

Caristi の不動点定理と Bourbaki-Kneser の不動点定理 II

Caristi fixed point theorem and Bourbaki-Kneser fixed point theorem II

豊田 昌史

Masashi Toyoda

東邦大学理学部, 274-8510 千葉県船橋市三山 2-2-1
Faculty of Science, Toho University Miyama 2-2-1, Funabashi, Chiba
274-8510, Japan

1 はじめに

本論文は [7] の続きである. [7] と同様に, 次の不動点定理を用いる. [8] の定理 11.C である.

定理 1. 順序集合 X の任意の空でない鎖は上限をもつとする. f を X から X への写像で, 任意の $x \in X$ に対して, $x \leq f(x)$ とする. このとき f は不動点をもつ.

2 節では, 定理 1 を用いて Nadler の不動点定理 (定理 2) を証明する. Nadler の不動点定理は, 集合値縮小写像の不動点定理である. 3 節では, 定理 1 よりある不動点定理 (定理 3) を導く. この不動点定理は Zorn の補題と同値であることを示す. 4 節では, 最近に発表した論文 [3] の解説をする. [3] では, ボール空間におけるある不動点定理 (定理 4) を紹介した. この定理と [2] で紹介されている完備性 (spherical completeness) との関係を示す. いずれの不動点定理も, その証明に定理 1 を用いるところが共通している.

2 Nadler の不動点定理

[7] では、定理 1 を用いて、Caristi の不動点定理や Ekeland の変分不等式定理、高橋の最小値定理を導いた。本節では、定理 1 を用いて、集合値縮小写像の不動点定理である Nadler の不動点定理を導く。

X を距離空間とし、 A を X の空でない部分集合とする。 $x \in X$ とする。点 x から集合 A までの距離を $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$ で定める。 $CB(X)$ を X の空でない有界閉集合の全体とする。 $A, B \in CB(X)$ に対して

$$H(A, B) = \max\{\delta(A, B), \delta(B, A)\}$$

で定義すると、 H は $CB(X)$ の距離となる ([6])。ここで $\delta(A, B) = \sup\{d(x, B) \mid x \in A\}$ である。 X から $CB(X)$ への集合値写像 T が縮小であるとは、 $0 \leq r < 1$ をみたす r が存在して、任意の $x, y \in X$ に対して

$$H(Tx, Ty) \leq rd(x, y)$$

が成り立つときをいう。このとき、 T を集合値縮小写像 (multi-valued contraction mapping) という。

任意の $x \in X$ と $A, B \in CB(X)$ に対して $|d(x, A) - d(x, B)| \leq H(A, B)$ が成り立つ。実際、任意の $\epsilon > 0$ に対して、 $d(x, y) < d(x, B) + \epsilon$ となる $y \in B$ が存在する。よって、任意の $z \in A$ に対して

$$d(x, A) - d(x, B) \leq d(x, z) - d(x, y) + \epsilon \leq d(z, y) + \epsilon$$

が成り立つ。したがって

$$d(x, A) - d(x, B) \leq d(y, A) + \epsilon \leq \delta(B, A) + \epsilon \leq H(B, A) + \epsilon$$

を得る。 ϵ は任意であるから $d(x, A) - d(x, B) \leq H(B, A)$ である。同様に $d(x, B) - d(x, A) \leq H(A, B)$ である。以上より $|d(x, A) - d(x, B)| \leq H(A, B)$ を得る。

次の Nadler の不動点定理を、定理 1 を用いて証明する。

定理 2 (Theorem 5 [5]). X を完備距離空間とする。 T を X から $CB(X)$ への集合値縮小写像とする。このとき、ある $v \in X$ が存在して $v \in Tv$ をみたす。

証明. $\varphi(x) = d(x, Tx)$ と定義する。このとき、 φ は X から $[0, \infty)$ への連続関数であ

る. 実際, $x, y \in X$ とすると

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &\leq |d(x, Tx) - d(y, Ty)| + |d(y, Tx) - d(y, Ty)| \\ &\leq d(x, y) + H(Tx, Ty) \\ &\leq d(x, y) + rd(x, y) = (1+r)d(x, y) \end{aligned}$$

より, φ は連続である. $0 < \epsilon < 1-r$ とする. 任意の $v \in X$ に対して, v と異なるある $w \in X$ が存在して

$$\varphi(w) < \varphi(v) - \epsilon d(v, w)$$

をみたすとする. 選択公理を用いて v に対して w を対応させる写像 f を定義する. また, X の要素 v, w に対して, 順序を

$$v \leq w \iff \epsilon d(v, w) \leq \varphi(v) - \varphi(w)$$

で定める. このとき X は順序集合である. このとき, f のみたす仮定より $f(v) \neq v$ で $v \leq f(v)$ である. 順序集合 (X, \leq) の鎖を C とおく. $C = \{x_\alpha\}$ とおくと, ネット C は極限 x をもち, x は上界であることが [7] の補助定理 6 よりわかる. しかも x は C の上限である. 実際, x' を C の上界とすると, $x_\alpha \leq x'$, すなわち

$$\epsilon d(x_\alpha, x') \leq \varphi(x_\alpha) - \varphi(x')$$

であるが, φ は連続であるので

$$\epsilon d(x, x') \leq \varphi(x) - \varphi(x'),$$

すなわち $x \leq x'$ を得る. これより x は C の最小上界である.

定理 1 より, f の不動点が存在するが, これは矛盾である. したがって, ある $v \in X$ が存在して, 任意の $w \in X$ に対して,

$$\varphi(w) \geq \varphi(v) - \epsilon d(v, w)$$

をみたす. $w \in Tv$ とする. このとき

$$\begin{aligned} d(v, Tv) &\leq d(w, Tw) + \epsilon d(v, w) \\ &\leq \delta(Tv, Tw) + \epsilon d(v, w) \\ &\leq H(Tv, Tw) + \epsilon d(v, w) \\ &\leq rd(v, w) + \epsilon d(v, w) = (r + \epsilon)d(v, w) \end{aligned}$$

である. したがって

$$d(v, Tv) \leq (r + \epsilon)d(v, Tv)$$

である. これより $(1-r-\epsilon)d(v, Tv) \leq 0$ であるから $d(v, Tv) = 0$ を得る. これより $v \in Tv$ である. \square

3 Zorn の補題と同値な不動点定理

[7] では、定理 1 を用いて Zorn の補題を導いた。本節では、定理 1 を用いてある不動点定理を導き、これが Zorn の補題と同値であることをみる。

定理 3. 順序集合 X の任意の鎖は上界をもつとする。 f を X から X への写像で、任意の $x \in X$ に対して、 $x \leq f(x)$ とする。このとき f は不動点をもつ。

証明. $\mathcal{C} = \{C \mid C \subset X, C \text{ は空でない鎖}\}$ とする。 \mathcal{C} は包含関係による順序

$$C_1 \leq C_2 \iff C_1 \subset C_2$$

により順序集合となり、また任意の空でない鎖は上限をもつ (補助定理 4 [7])。選択公理より、 \mathcal{C} の要素 C に対して C の上界 z_C を対応させる写像が存在する。したがって \mathcal{C} 上の写像 T を

$$T(C) = C \cup \{f(z_C)\}$$

で定める。任意の $x \in C$ に対して

$$x \leq z_C \leq f(z_C)$$

であるから $C \cup \{f(z_C)\}$ も鎖である。よって T は \mathcal{C} から \mathcal{C} への写像である。また、任意の $C \in \mathcal{C}$ に対して $C \leq T(C)$ である。定理 1 より、ある $C_0 \in \mathcal{C}$ が存在して

$$C_0 = T(C_0) = C_0 \cup \{f(z_{C_0})\}$$

である。これより $f(z_{C_0}) \in C_0$ である。 z_{C_0} は C_0 の上界であるから $f(z_{C_0}) \leq z_{C_0}$ である。また $z_{C_0} \leq f(z_{C_0})$ であるから

$$z_{C_0} = f(z_{C_0})$$

を得る。以上より f は不動点をもつ。 □

定理 3 は Zorn の補題と同値である。実際、Zorn の補題から定理 3 を得るのは容易である。Zorn の補題が成り立つとすると、 X の極大元 z_0 が存在する。 $z_0 \leq f(z_0)$ が成り立つが z_0 は X の極大元であるので

$$z_0 = f(z_0)$$

を得る。以上より f は不動点をもつ。

定理 3 から Zorn の補題も得られる. 実際, X は極大元をもたないとする. 集合 Y を $Y = X \times \omega$ で定義する. ここで ω は自然数全体の集合である. Y には辞書式の順序を定める. すなわち $(x_1, n_1), (x_2, n_2) \in Y$ に対して

$$(x_1, n_1) \leq (x_2, n_2) \iff x_1 \leq x_2 \text{ または } x_1 = x_2, n_1 \leq n_2$$

で定める. Y から Y への写像 f を

$$f(x, n) = (x, n + 1)$$

で定義する. このとき $(x, n) \leq f(x, n)$ が常に成り立つ. また Y の任意の鎖は上界をもつ. 実際, 鎖の第 1 成分を C とする. 仮定より C は上界 z をもつ. $z \notin C$ と一般にしてよい. 実際 z は C の上界なので, 任意の $x \in C$ に対して $x \leq z$ である. z は極大元ではないから, ある z' が存在して

$$x \leq z < z'$$

である. これより $z' \notin C$ である. したがって, C の上界 z は $z \notin C$ をみたとする. このとき $(z, 0)$ が Y の鎖の上界である. 以上より, 定理 3 の仮定をみたしているので f の不動点が存在するはずであるが, これは f の定義から矛盾である. 以上より X は極大元をもつ.

[7] では, Caristi の不動点定理を Zorn の補題を用いて証明した (p.102 [7]). 上記でみたように, 定理 3 は Zorn の補題と同値な命題であるので, 定理 3 を用いても証明できる. 実際, X の要素 x, y に対して, 順序を

$$x \leq y \iff d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$$

で定める. このとき, T のみたとす条件から, 任意の $x \in X$ に対して $x \leq Tx$ である. また, X の任意の鎖は上界をもつ (補助定理 6 [7]). 定理 3 より T の不動点が存在する.

4 ボール空間における不動点定理

本節では, [3] で紹介した不動点定理の完備性について検討する. この不動点定理の証明に定理 1 を用いた. [3] の出版にあたって, ある研究者から [2] の文献を紹介して頂いた. その際, [2] で紹介されている完備性 (spherical completeness) と [3] で紹介した定理の仮定との関係についての質問を頂いた. その質問に対する回答を本節で行う.

X を空でない集合とする. $\mathcal{B} = \{B_x \mid x \in X\}$ とする. ここで B_x は X の空でない部分集合である. 集合族 \mathcal{B} は

$$B_1 \leq B_2 \iff B_1 \supset B_2$$

により順序を定める. このとき (X, \mathcal{B}) をボール空間 (ball space) とよぶ. \mathcal{B} の各要素 B_x を単に球と呼ぶ.

[3] で, 次の不動点定理を紹介した.

定理 4 (Theorem 4 [3]). (X, \mathcal{B}) をボール空間とし, 任意の $x \in X$ に対して $x \in B_x$ が成り立つとする. X から X への写像 T を, $x \neq Tx$ をみたす任意の $x \in X$ に対して

$$B_{Tx} \subsetneq B_x$$

をみたす写像とする. $\Gamma = \{C \mid C \subset \mathcal{B}, C \text{ は鎖}\}$ とする. Γ から X への写像 p を, 任意の $C \in \Gamma$ に対して

$$B_{p(C)} \subset \bigcap C$$

をみたす写像とする. このとき T は不動点をもつ.

定理 4 の証明の概略は次である: ある $z_0 \in X$ が存在し

$$B_{z_0} = B_{Tz_0}$$

をみたすとする. このとき $z_0 = Tz_0$ である. 実際 $z_0 \neq Tz_0$ とすると T の仮定から

$$B_{Tz_0} \subsetneq B_{z_0}$$

となり矛盾を得る. この z_0 をみつける際に定理 1 を用いる. さらなる詳細は [3] を参照されたい.

\mathcal{B} の任意の鎖が共通部分をもつとき, ボール空間を完備 (spherically complete) という ([4]). [2] では, この完備性に関してある階層を紹介している.

- S_1 : ボール空間の任意の鎖の共通部分は空ではない.
- S_2 : ボール空間の任意の鎖の共通部分はある球を含む.
- S_3 : ボール空間の任意の鎖の共通部分はある極大な球を含む.
- S_4 : ボール空間の任意の鎖の共通部分はある最大な球を含む.
- S_5 : ボール空間の任意の鎖の共通部分はある球である.

これらの階層の間には, 次の導出関係が成り立つ:

$$S_5 \implies S_4 \implies S_3 \implies S_2 \implies S_1.$$

さて, ここで問を提示する:

上記完備性と定理 4 の仮定はどのような関係があるのか?

この問の回答のため、まずは定理 4 を [2] で紹介されている用語で書き換え、さらに完備性に新たな階層を導入する。

X を空でない集合とする。 \mathcal{B} を X の非空な部分集合族とする。組 (X, \mathcal{B}) をボール空間という ([2])。また, [2] によれば, $\mathcal{B} = \{B_x \mid x \in X\}$ とするときを B_x -ボール空間 (B_x -ball space) と呼んでいる。したがって, [2] における B_x -ボール空間を, [3] では単にボール空間と呼んでいる。ボール空間 (X, \mathcal{B}) 上の写像 T が contracting on orbits である ([2]) とは, ある写像

$$X \ni x \mapsto B_x \in \mathcal{B}$$

が存在して

$$x \in B_x$$

および

$$B_{Tx} \subsetneq B_x$$

が $x \neq Tx$ をみたく任意の $x \in X$ に対して成り立つときをいう。

以上の用語によれば, 定理 4 は B_x -ボール空間 (X, \mathcal{B}) における contracting on orbits 写像 T に関する不動点定理といえる。

さらに, 定理 4 の仮定する完備性を明確にするため, 次を導入する。

S'_3 : ボール空間の任意の鎖の共通部分はある球を含み, かつ, 選出できる。

このとき, 次の導出関係が成り立つ:

$$S_5 \implies S_4 \implies S'_3 \implies S_2 \implies S_1.$$

以上, [2] で紹介されている用語と, 本論文で導入した新たな完備性 (S'_3) を用いると, 定理 4 は次のように書き換えられる。

定理 5. (X, \mathcal{B}) を S'_3 をみたく B_x -ボール空間とする。 X から X への写像 T を contracting on orbits 写像とする。このとき T は不動点をもつ。

したがって, [3] で紹介した定理 4 は, S'_3 という完備性を仮定した定理である。これが先の問に対する回答である。

参考文献

- [1] A. Abian, *Fixed point theorems of the mappings of partially ordered sets*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 20 (1971), 139–142.

- [2] H. Ćmiel, F.-V. Kuhlmann and K. Kuhlmann, *A basic framework for fixed point theorems: ball spaces and spherical completeness*, 2020; available at: <https://arxiv.org/pdf/1905.09930.pdf>].
- [3] Y. Kimura and M. Toyoda, *Fixed point theorem in ball spaces and Caristi's fixed point theorem*, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis. An International Journal*, 23 (2022), 185–189.
- [4] F.-V. Kuhlmann, K. Kuhlmann and M. Paulsen, *The Caristi-Kirk fixed point theorem from the point of view of ball spaces*, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 20 (2018), Art. 107.
- [5] S. B. Nadler, Jr., *Multi-valued contraction mappings*, *Pacific J. Math.*, 30 (1969), 415–487.
- [6] 高橋涉, 非線形関数解析学, 近代科学社, 1988.
- [7] 豊田昌史, Caristi の不動点定理と Bourbaki-Kneser の不動点定理, 京都大学数理解析研究所講究録, 2194 (2021), 97–107.
- [8] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I, Fixed-Point Theorems*, Springer, 1986.