の問題である。箭とは矢のことである。矢を束ねてその断面が円形をなすものを、円箭といい、正方形をなすものを方箭という。典型的な例題を一つ『四元玉鑑』から選び、『細草』（羅士林、1835）で与えられている天元術による開方を紹介し、併せて現代数学による解説を述べる。次節では、『算学啓蒙諺解大成』（建部賢弘、1690）の円箭、方箭の問題を紹介する。『四元玉鑑』の大部分の問題は『算学啓蒙』に見られ、建部賢弘はそれを十分に理解していたことが例示できたと思う。

§ 3. 箭積交參（七問）の第 1 問

例題 4.8.1 今有方圓箭各一束，共積九十七隻。只云方箭外周不及圓箭外周四隻。問方圓周各幾何？

答曰 圓周二十四隻，方周二十隻。

術曰 立天元一為圓箭外周，如積求之。得四千六百八為益實，二十四為從方，七為從隅。平方開之，得圓周，合問。

細草 4.8.1 ² 艸曰，立天元一，為圓箭外周，加圓率六，得 $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。乘天元，得 $\begin{pmatrix} 太 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

合如倍圓率十二而一。今不除轉，以四通之，得 $\begin{pmatrix} 太 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$ 。加圓心四十八，得 $\begin{pmatrix} 48 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$ 。為四十八段圓積。副，以不及四隻，減天元，得 $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。為方箭外周。加方率八，得 $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。乘方周，

²四元玉鑑細草（林 2292）による。

得 $\begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 合如倍方率十六而一, 今不除転, 以三通之. 得 $\begin{pmatrix} -48 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

加方心四十八, 得 $\begin{pmatrix} 太 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, 為四十八段方積. 併二積, 得 $\begin{pmatrix} 48 \\ 24 \\ 7 \end{pmatrix}$, 為四十八段共積. 寄左.

乃, ^{すなわち}以四十八, 通共積, 得四千六百五十六, 為同数. 消左, 得 $\begin{pmatrix} -4608 \\ 24 \\ 7 \end{pmatrix}$. 開平方, 得二十四隻, 為円周. 減四隻, 余二十隻, 為方周. 合問.

和訳 いま, 方箭^{ほうせん}と円箭^{えんせん} (正方形と円形の矢束) が一つずつある. 共積 (総数) は 97 隻^{セキ} (箭の単位、本). 只云う, 方箭 (正方形の矢束) の外周は, 円箭 (円形の矢束) の外周より 4 本少ない. 方周 (正方形の矢束の外周) と, 円周 (円形の矢束の外周) は各々いかほどか.

答: 円形の外周は 24 本, 正方形の外周は 20 本.

術: 天元 1 を立て, 円形の矢束の外周とする (x で表す). 如積求之 (積のようにこれを求めると), 次を得る.

$$(3.1) \quad -4608 + 24x + 7x^2 = 0.$$

平方開之 (この 2 次方程式を解くと), 円周 x を得る.³ 問に合する.



図 1. 円箭は六角形で近似している. 円箭の断面を, 一円玉で再現してみた.

現代数学での解説 円箭の外周を x とする. $p = x/6$ が³, 円箭の厚み. 円箭の積 (総数) S は,

$$S = 1 + 6(1 + 2 + 3 + \cdots + p) = 1 + 6 \left(\frac{p(1+p)}{2} \right) = 1 + 3(p + p^2)$$

従って,

$$(3.2) \quad S = 1 + 3 \left(\frac{x}{6} + \left(\frac{x}{6} \right)^2 \right) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} = 1 + \frac{1}{12}x(6 + x),$$

³この方程式の根は, $x = 24$ および $x = -192/7$ である.

となる. 細草では, 6 を円率, 12 を倍円率と称する. $48S = 48 + 24x + 4x^2$ を得る.

方箭の外周を y とする. $1 + y/4$ が外周の一辺の長さなので, 方箭の積 (総数) T は,

$$(3.3) \quad T = \left(1 + \frac{y}{4}\right)^2 = 1 + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{16} = 1 + \frac{1}{16}y(8 + y)$$

となる. 細草では, 8 を方率, 16 を倍方率と称する.

問題の条件より, $x - y = 4$, すなわち, $y = x - 4$ なので,

$$T = \left(\frac{x-4}{4} + 1\right)^2, \quad T = \frac{x^2}{16}, \quad 48T = 3x^2$$

また, 矢箭の総数は, $S + T = 97$ であるので, 求める方程式 (3.1) を得る.

細草 4.8.1 の解説 天元の 1 により記号 x を導入して, 円箭の外周とする. 分数を使わないで, 計算する. x に円率 6 を加えて, $6 + x$. これに x を乗じて, $6x + x^2$. ここで, 倍円率 12 で割らなければならないが, それはできないので, 4 倍する. $4(6x + x^2) = 24x + 4x^2$. 円心に相当する $48 = 4 \times 12$ を加えると, $48S = 48 + 24x + 4x^2$ を得る.

次に題意より $-4 + x$ は方箭の外周である: $y = x - 4$. $y(8 + y) = (-4 + x)(4 + x) = -16 + x^2$ である. ここで, 倍方率 16 で割らなくてはならないが, それができないので, 全体を 3 倍して, $-48 + 3x^2$. それに方心に相当する 48 を加えると $3x^2$ をえる. これは 48 倍の方積 (方箭の隻数) $48T$ である: $48T = 3x^2$. したがって, $48(S + T) = 48 + 24x + 7x^2$ となる. これを左に寄せる.

一方題意より, $S + T = 97$ なので, $48(S + T) = 48 \times 97 = 4656$ 左を消せば, $(48 + 24x + 7x^2) - 4656 = 0$, すなわち, $-4608 + 24x + 7x^2 = 0$ なる 2 次方程式が得られる.

§ 4. 建部賢弘: 『算学啓蒙諺解大成』

『算学啓蒙』の完璧な注釈本『算学啓蒙諺解大成』は、『算学啓蒙』原文には訓点が施されており、また、注釈は、漢字交じりのカタカナ文で記されている。以下に、縦書きを横書きに改めて、原文のまま再録する。算木数字はアラビア数字に改め、算盤は縦ベクトルとした。

§ 4.1. 堆積還源門十四問より第 9、10 問

九 えんせん 今有円箭二百七十一隻. 問 せき 外周 がいしゅういくぼく 幾何. 答曰 五十四隻.

術曰, 列積, 減一余, 以十二乘之, 得三千二百四十, 為実. 以六為従方, 一為廉法. 開平方除之. 合問.

分術ヲ以テ是ヲ求ム. 天元ノ一ヲ立テ外周ト為ス. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 六個ヲ加入シテ得ル. $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

外周ヲ以テ之二乗ジ, 得ル. $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$. 左ニ寄ス.

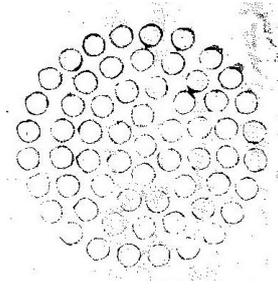


図 2. 円箭の断面図 (『算学啓諺解大成』より)

積ヲ列シ中心ノ一ヲ内減シ, 余 $(-11$ 積). 一十二ヲ以テ之ニ乗ジ, 左ニ寄セタル^ト与相消シテ式ヲ得ル.

実	12 - 12 積
方	6
廉	1

積ノ内, 中心一ヲ減ジテ余リニ, 十二ヲ乗ジテ実トスルナリ.

解説 外周を x で表して, $p = x/6$ とする. 積は

$$S = 1 + 6(1 + 2 + \dots + p) = 1 + 6 \frac{p(1+p)}{2}$$

$$S = 1 + 3\left(\frac{x}{6}\left(1 + \frac{x}{6}\right)\right) = 1 + \frac{1}{12}(6x + x^2) = S (= 271)$$

$$12 + 6x + x^2 = 12S, \quad 12 - 12S + 6x + x^2 = 0$$

傍書法の記号で建部賢弘は, この最後の方程式を与えているのである. $S = 271$ を代入すれば, $-3240 + 6x + x^2 = 0$ となる.

十^{ほうせん} 今有方箭一百四十四隻. 問外周幾何. 答曰 四十四隻. 術曰, 列積, 減一余, 以十六

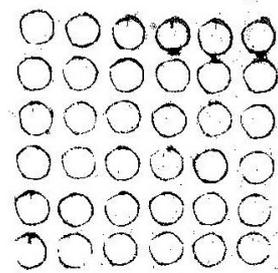


図 3. 方箭の断面図 (『算学啓蒙諺解大成』より)

乘之, 得二千二百八十八. 為実. 以八為従方. 一為廉法. 開平方除之. 合問.

分術ヲ以テ求ム. 天元ノ一ヲ立テ, 外周ト為ス. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 四個ヲ加入シ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ヲ得ル. 之

ヲ自乗シテ一十六段ノ積ト為ス. $\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$. 左ニ寄ス.

積ヲ列シ, 十六ヲ以テ之ニ乗ジ, 左ニ寄スル^ト与相消シテ式ヲ得ル.

実	16 - 16 積
方	8
廉	1

今按 術曰, 列積一百四十四隻, 為実. 以一為廉法. 開平方除之, 得一十二隻. 為每面数, 内減一隻余, 四之, 得外周也.

解説 方箭の外周を y で, 方箭の積 (総数) を T で表す. 図より,

$$\left(\frac{y}{4} + 1\right)^2 = T$$

故に, 分母を払って, $(y + 4)^2 = 16T$, $y^2 + 8y - 16(T - 1) = 0$ となる. $T = 144$ を代入すれば, 方程式 $y^2 + 8y - 2288 = 0$ を得る.

今按でいうのは, $\frac{y}{4} + 1 = \sqrt{T}$ だから, $y = 4(\sqrt{T} - 1)$ とすれば, 方程式を持ち出さなくてもよいということ.

参考文献

- [1] 郭書春 (今訳)、陳在新 (英訳)、郭金海 (整理): 四元玉鑑 (2 分冊)、大中華文庫、漢英対照、遼寧教育出版社、2006
- [2] 朱世傑 (原著)、李兆華 (考証)、四元玉鑑校証、科学出版社、2007
- [3] 森本光生、『算学啓蒙諺解大成』について、数理解析研究所講究録 1392、2004 年、p.27-45.
- [4] 森本光生、解説: 算学啓蒙について、数学史研究 (通巻 201 号)、2009 年、p.1-23.
- [5] 日本学士院編 (藤原松三郎)、明治前日本数学史第二巻、岩波書店、2008 (初版 1956)
- [6] 朱世傑、算学啓蒙、中国歴代算学集成、山東人民出版社、1994 年
- [7] 朱世傑、四元玉鑑 全 (中国科学技術典籍通彙)、1994 年
- [8] 朱世傑、四元玉鑑細草、中国歴代算学集成、山東人民出版社、1994 年