The orthogonal decomposition of Banach spaces and its applications

岩手大学　本田　卓
Takashi Honda
Faculty of Education, Iwate University, Japan
E-mail address: thonda7@iwate-u.ac.jp

概　要　Alber [1, 2]、高橋-筆者 [4, 5] らにより、Banach 空間に対し Hilbert 空間のような直交補空間分解を導入した。これは Hilbert 空間での直交補空間分解の純粋な拡張で、Banach 空間における距離射影と茨木-高橋 [6] により導入された一般化非拡大射影との概念を繋ぐものである。この、Banach 空間の直交補空間分解の応用例として、近年発表された、故高橋渉名誉教授との共同研究 [9] に触れる。

1　はじめに

Alber [1, 2]、高橋-筆者 [4, 5] らにより導入された Banach 空間における直交補空間分解について紹介する。以下では、E を実 Banach 空間とする。E を滑らかな Banach 空間、J を正規化双対写像 (normalized duality mapping) とすると、以下のような汎関数 $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ を定義できる。

$$\phi(x,y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2.$$

正規化双対写像 J は

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

で定義される共役空間 E^* に値を持つ集合値写像で、どんな Bnach 空間 E でも一般にすべての要素 $x \in E$ で定義できる。さらに、E が滑らかな Banach 空間の場合は一価写像である。その他詳細は [8] を参照。C を E の閉凸部分集合とし、写像 $T : C \to C$ が不動点を持ち、不等式

$$\phi(Tx,y) \leq \phi(x,y)$$

をすべての C の要素 x と T の不動点 $y \in F(T)$ とにおいて満たすとき、この写像を一般化非拡大 (generalized nonexpansive) 写像と呼ぶ。茨木-高橋 [6] を参照。もし E の、空でないある部分集合の上への冪等写像 R がこの性質を持つとき、R を一般化非拡大射影 (generalized nonexpansive retraction) と呼ぶ。さらに、すべての $x \in E$、$t \geq 0$ において等式 $R(Rx + t(x - Rx)) = Rx$ が成り立つとき、R を sunny generalized nonexpansive retraction と呼ぶ。E の非空閉部分集合 C の上への冪等写像 R_C が sunny generalized nonexpansive retraction であることと、任意の $x \in E,\ y \in C$ において、不等式 $\langle x - R_C x, Jy - JR_C x\rangle \leq 0$ が成り立つこととが同値である。逆に、E のある部分集合が E からその集合上への sunny generalized nonexpansive retraction を持つとき、その集合を E の sunny generalized nonexpansive retract と呼ぶ。E が滑らかで、厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間のとき、E の非空部分集合 C が E の sunny generalized nonexpansive retract になるた

めの必要十分条件は、高阪-高橋 [7] により、C の正規双対写像 J による像 JC が E の共役空間 E^* での閉凸集合であることが知られている。またこれは E の一般化非拡大レトラクト (generalized nonexpansive retract) である必要十分条件でもあり、このとき、E の C の上への sunny generalized nonexpansive retraction R_C は、$R_C = J^{-1}\Pi_{JC}J$ と表現できる。ここで、Π_{JC} は E^* の JC の上への一般化射影である。

そこで、滑らかで、厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間 E の非空部分集合 C において、$JC = Y^*$ が E^* での閉部分空間である場合を考える。このとき、任意の $x \in E$ は、

$$x = P_{Y^*_\perp}x + R_{J^{-1}Y^*}x$$

と表現できる。ここで、$Y^*_\perp = \{x \in E : \text{任意の } y^* \in Y^* \text{ において } \langle x, y^* \rangle = 0\}$、$P_{Y^*_\perp}$ は E の $Y^*_\perp$ の上への距離射影を表す。また逆に、Y を E の閉部分空間とすると、任意の $x \in E$ は、

$$x = P_Y x + R_{J^{-1}Y^\perp}x$$

と表現できる。ここで、$Y^\perp = \{x^* \in E^* : \text{任意の } y \in Y \text{ において } \langle y, x^* \rangle = 0\}$ とし、$Y^\perp$ は E^* の閉部分空間なので、E の $J^{-1}Y^\perp$ の上への sunny generalized nonexpansive retraction $R_{J^{-1}Y^\perp}$ が存在する。これを、Banach 空間における直交補空間分解と呼び、Hilbert 空間では通常の直交補空間分解になっている。詳細は [1, 2, 4, 5] を参照。これを用いて、線形縮小写像の Mann 型の強収束定理 [9] を導いてみる。

2　本論

本論では、特に但し書きがなければ、空間として滑らかで、厳密に凸なノルムを持つ反射的実 Banach 空間 E を用いるものとする。この条件下では、正規化双対写像は E から共役空間 E^* への全単射写像になることが知られている [8]。また、本論では収束はノルムによる収束（強収束）を表すとする。まず、線形縮小写像の不動点の集合は以下の基本的性質をみたす [10]。

Corollary 2.1. $T : E \to E$ を線形縮小写像としたとき、任意の $x \in E$、$v \in F(T)$ において、

$$\|Tx\| \le \|x\| \quad \text{かつ} \quad \langle x - Tx, Jv \rangle = 0$$

が成り立つ。

Lemma 2.1. $T : E \to E$ を線形縮小写像、$F(T)$ を T の不動点すべての集合とする。このとき、$JF(T)$ は E^* の閉部分空間で $JF(T) = F(T^*) = \{z - Tz : z \in E\}^\perp$ が成り立つ。ここで、T^* は T の共役作用素。

Lemma 2.2. $S, T : E \to E$ を線形縮小写像とし、$F(S), F(T)$ を各々、S, T の不動点すべての集合としたとき、$J(F(S) \cap F(T))$ は E^* の閉部分空間で、

$$J(F(S) \cap F(T)) = F(S^*) \cap F(T^*) = \{z - Sz, z - Tz : z \in E\}^\perp$$

が成り立つ。ここで、S^*, T^* は各々 S, T の共役作用素。

Proof. $J : E \to E^*$ は全単射なので、$J(F(S)\cap F(T)) = JF(S)\cap JF(T)$ で、Lemma 2.1 より、$JF(S), JF(T)$ は E^* の閉部分空間なので、$J(F(S)\cap F(T))$ は E^* の閉部分空間。さらに、

$$\begin{aligned} f \in J(F(S)\cap F(T)) &\Leftrightarrow f \in JF(S)\cap JF(T) \\ &\Leftrightarrow f \in F(S^*)\cap F(T^*) \\ &\Leftrightarrow f \in \{z - Sz : z \in E\}^{\perp} \cap \{z - Tz : z \in E\}^{\perp} \\ &\Leftrightarrow f \in \{z - Sz, z - Tz : z \in E\}^{\perp} \end{aligned}$$

が成り立つ。 □

よって、以下のような集合を定義する。

Definition 2.1. $x \in E$ と E の非空部分集合 F において、E の部分集合 $R(x;F)$ を以下のように定義する。

$$R(x;F) = \{z \in E : \|z\| \le \|x\| \text{ で, かつ, すべての } u \in F \text{ において } \langle x - z, Ju\rangle = 0\}$$

このとき、この集合は以下の性質を持つ [10]。

Lemma 2.3. 任意の $x \in E$ と E の非空部分集合 F において、集合 $R(x;F)$ は空でなく、有界な閉凸集合である。また、$F \cap R(x;F)$ は空でなければたかだか一元集合である。

これらを用い、以下の定理を証明する。

Theorem 2.1. 線形縮小写像 $S, T : E \to E$ と、線形縮小写像の列 $\{S_n\}$, $S_n : E \to E$ で、すべての自然数 n において $F(S)\cap F(T) \subset F(S_n)$ となるものを考える。このとき、以下は同値である。

(1) 任意の $x \in E$ において、$S_n x$ が $n \to \infty$ のとき $F(S)\cap F(T)$ のある要素に収束する。
(2) 任意の $x \in (J(F(S)\cap F(T)))_{\perp}$ において、$S_n x$ が $n \to \infty$ のとき 0 に収束する。
(3) 任意の $x \in E$ において、$S_n x - S_n \circ Sx$ と $S_n x - S_n \circ Tx$ が $n \to \infty$ のとき 0 に収束する。

さらに、もし、*(1)* が成り立つなら、$S_n x$ は $R_{F(S)\cap F(T)} x \in F(S)\cap F(T)$ に収束する。

Proof. (1) が成り立つと仮定する。条件より、任意の $x \in E$ において、$S_n x \in R(x; F(S_n)) \subset R(x; F(S)\cap F(T))$ で、Lemma 2.3 より、$(F(S)\cap F(T)) \cap R(x; F(S)\cap F(T))$ は空でなければたかだか一元集合である。$R(x; F(S)\cap F(T))$ は閉集合で、$S_n x$ は $n \to \infty$ のとき $F(S)\cap F(T)$ のある要素 z に収束するので、$(F(S)\cap F(T)) \cap R(x; F(S)\cap F(T)) = \{z\}$ となる。各 $x \in E$ において、この z を Rx と書くことにする. このとき、$R : E \to F(S)\cap F(T)$ を x から Rx に対応させる写像とすると、R は E の $F(S)\cap F(T)$ の上への冪等写像になっている。さらに、S_n が線形縮小写像であることより、Corollary 2.1 で、任意の $x \in E$、$u \in F(S_n)$、$n \in \mathbb{N}$ において、$\langle x - S_n x, Ju\rangle = 0$ が成り立つので、任意の $v \in F(S)\cap F(T)$ において、

$$\langle x - Rx, Jv\rangle = 0 \tag{2.1}$$

が成り立つ。$Rx \in F(S)\cap F(T)$ なので、$\langle x - Rx, JRx\rangle = 0$ となり、結果として、等式

$$\langle x - Rx, JRx - Jv\rangle = 0 \tag{2.2}$$

が得られる。これは、冪等写像 $R: E \to F(S)\cap F(T)$ が、E の $F(S)\cap F(T)$ の上への sunny generalized nonexpansive retraction であることを意味している。よって、

$$R = R_{F(S)\cap F(T)} = J^{-1}\Pi_{J(F(S)\cap F(T))}J$$

であることが分かる。ここで、$x \in (J(F(S)\cap F(T)))_\perp$ とすると、任意の $v \in F(S)\cap F(T)$ において、等式 $\langle x, Jv\rangle = 0$ が成り立つが、(2.1) より、一般に $\langle x - Rx, Jv\rangle = 0$ も成り立つので、任意の $v \in F(S)\cap F(T)$ において、$\langle Rx, Jv\rangle = 0$ が得られる。これは、$Rx \in (J(F(S)\cap F(T)))_\perp$ を意味する。よって、$Rx \in (F(S)\cap F(T))\cap(J(F(S)\cap F(T)))_\perp$ となるが、$(F(S)\cap F(T))\cap(J(F(S)\cap F(T)))_\perp = \{0\}$ より、$Rx = 0$ が得られる。つまり、$x \in (J(F(S)\cap F(T)))_\perp$ とすると、$S_n x$ は $n \to \infty$ のとき $Rx = 0$ に収束する。よって、(2) が得られる。

(2) が成り立つと仮定する。J は全単射なので、$J(F(S)\cap F(T)) = JF(S)\cap JF(T)$ で、Lemma 2.1 より、$JF(S), JF(T)$ は E^* の閉部分空間なので、$J(F(S)\cap F(T))$ は E^* の閉部分空間で、Banach 空間の直交補空間分解より、任意の $x \in E$ において、等式

$$x = R_{F(S)\cap F(T)}x + P_{(J(F(S)\cap F(T)))_\perp}x$$

が得られる。ここで、$P_{(J(F(S)\cap F(T)))_\perp}$ は E の $(J(F(S)\cap F(T)))_\perp$ の上への距離射影である。よって、

$$\begin{aligned} S_n x &= S_n\left(R_{F(S)\cap F(T)}x + P_{(J(F(S)\cap F(T)))_\perp}x\right) \\ &= S_n R_{F(S)\cap F(T)}x + S_n P_{(J(F(S)\cap F(T)))_\perp}x \\ &= R_{F(S)\cap F(T)}x + S_n P_{(J(F(S)\cap F(T)))_\perp}x \end{aligned}$$

が成り立つが、(2) より、$n \to \infty$ のとき $S_n P_{(J(F(S)\cap F(T)))_\perp}x$ は 0 に収束する。つまり、任意の $x \in E$ において、$n \to \infty$ のとき $S_n x$ は $R_{F(S)\cap F(T)}x \in F(S)\cap F(T)$ に収束する。これは、(1) が成り立つことを意味する。さらに、Lemma 2.2 より、任意の $x \in E$ において、$x - Sx, x - Tx \in J(F(S)\cap F(T))_\perp$ が言える。よって、(2) より、$n \to \infty$ のとき $S_n(x - Sx), S_n(x - Tx)$ はともに 0 に収束する。つまり、任意の $x \in E$ において、$n \to \infty$ のとき $S_n x - S_n \circ Sx, S_n x - S_n \circ Tx$ はともに 0 に収束する。これは、(3) が成り立つことを意味する。

(3) が成り立つと仮定する。任意の $x \in E$ において、$n \to \infty$ のとき $S_n(x - Sx), S_n(x - Tx)$ はともに 0 に収束する。よって、任意の $y \in \{x - Sx, x - Tx : x \in E\}$ において、$S_n y$ は 0 に収束する。$\mathrm{spn}\{x - Sx, x - Tx : x \in E\}$ を $\{x - Sx, x - Tx : x \in E\}$ の線形包とすると、これは $\{x - Sx, x - Tx : x \in E\}$ の有限個の要素の線形結合すべての集合だが、このことより、任意の $y \in \mathrm{spn}\{x - Sx, x - Tx : x \in E\}$ において、$S_n y$ は 0 に収束する。Lemma 2.2 より、

$$(J(F(S)\cap F(T)))_\perp = \left(\{z - Sz, z - Tz : z \in E\}^\perp\right)_\perp = \overline{\mathrm{spn}}\{z - Sz, z - Tz : z \in E\}$$

（ここで、$\overline{\mathrm{spn}}$ は閉線形包を表す）なので、$x \in (J(F(S)\cap F(T)))_\perp$ を考えると、任意の $\varepsilon > 0$ において、ある要素 $y \in \mathrm{spn}\{x - Sx, x - Tx : x \in E\}$ が存在し、$\|x - y\| < \varepsilon$ が成り立つようにできる。

このことより、

$$\begin{aligned}\|S_nx\| &= \|S_ny+(S_nx-S_ny)\| \\ &\leq \|S_ny\|+\|S_nx-S_ny\| \\ &\leq \|S_ny\|+\|x-y\| \\ &< \|S_ny\|+\varepsilon\end{aligned}$$

が成り立ち、$n\to\infty$ のとき S_ny は 0 に収束するので、

$$\limsup_{n\to\infty}\|S_nx\| \leq \limsup_{n\to\infty}(\|S_ny\|+\varepsilon)=\varepsilon$$

が得られる。$\varepsilon>0$ は任意なので、$\lim_{n\to\infty}\|S_nx\|=0$ が得られる。つまり、任意の $x\in(J(F(S)\cap F(T)))_\perp$ において、$n\to\infty$ のとき S_nx は 0 に収束するので、(2) が成り立つ。

さらに、もし、(1) が成り立つなら、S_nx は $R_{F(S)\cap F(T)}x\in F(S)\cap F(T)$ に収束することは、すでに示した。 □

Corollary 2.2. 線形縮小写像 $T:E\to E$ と、線形縮小写像の列 $\{S_n\}$, $S_n:E\to E$ で、すべての自然数 n において $F(T)\subset F(S_n)$ となるものを考える。このとき、以下は同値である。

(1) 任意の $x\in E$ において、S_nx が $n\to\infty$ のとき $F(T)$ のある要素に収束する。
(2) 任意の $x\in(JF(T))_\perp$ において、S_nx が $n\to\infty$ のとき 0 に収束する。
(3) 任意の $x\in E$ において、$S_nx-S_n\circ Tx$ が $n\to\infty$ のとき 0 に収束する。

さらに、もし、*(1)* が成り立つなら、S_nx は $R_{F(T)}x\in F(T)$ に収束する。

この定理を用いることで、Banach 空間での線形写像の Mann 型の強収束定理 [9] が得られる。まず、以下の Lemma は [3] による。

Lemma 2.4. $\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ 内の数列とし、

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha_n)=\infty$$

をみたすものとする。また、$\{b_n\},\{\varepsilon_n\}$ をを $[0,\infty)$ 内の数列とし、

$$b_{n+1}\leq\alpha_nb_n+(1-\alpha_n)\varepsilon_n,\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

と、$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ をみたすものとする。このとき、$\lim_{n\to\infty}b_n=0$ が成り立つ。

Theorem 2.2. $S,T:E\to E$ を可換線形縮小写像とする。また、$\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ 内の数列とし、

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha_n)=\infty$$

をみたすものとする。このとき、任意の $x \in E$ において、

$$x_1 = x$$
$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} S^k T^l x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

として生成される点列 $\{x_n\}$ は $F(S)\cap F(T)$ の要素 $R_{F(S)\cap F(T)}x$ に強収束する。

Proof. 任意の $i \in \mathbb{N}$ において、$U_i = \frac{1}{(i+1)^2}\sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{i} S^k T^l$, $T_i = \alpha_i I + (1-\alpha_i)U_i$（ここで、$I$ は E 上の恒等写像）と定義する。このとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ において、$S_n = T_n \circ T_{n-1} \circ \cdots \circ T_1$ とすると、$x_{n+1} = S_n x$ で、写像 $S_n : E \to E$ は線形縮小写像である。また、S, T は線形縮小写像なので、$F(S)\cap F(T)$ は E の閉部分空間である。任意の $i \in \mathbb{N}$ において、$\|T_i\| \le 1$, $F(S)\cap F(T) \subset F(T_i)$ なので、これらより、任意の $n \in \mathbb{N}$ において、$\|S_n\| \le 1$, $F(S)\cap F(T) \subset F(S_n)$ が成り立つ。

よって、Theorem 2.1 より、任意の $x \in E$ において、

$$\|S_n x - S_n S x\| \to 0, \ \|S_n x - S_n T x\| \to 0$$

が成り立つことを示せばよい。S, T は可換線形縮小写像なので、$S \circ S_n = S_n \circ S$, $T \circ S_n = S_n \circ T$ が成り立つ。つまり、$x_{n+1} = S_n x$ より、

$$\|x_{n+1} - S_n S x\| \to 0, \ \|x_{n+1} - S_n T x\| \to 0$$

を示せばよい。$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)U_n x_n$ で、S が線形なので、

$$\|x_{n+1} - Sx_{n+1}\| \le \alpha_n \|x_n - Sx_n\| + (1-\alpha_n)\|U_n x_n - SU_n x_n\| \tag{2.3}$$

が成り立つ。さらに、

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}\| &= \|\alpha_n x_n + (1-\alpha_n)U_n x_n\| \\ &\le \alpha_n \|x_n\| + (1-\alpha_n)\|U_n x_n\| \\ &\le \alpha_n \|x_n\| + (1-\alpha_n)\|x_n\| \\ &= \|x_n\|\end{aligned}$$

が成り立つので、$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|$ が存在し、点列 $\{x_n\}$ は有界である。$ST = TS$ より、

$$\begin{aligned}\|U_n x_n - SU_n x_n\| &= \left\| \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} S^k T^l x_n - S\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} S^k T^l x_n \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} (S^k T^l x_n - S^{k+1} T^l x_n) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{l=0}^{n} (ST^l x_n + T^l x_n - S^{n+2} T^l x_n + S^{n+1} T^l x_n) \right\|\end{aligned}$$

が得られる。$\{x_n\}$ は有界なので、これより $\|U_n x_n - SU_n x_n\| \to 0$ となる。(2.3)、Lemma 2.4、$\|U_n x_n - SU_n x_n\| \to 0$ より、

$$\|x_{n+1} - Sx_{n+1}\| \to 0$$

が成り立つ。同様に、

$$\|x_{n+1} - Tx_{n+1}\| \to 0.$$

も得られる。よって、Theorem 2.1 より、$\{x_n\}$ は $F(S) \cap F(T)$ の要素 Rx に強収束する。ここで、$R = R_{F(S)\cap F(T)} = J^{-1}\Pi_{J(F(S)\cap F(T))}J$ で、$\Pi_{J(F(S)\cap F(T))}$ は E^* の $J(F(S) \cap F(T))$ の上への一般化射影を意味する。 □

3　結論

本研究は、大部分が故高橋涉名誉教授の執筆中の論文に基づいている。高橋先生の研究をこの様な形で発表する機会を頂いたことに本当に感謝している。微力ではあるが、今後も先生の研究を継承していきたいと考えている。

Acknowledgment

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

参考文献

[1] Ya. I. Alber, *Generalized Projections, Decompositions, and the Pythagorean-Type Theorem in Banach Spaces*, Appl. Math. Lett. **11** (1998), 115–121.

[2] Ya. I. Alber, *James orthogonality and orthogonal decompositions of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **312** (2005), 330–342.

[3] K. Eshita and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for commutative semigroups of continuous linear operators on Banach spaces*, Taiwanese J. Math. **9** (2005), 531–550.

[4] T. Honda and W. Takahashi, *Norm One Projections and Generalized Conditional Expectations*, Sci. Math. Jpn. **69** (2009), no.3, 303–313.

[5] T. Honda and W. Takahashi, *Nonlinear projections and generalized conditional expectations in Banach spaces*, Taiwanese J. Math., **15** (2011), 2169–2193.

[6] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory **149** (2007), no.1, 1–14.

[7] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), no.2, 197–209.

[8] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points* (in Japanese), Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[9] W. Takahashi, T. Honda and M. Hojo, *Strong Convergence Theorems for Commutative Linear Contractive Mappings in Banach Spaces Based on Nonlinear Analytic Methods*, Linear and Nonlinear Anal. **7** (2021), no.1, 157–171.

[10] J.-C. Yao, W. Takahashi and T. Honda, *Strong convergence theorems and nonlinear analytic methods for linear contractive mappings in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), no.3, 574–566.