重み付きの集合関係について

On the weighted set relation

秋田県立大学　システム科学技術学部　経営システム工学科
Faculty of Systems Science and Technology, Akita Prefectural University
荒谷　洋輔 (Araya, Yousuke) *

1　はじめに

多目的最適化問題の拡張である集合最適化問題は、1997年に黒岩-田中-Ha[19]によって提唱された。この問題は、集合値写像の像空間の元（集合）における大小の比較について6種類の順序を導入し、その順序による最適化問題を考えるというものである。近年では、**集合最適化問題が「多目的のロバスト最適化問題」に変換できることの発見 [16] などの重要な成果がある。**

筆者は、ベクトルの非線形スカラー化手法[11]の自然な拡張である、集合の非線形スカラー化手法の研究[2, 3]を2010年代に進めてきた。本稿ではその成果の応用として、重み付き集合関係[6]について紹介する。尚、本稿は[5]の概要をまとめたものであるが、ところどころに最新の成果と筆者の感想がある。

2　準備

2.1　ベクトル最適化からの準備

本稿では Y を線形位相空間、$\mathbf{0}_Y$ を Y の原点とする。集合 $A \subset Y$ に対し、A の位相的内部、位相的閉包をそれぞれ $\mathrm{int}A$、$\mathrm{cl}A$ と表す。また、この論文で、$C \subset Y$ は閉凸錐を表すものとする。つまり、以下の条件を満たす。

(a) $\mathrm{cl}C = C$、
(b) $C + C \subseteq C$、
(c) $\lambda C \subseteq C \ \forall \lambda \in [0, \infty)$。

尚、錐 $C \subset Y$ が solid とは $\mathrm{int}C \neq \emptyset$ を満たすことであり、pointed であるとは $C \cap (-C) = \{\mathbf{0}_Y\}$ が成立する場合である。凸錐 $C \subset Y$ によって以下のようなベクトル順序 $\leq_C$ が導入され、$(Y, \leq_C)$ は順序ベクトル空間となる。

$$\forall y_1, y_2 \in Y, \qquad y_1 \leq_C y_2 \overset{def}{\iff} y_2 - y_1 \in C$$

もし、C が pointed ならベクトル順序 $\leq_C$ は反対称的となる。逆に一般の（実）順序ベクトル空間に対して、その順序と一意に対応する凸錐を構成することができ、その凸錐から生成される半順序が元のベクトル順序と一致することが確かめられる [21]。

*(*E-mail:* **y-araya@akita-pu.ac.jp**)

2.2 集合最適化からの準備

$\mathcal{V}$ を Y の空でない部分集合全体とする。$V_1, V_2 \in \mathcal{V}$、$\alpha \in \mathbb{R}$、$V \in \mathcal{V}$ に対して、2つの集合の和・スカラー積は以下のように定義される。

$$V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\} \qquad \alpha V := \{\alpha v \mid v \in V\}$$

定義 2.1 (集合関係：黒岩-田中-Ha[19])**.** Y を線形位相空間、$\mathcal{V}$ を Y の空でない部分集合の族とする。$A,\, B \in \mathcal{V}$ と、solid な閉凸錐 $C \subset Y$ に対して、以下の集合関係を定義する。

[**lower**] $A \leq_C^l B$ by $B \subset A + C$ (**type 3**)

[**upper**] $A \leq_C^u B$ by $A \subset B - C$ (**type 5**)

[**lower** & **upper**] $A \leq_C^{l\&u} B$ by $B \subset A + C$ and $A \subset B - C$

注意 1. ベクトル順序と集合順序はさまざまな違いがある。ベクトル順序の場合、$x, y \in Y$ と $C \subset Y$ に対して

$$y - x \in C \ (x \leq_C y) \iff y \in x + C \iff x \in y - C$$

である。一方、集合順序の場合、$A, B \in \mathcal{V}$ と $C \subset Y$ に対して、上記の真ん中と右の順序に対応する $B \subset A + C$ $(A \leq_C^l B)$ と $A \subset B - C$ $(A \leq_C^u B)$ は一般に異なる（[2] を参照）。

例 1 ([17])**.** 集合の特別な場合として、「区間」を考える。

$$Y = \mathbb{R}, \quad C = \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \qquad A = [a_1, a_2], \quad B = [b_1, b_2] \quad (a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$$

このとき、$\leq_C^l$、$\leq_C^u$ について次が分かる。

$$A \leq_C^l B \iff a_1 \leq b_1, \qquad A \leq_C^u B \iff a_2 \leq b_2$$

$$A \leq_C^{l\&u} B \iff a_1 \leq b_1 \quad \text{and} \quad a_2 \leq b_2$$

命題 2.2 ([2, 5])**.** $A, B, D \in \mathcal{V}$、$\alpha \geq 0$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \leq_C^{l[u]} B \implies A + D \leq_C^{l[u]} B + D$

(ii) $A \leq_C^{l[u]} B \implies \alpha A \leq_C^{l[u]} \alpha B$

(iii) $\leq_C^l$ と $\leq_C^u$ は、反射律と推移律が成り立つ。

(iv) $A \leq_C^u b \Longrightarrow A \leq_C^l b$

(v) $a \leq_C^l B \Longrightarrow a \leq_C^u B$

定義 2.3 (C-proper：Hernandez-Rodriguez-Marin[15])**.** $A \in \mathcal{V}$ が C-proper $[(-C)$-proper$]$ であるとは、$A + C \neq Y[A - C \neq Y]$ が成り立つときである。また、$\mathcal{V}_C[\mathcal{V}_{-C}]$ を Y の C-proper $[(-C)$-proper$]$ である部分集合の族とする。

定義 2.4 (Luc[20])**.** $A \in \mathcal{V}$ とする。

(i) A が C-closed $[(-C)$-closed$]$ であるとは、$A + C$ $[A - C]$ が閉集合であることと定義する。

(ii) A が C-有界 $\left[(-C)\text{-有界}\right]$ であるとは、それぞれの Y の近傍 U に対して、次を満たすような正の数 $t>0$ が存在するときである。

$$A \subset tU + C \quad [A \subset tU - C]$$

(iii) A が C-compact $\left[(-C)\text{-compact}\right]$ であるとは、A が C-closed かつ C-有界 $[(-C)$-closed かつ $(-C)$-有界$]$ であるときである。

C-proper、$(-C)$-proper、C-closed、$(-C)$-closed である Y の部分集合族を $\mathcal{V}_{\pm}$、C-proper、$(-C)$-proper、C-compact、$(-C)$-compact である Y の部分集合族を $\mathcal{C}_{\pm}$ と書く。

注意 2. ベクトル順序 $\leq_C$ と $\leq_{\mathrm{int}C}$ は明らかに異なる。しかし、集合における順序の場合について、$\leq_C^l$ と $\leq_{\mathrm{int}C}^l$ が同値になることもある。よって、$\leq_C^l$ と $\leq_{\mathrm{int}C}^l$ を区別したいとき、集合 A に C-closed の仮定が必要となる（[2] を参照)。

定義 2.5. $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ とする。$\mathcal{V}$ に次のような同値関係を導入する。

$$V_1 \sim_l V_2 \Longleftrightarrow V_1 \leq_C^l V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq_C^l V_1$$

$$V_1 \sim_u V_2 \Longleftrightarrow V_1 \leq_C^u V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq_C^u V_1$$

$$V_1 \sim_{l\&u} V_2 \Longleftrightarrow V_1 \leq_C^{l\&u} V_2 \quad \text{and} \quad V_2 \leq_C^{l\&u} V_1$$

同値類の集合をそれぞれ $[\cdot]^l$、$[\cdot]^u$、$[\cdot]^{l\&u}$ と書く。同値関係の定義より次が分かる。

$$A \in [B]^l \Leftrightarrow A + C = B + C$$

$$A \in [B]^u \Leftrightarrow A - C = B - C$$

$$A \in [B]^{l\&u} \Leftrightarrow A + C = B + C \quad \text{and} \quad A - C = B - C$$

定義 2.6. $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ とする。$A \in \mathcal{S}$ が $l[u,\ l\&u]$-weak minimal element であるとは、任意の $B \in \mathcal{S}$ について

$$B \leq_{\mathrm{int}C}^{l[u,l\&u]} A \quad \Longrightarrow \quad A \leq_{\mathrm{int}C}^{l[u,l\&u]} B$$

が成り立つ要素である。$\mathcal{S}$ の $l[u, l\&u]$-weak minimal element の族を $l[u, l\&u]$-wMin$(\mathcal{S}; C)$ と書く。同様にして、$A \in \mathcal{S}$ が weak maximal element であるとは、任意の $B \in \mathcal{S}$ について

$$A \leq_{\mathrm{int}C}^{l[u,l\&u]} B \quad \Longrightarrow \quad B \leq_{\mathrm{int}C}^{l[u,l\&u]} A$$

が成り立つ要素である。$\mathcal{S}$ の weak maximal element の族を $l[u, l\&u]$-wMax$(\mathcal{S}; C)$ と書く。

3　集合のスカラー化手法

3.1　ベクトルのスカラー化関数

この節では、$k^0 \in C \setminus (-C)$ とする。1980 年代に Gerstewitz [9] は、ベクトル最適化問題において以下のような非線形スカラー化関数（Gerstewitz の関数）を提案した。

$$\varphi_{C,k^0} : Y \to (-\infty, \infty], \quad \varphi_{C,k^0}(y) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \leq_C tk^0\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \in tk^0 - C\}$$

Gerstewitz の関数は、特別な場合として線形スカラー化を含むことが知られている。その後彼らは [10] で、 ベクトル最適化問題における Gerstewitz の関数の本質的な性質（順序保存性・劣線形性など）を導いた。上記の Gerstewitz の関数は、双対となる以下の形に変形できる、

$$\psi_{C,k^0} : Y \to [-\infty, \infty), \quad \psi_{C,k^0}(y) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 \leq_C y\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \in tk^0 + C\}$$

$$\varphi_{C,k^0}(y) = -\psi_{C,k^0}(-y)$$

これらの関数は、Pareto 最適解の特徴付などベクトル最適化問題において幅広い応用を持つ。(Luc [20], Göpfert-Riahi-Tammer-Zălinescu [11])

その後、筆者は [1] で以下のようなベクトル最適化問題における非線形の 2 変数の下限型関数 $h_{\inf} : Y \times Y \to (-\infty, \infty]$ と上限型関数 $h_{\sup} : Y \times Y \to [-\infty, \infty)$ を調査した。

$$h_{\inf}(y, a) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \leq_C tk^0 + a\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \in tk^0 + a - C\}$$

$$h_{\sup}(y, a) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 + a \leq_C y\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \in tk^0 + a + C\}$$

もちろん、関数 $h_{\inf}, h_{\sup}$ は Gerstewitz の関数の拡張である ($h_{\inf}(y, a) := \varphi_{C,k^0}(y-a)$、$a, y \in Y$)。さらに、次も分かる。

$$h_{\sup}(y, a) = -h_{\inf}(-y, -a)$$

3.2 集合のスカラー化関数

ここで、ベクトルのスカラー化関数 $h_{\inf}, h_{\sup}$ を集合の場合に拡張することを考える。集合のスカラー化手法の研究は 2000 年代に始まった。この研究の草分け的な存在である 2000 年代初頭の田中-Georgiev[7, 8] から始まり、2000 年代後半に [13, 15] の重要な研究があった。筆者は、2010 年代に以下の関数の詳細な性質を調べる研究を始めた。$\inf \emptyset = \infty$ と $\sup \emptyset = -\infty$ を認めることにより、

$$h^l_{\inf}, h^u_{\inf}, h^l_{\sup}, h^u_{\sup} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to [-\infty, \infty]$$

を次のように定義する。関数 $h^l_{\inf}, h^u_{\inf}, h^l_{\sup}, h^u_{\sup}$ は、経済学における効用関数の役割を果たしている。

$$h^l_{\inf}(V_1, V_2) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,\Big|\, V_1 \leq^l_C tk^0 + V_2\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 + V_2 \subset V_1 + C\}$$

$$h^u_{\inf}(V_1, V_2) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_1 \leq^u_C tk^0 + V_2\} = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_1 \subset tk^0 + V_2 - C\}$$

$$h^l_{\sup}(V_1, V_2) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,\Big|\, tk^0 + V_2 \leq^l_C V_1\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_1 \subset tk^0 + V_2 + C\}$$

$$h^u_{\sup}(V_1, V_2) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 + V_2 \leq^u_C V_1\} = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 + V_2 \subset V_1 - C\}$$

現在、集合のスカラー化手法の研究は実に幅広い研究がなされている ([2, 3, 6, 12] やその参考文献を見よ)。

命題 3.1 ([2, 3])**.** 上記のスカラー化関数について、次が成り立つ。

(i) $h^l_{\sup}(V_1, V_2) = -h^u_{\inf}(-V_1, -V_2)$

(ii) $h^u_{\sup}(V_1, V_2) = -h^l_{\inf}(-V_1, -V_2)$

(iii) $h^l_{\inf}(V_1, V_2) = h^u_{\inf}(-V_2, -V_1)$ *and* $h^u_{\inf}(V_1, V_2) = h^l_{\inf}(-V_2, -V_1)$

(iv) $h^l_{\sup}(V_1, V_2) = h^u_{\sup}(-V_2, -V_1)$ *and* $h^u_{\sup}(V_1, V_2) = h^l_{\sup}(-V_2, -V_1)$

l 型と u 型は、双対の関係になっている。よって、l 型と u 型についての集合に対するスカラー化関数は、ベクトルの場合とは異なり、$h^l_{\inf}$ と $h^u_{\inf}$ の 2 つを調べる必要がある。

命題 3.2 ([5])**.** $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathcal{V}$、$\alpha \geq 0$ とする。inf 型スカラー化関数について、次が成り立つ。

(i) $h^l_{\inf}(V_1, V_2) \leq t \Longleftrightarrow tk^0 + V_2 \subset \mathrm{cl}(V_1 + C)$

(ii) $h^u_{\inf}(V_1, V_2) \leq t \Longleftrightarrow V_1 \subset \mathrm{cl}(tk^0 + V_2 - C)$

(iii) $h^l_{\inf}(V_1 + C, V_2 + C) = h^l_{\inf}(V_1, V_2)$ *and* $h^u_{\inf}(V_1 - C, V_2 - C) = h^u_{\inf}(V_1, V_2)$

(iv) $V_2 \in [V_1]^l$ ならば、$h^l_{\inf}(V_2, V_1) = h^l_{\inf}(V_1, V_2)$ が成り立つ。

(v) $V_2 \in [V_1]^u$ ならば、$h^u_{\inf}(V_2, V_1) = h^u_{\inf}(V_1, V_2)$ が成り立つ。

(vi) $h^l_{\inf}(V_1 + V_2, V_3 + V_4) \leq h^l_{\inf}(V_1, V_3) + h^l_{\inf}(V_2, V_4)$ *and*
$h^u_{\inf}(V_1 + V_2, V_3 + V_4) \leq h^u_{\inf}(V_1, V_3) + h^u_{\inf}(V_2, V_4)$

(vii) $h^l_{\inf}(\alpha V_1, \alpha V_2) = \alpha h^l_{\inf}(V_1, V_2)$ *and* $h^u_{\inf}(\alpha V_1, \alpha V_2) = \alpha h^u_{\inf}(V_1, V_2)$

命題 3.3 ([5])**.** $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathcal{V}$、$\alpha \geq 0$ とする。sup 型スカラー化関数について、次が成り立つ。

(i) $h^l_{\sup}(V_1, V_2) \geq t \Longleftrightarrow V_1 \subset \mathrm{cl}(tk^0 + V_2 + C)$

(ii) $h^u_{\sup}(V_1, V_2) \geq t \Longleftrightarrow tk^0 + V_2 \subset \mathrm{cl}(V_1 - C)$

(iii) $h^l_{\sup}(V_1 + C, V_2 + C) = h^l_{\sup}(V_1, V_2)$ *and* $h^u_{\sup}(V_1 - C, V_2 - C) = h^u_{\sup}(V_1, V_2)$

(iv) $V_2 \in [V_1]^l$ ならば、$h^l_{\sup}(V_2, V_1) = h^l_{\sup}(V_1, V_2)$ が成り立つ。

(v) $V_2 \in [V_1]^u$ ならば、$h^u_{\sup}(V_2, V_1) = h^u_{\sup}(V_1, V_2)$ が成り立つ。

(vi) $h^l_{\sup}(V_1 + V_2, V_3 + V_4) \geq h^l_{\sup}(V_1, V_3) + h^l_{\sup}(V_2, V_4)$ *and*
$h^u_{\sup}(V_1 + V_2, V_3 + V_4) \geq h^u_{\sup}(V_1, V_3) + h^u_{\sup}(V_2, V_4)$

(vii) $h^l_{\sup}(\alpha V_1, \alpha V_2) = \alpha h^l_{\sup}(V_1, V_2)$ *and* $h^u_{\sup}(\alpha V_1, \alpha V_2) = \alpha h^u_{\sup}(V_1, V_2)$

命題 3.2、3.3 におけるスカラー化関数の性質は、本稿の主結果である定理 4.2、4.4 を示すのに重要な役割を果たす。

3.3 集合関係とスカラーの変換定理

前節で定義した集合のスカラー化関数の性質を調べることで、集合関係とスカラーの変換定理を得ることが出来る。尚、この節の結果については [2] で最初に触れられているが、誤りがいくつかあったので、[3] でその訂正版を発表した。

定理 3.4 (l**-inf 型** [3])**.** $C \subset Y$ を *solid* な閉凸錐、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。

(i) もし $V_1 \in \mathcal{V}_C$ が C-*closed*、 $V_2 \in \mathcal{V}$ ならば、次が言える。

$$V_2 \subset V_1 + C \Longleftrightarrow h^l_{\inf}(V_1, V_2) \leq 0$$

(ii) さらに、$V_1 \in \mathcal{V}_C$、$V_2 \in \mathcal{V}$ が C-*compact* ならば、次が言える。

$$V_2 \subset V_1 + \mathrm{int}C \Longleftrightarrow h^l_{\inf}(V_1, V_2) < 0$$

定理 3.5 (u-inf 型 [3]). $C \subset Y$ を *solid* な閉凸錐、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。

(i) もし $V_1 \in \mathcal{V}$、$V_2 \in \mathcal{V}_{-C}$ が $(-C)$-*closed* ならば、次が言える。

$$V_1 \subset V_2 - C \Longleftrightarrow h^u_{\inf}(V_1, V_2) \leq 0$$

(ii) さらに、$V_1 \in \mathcal{V}$ が $(-C)$-*compact*、$V_2 \in \mathcal{V}_{-C}$ ならば、次が言える。

$$V_1 \subset V_2 - \mathrm{int}C \Longleftrightarrow h^u_{\inf}(V_1, V_2) < 0$$

定理 3.6 (l-sup 型 [3]). $C \subset Y$ を *solid* な閉凸錐、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。

(i) もし $V_1 \in \mathcal{V}$、$V_2 \in \mathcal{V}_C$ が C-*closed* ならば、次が言える。

$$V_1 \subset V_2 + C \Longleftrightarrow h^l_{\sup}(V_1, V_2) \geq 0$$

(ii) さらに、$V_1 \in \mathcal{V}$ が C-*compact* で、$V_2 \in \mathcal{V}_C$ ならば、次が言える。

$$V_1 \subset V_2 + \mathrm{int}C \Longleftrightarrow h^l_{\sup}(V_1, V_2) > 0$$

定理 3.7 (u-sup 型 [3]). $C \subset Y$ を *solid* な閉凸錐、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。

(i) もし $V_1 \in \mathcal{V}_{-C}$ が $(-C)$-*closed* で、$V_2 \in \mathcal{V}$ ならば、次が言える。

$$V_2 \subset V_1 - C \Longleftrightarrow h^u_{\sup}(V_1, V_2) \geq 0$$

(ii) さらに、$V_1 \in \mathcal{V}_{-C}$ で、$V_2 \in \mathcal{V}$ が $(-C)$-*compact* ならば、次が言える。

$$V_2 \subset V_1 - \mathrm{int}C \Longleftrightarrow h^u_{\sup}(V_1, V_2) > 0$$

注意 3. 上記の変換定理は、集合鞍点の存在定理 [3] など応用範囲がとても広いことが最近の研究で判明している。これには、いくつかの注意点がある。

(a) 上記の 4 つの変換定理 (i) における「$\Longrightarrow$」の証明において、$V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ に仮定は不要である。
詳しくは、[2, 3] の他に、[18] の証明（定理 3.3、3.8）を参照のこと。

(b) 上記の 4 つの変換定理 (i) における「$\Longleftarrow$」の証明において、筆者は [6, 18] における集合の仮定「閉集合&有界」を「C-closed、$(-C)$-closed」へ緩めることに成功している。

$$\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0\},$$

$$\mathbb{R}^n_{++} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0, x_2 > 0, ..., x_n > 0\},$$

$$Y = \mathbb{R}^2, \qquad C = \mathbb{R}^2_+, \qquad V = \mathbb{R}^2_{++} \cup \{(0,0)\}$$

[6] の「仮定 2.4」では、$A, B \in \mathcal{V}$ は閉集合、かつ有界であると仮定している。しかし、上の例で V は C-closed であることが分かるが、V は閉集合ではないし、有界でもない。

(c) 変換定理 (i) の特別な場合として、$V_2 = \{0_Y\}$ としたときのことを考える。

(誤) $0_Y \in V_1 + C \iff h^l_{\inf}(V_1) \le 0$ （[2] 参照）

(正) $0_Y \in \mathrm{cl}(V_1 + C) \iff h^l_{\inf}(V_1) \le 0$ （[4, 12] 参照）

集合 V_1 に C-closed の仮定は必要である。以下のように設定する。

$$Y = \mathbb{R}^2, \quad C = \mathbb{R}^2_+, \quad k^0 = (1, 1), \quad V = \{(x, y) \mid y \le -\frac{1}{x},\ x > 0\}$$

すると、

$$h^l_{\inf}(V) \le 0 \iff 0_Y \in V + C$$

は間違いであることが確認できる。なぜなら、$V + C = \{(x, y) \mid x > 0\}$ は 0_Y を含まない開集合だからである。

(d) 上記の 4 つの変換定理の (ii) の証明は、[12] を参考にして [2] を全面的に修正・改良したものである。[12] では集合に「compact」を仮定しているが、**筆者は [3] において集合の仮定を「C-compact、$(-C)$-compact」へ緩めることに成功している。**

4 主な結果

集合最適化問題には、まだ未解決の問題がたくさんある。その一つは、l 型・u 型の集合関係に依らない解の概念を定式化することである。重み付き集合関係 [6] は、この新しい順序関係にあるパラメーターを制御することによって、実務家が l 型・u 型両方の間をスムーズに移行する（最悪または最良の場合）ことが可能になる。

本稿では、[6] が提案した重み付き集合関係の詳細な性質を調べる。

定義 4.1 (重み付き集合関係：Chen-Köbis-Köbis-Yao [6])**.** $C \subset Y$ を solid な閉凸錐、$\lambda \in [0, 1]$、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。$A, B \in \mathcal{V}$ に対して、次の集合関係を定義する。

$$A \preceq^{\lambda,k^0}_{\inf} B \iff \lambda h^l_{\inf}(A, B) + (1 - \lambda) h^u_{\inf}(A, B) \le 0$$

$$A \prec^{\lambda,k^0}_{\inf} B \iff \lambda h^l_{\inf}(A, B) + (1 - \lambda) h^u_{\inf}(A, B) < 0$$

注意 4 ([6])**.** $\lambda = 0$ のときは、前述の集合関係とスカラーの変換定理から、$A \preceq^{\lambda,k^0}_{\inf} B \iff A \le^u_C B$ となる。$\lambda = 1$ のときは、同様に変換定理から $A \preceq^{\lambda,k^0}_{\inf} B \iff A \le^l_C B$ となる。もし、$A \le^l_C B$ と $A \le^u_C B$ が成り立つならば、$A \preceq^{\lambda,k^0}_{\inf} B$ は任意の $\lambda \in [0, 1]$ で成り立つ。逆は成り立たないことに注意する。その事実が、重み付き集合関係 $\preceq^{\lambda,k^0}_{\inf}$ を導入する目的である。パラメータ λ は集合関係 $\le^l_C$、$\le^u_C$ の重要度を示す「重み係数」を提供している。

[6] では、以下の定理における性質 (ii)、(iii) を調査している。本稿では、重み付き集合関係の新たな性質について調査する。

定理 4.2 ([5])**.** $C \subset Y$ を *solid* な閉凸錐、$\lambda \in [0, 1]$、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。すると、$A, B \in \mathcal{V}$、$\alpha \ge 0$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \preceq^{\lambda,k^0}_{\inf} B \Longrightarrow A + D \preceq^{\lambda,k^0}_{\inf} B + D$

(ii) $A \preceq_{\inf}^{\lambda,k^0} B \Longrightarrow \alpha A \preceq_{\inf}^{\lambda,k^0} \alpha B$

(iii) $\preceq_{\inf}^{\lambda,k^0}$ は、反射律と推移律が成り立つ。

(iv) $\prec_{\inf}^{\lambda,k^0}$ は、推移律が成り立つ。

(v) もし、$A \in \mathcal{V}_C$ が C-*closed* で、$B \in \mathcal{V}_{-C}$ が $(-C)$-*closed* ならば、$A \leq_C^{l\&u} B \Longrightarrow A \preceq_{\inf}^{\lambda,k^0} B$ である。

(vi) もし、$A \in \mathcal{V}_C$ が $(-C)$-*compact* で、$B \in \mathcal{V}_{-C}$ が C-*compact* ならば、
$A \leq_{\mathrm{int}C}^{l\&u} B \Longrightarrow A \prec_{\inf}^{\lambda,k^0} B$ である。

Proof. 詳細は [5] を参照のこと。命題 3.2 を利用することで、定理 4.2 の性質 (i)、(ii)、(iii)、(iv) を示すことが出来る。(v)、(vi) は、集合関係とスカラーの変換定理を利用すると容易に示せる。 □

（コメント）[6] では、性質 (i) については調べられていない。性質 (i) は少しだけ証明に技巧を要するので、[6] の著者は気付かなかったのかも知れない。しかし、l 型・u 型では性質 (i) が成り立ち、さらには l 型・u 型のスカラーへの変換定理が存在することから、性質 (i) が成り立つことは自然なことだと筆者は考えている。

[6] から、私たちは sup 型スカラー化関数を利用した次の集合関係を提案する。

定義 4.3 ([5])**.** $C \subset Y$ を solid な閉凸錐、$\lambda \in [0,1]$、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。$A, B \in \mathcal{V}$ に対して、次の集合関係を定義する。

$$A \preceq_{\sup}^{\lambda,k^0} B \iff \lambda h_{\sup}^{l}(A,B) + (1-\lambda) h_{\sup}^{u}(A,B) \geq 0$$

$$A \prec_{\sup}^{\lambda,k^0} B \iff \lambda h_{\sup}^{l}(A,B) + (1-\lambda) h_{\sup}^{u}(A,B) > 0$$

定理 4.4 ([5])**.** $C \subset Y$ を *solid* な閉凸錐、$\lambda \in [0,1]$、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。すると、$A, B \in \mathcal{V}$、$\alpha \geq 0$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \preceq_{\sup}^{\lambda,k^0} B \Longrightarrow A + D \preceq_{\sup}^{\lambda,k^0} B + D$

(ii) $A \preceq_{\sup}^{\lambda,k^0} B \Longrightarrow \alpha A \preceq_{\sup}^{\lambda,k^0} \alpha B$

(iii) $\preceq_{\sup}^{\lambda,k^0}$ は、反射律と推移律が成り立つ。

(iv) $\prec_{\sup}^{\lambda,k^0}$ は、推移律が成り立つ。

(v) もし、$A \in \mathcal{V}_{-C}$ が $(-C)$-*closed* で、$B \in \mathcal{V}_C$ が C-*closed* ならば、$B \leq_C^{l\&u} A \Longrightarrow A \preceq_{\sup}^{\lambda,k^0} B$ が成り立つ。

(vi) もし、$A \in \mathcal{V}_{-C}$ が C-*compact* で、$B \in \mathcal{V}_C$ が $(-C)$-*compact* ならば、
$B \leq_{\mathrm{int}C}^{l\&u} A \Longrightarrow A \prec_{\sup}^{\lambda,k^0} B$ が成り立つ。

Proof. 命題 3.3 を利用することで、求める結果が得られる。 □

命題 4.5 ([5])**.** 重み付き集合関係について、次が成り立つ。

$$A \preceq_{\inf}^{\lambda,k^0} B \iff -B \preceq_{\inf}^{1-\lambda,k^0} -A \iff -A \preceq_{\sup}^{1-\lambda,k^0} -B \iff B \preceq_{\sup}^{\lambda,k^0} A$$

（コメント）上記の命題から、$\preceq_{\inf}^{\lambda,k^0}$ と $\preceq_{\sup}^{\lambda,k^0}$、$\preceq_{\inf}^{\lambda,k^0}$ と $\preceq_{\inf}^{1-\lambda,k^0}$ はそれぞれ「双対の関係」になっていることが分かる。重み付き集合関係の反対称律についての特徴づけについては、まだ未解決である。

重み付き集合関係は反射律・推移律が成り立つので、定義 2.6 と同様に解の概念を考えることができる。

定義 4.6. ($\preceq_{\inf}^{\lambda,k^0}$-minimal, maximal、$\prec_{\inf}^{\lambda,k^0}$-minimal, maximal element [5]) $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ とする。$\bar{A} \in \mathcal{S}$ が $\preceq_{\inf}^{\lambda,k^0}$-minimal [maximal] element であるとは、任意の $A \in \mathcal{S}$ に対して、次の関係が成り立つ要素である。

$$A \preceq_{\inf}^{\lambda,k^0} \bar{A} \quad \Longrightarrow \quad \bar{A} \preceq_{\inf}^{\lambda,k^0} A \qquad [\bar{A} \preceq_{\inf}^{\lambda,k^0} A \quad \Longrightarrow \quad A \preceq_{\inf}^{\lambda,k^0} \bar{A}]$$

さらに、$\bar{A} \in \mathcal{S}$ が $\prec_{\inf}^{\lambda,k^0}$ minimal [maximal] element であるとは、任意の $A \in \mathcal{S}$ に対して、次の関係が成り立つ要素である。

$$A \prec_{\inf}^{\lambda,k^0} \bar{A} \quad \Longrightarrow \quad \bar{A} \prec_{\inf}^{\lambda,k^0} A \qquad [\bar{A} \prec_{\inf}^{\lambda,k^0} A \quad \Longrightarrow \quad \bar{A} \prec_{\inf}^{\lambda,k^0} A]$$

$\mathcal{S}$ の $\preceq_{\inf}^{\lambda,k^0}$-minimal [maximal] element の族を $\mathrm{Min}(\mathcal{S}; \preceq_{\inf}^{\lambda,k^0})$ [$\mathrm{Max}(\mathcal{S}; \preceq_{\inf}^{\lambda,k^0})$]、$\mathcal{S}$ の $\prec_{\inf}^{\lambda,k^0}$-minimal [maximal] elements の族を $\mathrm{wMin}(\mathcal{S}; \prec_{\inf}^{\lambda,k^0})$ [$\mathrm{wMax}(\mathcal{S}; \prec_{\inf}^{\lambda,k^0})$] と書く。

命題 4.5 と集合関係とスカラーの変換定理を利用することにより、 次の関係が分かる。

命題 4.7 ([5])**.** 重み付き集合関係について、次のことが分かる。

(i) もし、$\mathcal{S} \subset \mathcal{V}_{\pm}$ ならば、次の包含関係が言える。
$l\&u$-$\mathrm{Min}(\mathcal{S}; C) \subset \mathrm{Min}(\mathcal{S}; \preceq_{\inf}^{\lambda,k^0})$、 $l\&u$-$\mathrm{Min}(\mathcal{S}; C) \subset \mathrm{Max}(\mathcal{S}; \preceq_{\sup}^{\lambda,k^0})$。

(ii) もし、$\mathcal{S} \subset \mathcal{C}_{\pm}$ ならば、次の包含関係が言える。
$l\&u$-$\mathrm{wMin}(\mathcal{S}; \mathrm{int}C) \subset \mathrm{wMin}(\mathcal{S}; \prec_{\inf}^{\lambda,k^0})$、$l\&u$-$\mathrm{wMin}(\mathcal{S}; \mathrm{int}C) \subset \mathrm{wMax}(\mathcal{S}; \prec_{\sup}^{\lambda,k^0})$。

(iii) $\mathrm{Min}(\mathcal{S}; \preceq_{\inf}^{\lambda,k^0}) = \mathrm{Max}(\mathcal{S}; \preceq_{\sup}^{\lambda,k^0})$、$\mathrm{Min}(\mathcal{S}; \preceq_{\sup}^{\lambda,k^0}) = \mathrm{Max}(\mathcal{S}; \preceq_{\inf}^{\lambda,k^0})$。

(iv) $\mathrm{wMin}(\mathcal{S}; \prec_{\inf}^{\lambda,k^0}) = \mathrm{wMax}(\mathcal{S}; \prec_{\sup}^{\lambda,k^0})$、$\mathrm{wMin}(\mathcal{S}; \prec_{\sup}^{\lambda,k^0}) = \mathrm{wMax}(\mathcal{S}; \prec_{\inf}^{\lambda,k^0})$。

5　まとめと今後の課題

本稿では、重み付き集合関係 $\preceq_{\inf}^{\lambda,k^0}$、$\preceq_{\sup}^{\lambda,k^0}$ の性質やその関係性について調査した。集合関係とスカラーの変換定理を利用する（集合に適切な条件を付け加える）ことで、$\preceq_{\inf}^{\lambda,k^0}$、$\preceq_{\sup}^{\lambda,k^0}$ が応用上重要な $\leq_C^{l\&u}$ を含むことが分かった。さらに、定理 4.2、4.4 から、$\preceq_{\inf}^{\lambda,k^0}$、$\preceq_{\sup}^{\lambda,k^0}$ は $\leq_C^l$、$\leq_C^u$、$\leq_C^{l\&u}$ と同じ順序構造を持っていることが分かった。また、$\preceq_{\inf}^{\lambda,k^0}$ と $\preceq_{\sup}^{\lambda,k^0}$ は、双対の関係であることも判明している (命題 4.5、4.7)。

上記の事実から重み付き集合関係の有用性が示された訳だが、次の課題として、重み付き集合関係の定義にある λ をどのように決めるか？という問がある。この問題は「データの分布」に大きく依存していて、これは「統計学」の問題である。最適化の研究では、確率・統計学との融合研究も数多くあり、集合最適化問題の研究についても、統計学との融合を考えるべきときにあるのかも知れない。

参考文献

[1] Y. Araya, *Nonlinear scalarizations and some applications in vector optimization*, Nihonkai Math. J. 21 (2010) 35–45.

[2] Y. Araya, *Four types of nonlinear scalarizations and some applications in set optimization*, Nonlinear Anal. 75 (2012) 3821–3835.

[3] Y. Araya, *Existence theorems of cone saddle-points in set optimization applying nonlinear scalarizations*, Linear Nonlinear Anal. 6 (2020) 13–33.

[4] Y. Araya, *Some types of minimal element theorems and Ekeland's variational principles in set optimization*, Linear Nonlinear Anal. 6 (2020) 187–204.

[5] Y. Araya, *On the ordinal structure of the weighted set relation*, Nihonkai Math. J. 32 (2021) 91–105.

[6] J. Chen, E. Köbis, M. A. Köbis, J. Yao, *A new set order relation in set optimization*, J. Nonlinear Convex Anal. 18 (2017) 637–649.

[7] P. G. Georgiev, T. Tanaka, *Vector-valued set-valued variants of Ky Fan's inequality*, J. Nonlinear Convex Anal. 1 (2000) 245–254.

[8] P. G. Georgiev, T. Tanaka, *Fan's inequality for set-valued maps*, Proceedings of the Third World Congress of Nonlinear Analysts, Part 1 (Catania, 2000), Nonlinear Anal. 47 (2001) 607–618.

[9] C. Gerstewitz *Nichtkonvexe Dualitt in der Vektoroptimierung.* (*German*) [*Nonconvex duality in vector optimization*], Wiss. Z. Tech. Hochsch. Leuna-Merseburg, 25 (1983) 357–364.

[10] C. Gerth, P. Weidner, *Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization*, J. Optim. Theory Appl. 67 (1990) 297–320.

[11] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, and C. Zălinescu *Variational methods in partially ordered spaces*, Springer-Verlag, New York (2003).

[12] C. Gutierrez, B. Jimenez, B, E. Miglierina and E. Molho, *Scalarization in set optimization with solid and nonsolid ordering cones*, J. Global Optim. 61 (2015) 525–552.

[13] A. Hamel, A. Löhne, *Minimal element theorems and Ekeland's principle with set relations*, J. Nonlinear and Convex Anal. 7 (2006) 19–37.

[14] A. Hamel, F. Heyde, A. Löhne, B. Rudloff, C. Schrage, *Set optimization—a rather short introduction*, Set optimization and applications—the state of the art, 65–141, Springer Proc. Math. Stat., 151, Springer, Heidelberg, 2015.

[15] E. Hernández, L. Rodríguez-Marín, *Nonconvex scalarization in set-optimization with set-valued maps*, J. Math. Anal. Appl. 325 (2007) 1–18.

[16] J. Ide, E. Köbis, D. Kuroiwa, A. Schöbel, C. Tammer, *The relationship between multi-objective robustness concepts and set-valued optimization*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:83, 20.

[17] J. Jahn, T.X.D. Ha, *New order relations in set optimization*, J. Optim. Theory Appl. 148 (2011) 209–236.

[18] E. Köbis, M. A. Köbis, *Treatment of set order relations by means of a nonlinear scalarization functional: a full characterization*, Optimization 65 (2016) 1805–1827.

[19] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T.X.D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal. 30 (1997) 1487–1496.

[20] D. T. Luc, *Theory of vector optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 319, Springer-Verlag, Berlin (1989).

[21] A. L. Peressini *Ordered topological vector spaces*, Harper & Row, Publishers, New York-London 1967.