（ 続紙 １ ）

京都大学	博士（情報学）	氏名	小林 克樹
論文題目	Studies on Discrete Integrable Systems with Positivity and Their Applications （正値性を持つ離散可積分系とその応用について）		

（論文内容の要旨）

離散可積分系とは、非線形の差分方程式系でありながら、その保存量や厳密解が陽に書き下せるなどの著しい特徴をもつものを指す。そのなかでも、正値性(時間発展が減算を含まない形でかけること)と呼ばれる性質を持ったものは、様々な観点から特別な興味をもたれている。例えば、正値性を持つ離散力学系では減算による桁落ちが生じないため、計算機上で高精度な計算が可能となることが知られている。本論文では、基本戸田軌道と呼ばれる可積分系の正値性を持つ離散類似を導出し、さらに、超離散化と呼ばれる極限操作を用いることで得られる可積分なセル・オートマトンの解析および応用について調べたものであり、全５章からなる。

第１章では、可積分系について概観した上で、直交多項式と可積分系を関係付ける手法について、代表的な例である戸田方程式を用いた説明がなされている。加えて、箱玉系と呼ばれる可積分なセル・オートマトンを例にあげて、正値性を持つ離散可積分系からの極限操作（超離散化）によって導出可能となることが示されている。最後に、本論文で基本戸田軌道に注目するに至った動機を明らかにし、本論文の目的と構成について述べている。

第２章では、双直交Laurent多項式に対するスペクトル変換を用いることで、基本戸田軌道の離散類似として非自励離散基本戸田軌道を導出し、その正値性とともに、空間変数によらない非自励パラメータを持つことが示されている。非自励な離散化については、将来的な数値計算への応用を見据えたものであり、その特殊解と保存量が与えられている。さらに、非自励離散基本戸田軌道の超離散化によって、新たな可積分なセル・オートマトンを導出している。このセル・オートマトンはイプシロン-BBSと名付けられ、その状態は半無限に並んだ玉と箱の列により表され、高橋-薩摩の箱玉系を一般化した系であることが示されている。

第３章では、イプシロン-BBSのmulti-color拡張(玉の種類を増やした拡張)を導入し、その保存量がSchensted挿入と呼ばれる組合せ論的アルゴリズムで得られることを示した。同様の事実は高橋-薩摩の箱玉系のmulti-color拡張においてすでに知られていたが、本論文ではそれをイプシロン-BBSに対して拡張している。その証明のために、イプシロン-BBSの解の間の双有理変換を導入し、対応するSchensted挿入により得られるタブローが不変に保たれることを明らかにしている。

第４章では、超離散基本戸田軌道を用いた行列の単因子計算アルゴリズムを与えている。単因子は、整数行列を含む一般の単項イデアル整域上の行列に対する基本変形により不変であり、整数論や幾何学などで現れる有限生成加群の構造を決定する。離散可積分系と固有値・特異値計算法との関係については多くの研究があるが、超離散可積分系と環上の行列不変量の関係はこれまで知られていなかった新しい結果である。

第５章では、本論文で得られた結果を要約し、今後の課題について述べている。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

離散可積分系の研究において、KdV方程式など代表的な連続可積分系の離散化から得られる系に対して大きな関心が寄せられ、これまで発見された数多くの離散可積分系と同様に、様々な分野との関係が示されている。また、正値性を有する離散可積分系は、代数学、幾何学、数値計算、情報科学の分野と密接な関係をもち、とりわけ重要である。本論文は、可積分系の中で、数理物理において特に重要な位置を占めている戸田方程式とその族である基本戸田軌道の離散化を考えることにより、正値性を有する離散可積分系の族の導出に成功し、さらに、その基本的な性質と関連分野への応用について詳細な検討を加えたものであり、以下の成果を得ている。

１．戸田方程式及び相対論的戸田方程式を含む基本戸田軌道に対して、双直交Laurent多項式系のスペクトル変換を用いることにより非自励な離散化を施し、適切な従属変数に関して正値性を有する非自励離散基本戸田軌道を導出している。連続時間の基本戸田軌道については、保存量などの基本的な性質が既に調べられているが、その離散類似に対してはこれまでほとんど研究されていない。本論文で導入した非自励離散基本戸田軌道は、様々な応用が知られている離散戸田方程式と離散相対論的戸田方程式などを特別の場合として含むものであり、関連する分野への今後の展開が期待される。また、正値性を有する有理写像に対して超離散化を適用し、可積分なセル・オートマトンの族であるイプシロン-BBSの導出に成功している。超離散相対論的戸田方程式を用いたセル・オートマトンの定式化に関する先行研究と異なり、本論文で提案されたイプシロン-BBSのルールは従来の玉と箱による記述と一貫しており、高橋-薩摩の箱玉系を特殊な場合として含むと同時に、イプシロン-BBSの非自励パラメータは運搬車容量の自然な拡張とみなすことができる。

２．離散基本戸田軌道に対応する双直交Laurent多項式系の一般化を考え、そのスペクトル変換を用いることにより正値性を有する離散ハングリー基本戸田軌道を導出している。ここで得られた系に対して超離散極限を適用することで、イプシロン-BBSの一般化として、ハングリー拡張されたイプシロン-BBSを与えている。この一般化は高橋-薩摩の箱玉系のmulti-color拡張に相当しており、ハングリー拡張されたイプシロン-BBSの保存量の明示公式も示されている。その証明方法は、離散可積分系の理論により得られるイプシロン-BBSの解の間の双有理変換が、組合せ論で重要なYoung盤の基本操作であるSchensted挿入の像を保つことを示すというものであり、これは組合せ論と可積分系の間の興味深い関係を示唆している。

３．正値性を有する離散基本戸田軌道に対して超離散極限を施すことにより区分線形な力学系を導き、最小値と加法による演算を最大公約数と乗法による演算に置き換えることによりGCD基本戸田軌道の表示を与えている。このGCD基本戸田軌道は、複数の超離散基本戸田軌道を同時に計算するものであり、単項イデアル整域上のある三重対角行列の単因子を計算する機能を有することが示されている。離散可積分系と固有値・特異値計算については多くの研究があるが、超離散可積分系と環上の行列不変量との関係についてはこれまで調べられていない。ここで与えた計算法は、可積分系の情報学への応用というテーマに新たな視点をもたらすという意味で意義深いものとなっている。

以上、本研究は、基本戸田軌道の正値性を有する離散化を導出し、その超離散極限により、組合せ論や計算アルゴリズムなどとの関係を明らかにするなど、正値性を有する離散可積分系に対して新規かつ意義のある結果を与えている。よって、本論文は博士（情報学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和４年２月１６日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。なお、本論文のインターネットでの全文公表ついても支障がないことを確認した。

要旨公開可能日：　　　　　　　年　　　　月　　　　日以降