Gabriel の定理の τ 傾理論における一般化と そのクラスター代数的アプローチ

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
行田康晃 (Yasuaki GYODA)

1 概要

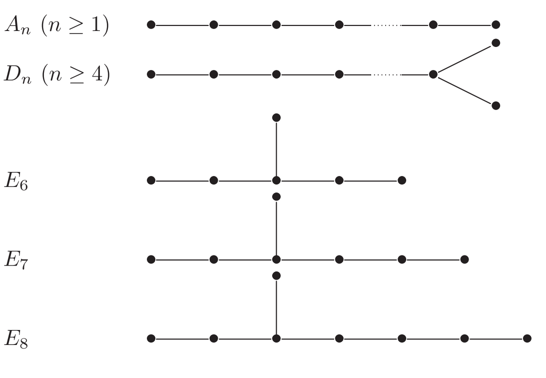
本稿では，論文 [9] の結果を多元環の表現論の視点で解説する．特に，多元環の表現論における 1 つの到達点である Gabriel の定理を，団代数理論を用いて拡張することを考える．Gabriel の定理とは道代数における有限型の分類に関する以下の定理である．

定理 1.1 ([8])**.** K を体とする．

(1) Q が連結な箙であるとき．道代数 KQ が有限表現型であることと Q が A, D, E 型のいずれかの箙であることは同値である．

(2) Q が A, D, E 型のいずれかの箙であるとき，KQ の直既約加群の同型類の個数は Q の矢の向きに依存せず，そのグラフのみから決まる．

ただし，A, D, E 型のグラフとは以下の図におけるいずれかのグラフのことであり，A, D, E 型の箙とはこれらのグラフの各辺に向きがついたものである．



この定理は 1972 年に Gabriel によって証明されたのち，Bernstein, Gel'fand, Ponomalev [2] が KQ と Q の 1 つの沈点や源点に出入りする矢印の向きを全て入れ替えた箙 Q' による道代数 KQ' の加群圏を比較する方法を用いて別の証明を与えている．本稿では，この定理を拡張した次の定理について説明する：

定理 1.2 ([9])**.** K を代数閉体とする．

(1) Q が連結な箙であるとき．団傾斜代数 KQ/I が有限表現型であることと Q が A, D, E 型のいずれかの箙に変異同値であることは同値である．

(2) $\Lambda = KQ/I$ と $\Lambda' = KQ'/I$ を有限表現型の団傾斜多元環とする．このとき，Q と Q' が沈点変異または源点変異で移り合うならば，任意の自然数 k に対して，直既約因子が k 個であるような Λ の基本 τ リジッド加群の同型類の個数と Λ' の基本 τ リジッド加群の同型類の個数は等しい．

団傾斜代数，変異同値，基本 τ リジッド加群などの定義は後の節で定義するが，定理 1.2 において Q がツリーとなる場合に制限すると団傾斜代数は道代数となり，これに加えて $k = 1$ を課すことで基本 τ リジッド加群は直既約加群に一致するので，定理 1.2 の特殊化として定理 1.1（の K が代数閉である場合）が与えられることをここでは述べておく．さらに，この定理 1.2 は実はさらに強い定理の系として得ることができる．この節ではそれらの定理を証明するのに使うアプローチ方法についてざっくりと述べることにする．

代数 Λ 上の基本 τ リジッド加群とは特定の条件を満たす直既約加群の直和で表される加群であるが，これらの加群を単体とみなし，この単体を全て集めてきて単体複体としたものを考える．これを Λ の **τ 傾単体複体**と呼ぶ．詳しい定義は後の節で述べるが，これらの単体は特に代数が遺伝的である場合に [12, 11] などによって調べられてきた単体複体である．τ 傾単体複体は，後年 [1] によってもっと対称性の高い単体複体である**台 τ 傾単体複体**の部分複体として得られることが判明した．そして，この台 τ 傾単体複体は団代数理論における**団複体**と一致していることが知られており，部分集合である τ 傾単体複体は団代数側では**正団複体**と呼ばれるものに対応している．したがって，τ リジッド加群の個数などの情報は，対応する正団複体の単体の数の情報に帰着される．これを利用して，代数上の加群の個数を団代数理論の観点から調べるのが本稿でおこなうアプローチ方法である．多元環の表現論の世界では，考える代数を Q によって与えられる代数 KQ から Q' によって与えられる KQ' に変えると，そこから与えられる加群たちは全く異なるものになってしまい τ 傾単体複体を比較することは難しい．一方で，団代数理論を用いて 2 つの τ 傾単体複体を記述すると，Q と Q' の間に特別な関係があるときはこれらの単体複体は 1 つの団複体から異なる部分複体を取り出したものとして見ることができ，比較も非常に簡単である．実はこれは [2] の与えた加群圏の部分圏の圏同値をさらに一般的な立場から見たようなものとなっており，この比較が定理 1.2 の本質であるといってよい．

次の節からは，団代数理論と τ 傾理論の基礎事項を述べたのちに，これらのアプローチについてさらに詳しく解説していくことにする．

2　団代数の基礎事項

団代数理論においては，シードと呼ばれる変数と箙のペアとそこから新しいシードを作る変異と呼ばれる操作が重要な役割を占める．まず，それらを導入するところから始める．

定義 2.1 ([7, Definition 2.3])**.** n 変数有理関数体を $\mathcal{F}$ とする．$\mathcal{F}$ の**ラベル付シード**を，次の条件を満たすペア $(\mathbf{x}, Q)$ として定義する．

- $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ は $\mathcal{F}$ の自由生成集合となる代数的独立な n 個の変数の組である．
- Q は頂点が n 個であり，ループやサイクル（下図）を含まない箙である．

$\mathbf{x}$ を (ラベル付の) **団**，その変数を**団変数**という．

これ以降，n 個の頂点にはそれぞれ 1 から n の自然数を対応させることにする．

定義 2.2. Q を箙とし，その頂点 j をとる．j 方向の**箙変異** $\mu_j(Q)$ を Q を用いて次の手順で定める．

(1) j に出入りする矢印を全部ひっくり返す．

(2) j に矢印が出入りする頂点のペア (i,k) とその間の矢印 $i \xrightarrow{b_{ij}} j \xrightarrow{b_{jk}} k$ ごとに，$i \xleftarrow{b_{ij}b_{jk}} k$ を追加．

(3) サイクルを取り除く．

以下に箙の変異の例を与える．

$$\begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l, "2"'] & 3 \arrow[l] \end{tikzcd} \quad \stackrel{\mu_2}{\longmapsto} \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "2"'] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[ll, bend right, "2"'] \end{tikzcd}$$

定義から，変異を源点や沈点で行うと，(2) 以降の手順がスキップされて結果的に変異に用いる頂点周りの矢を全て入れ替える操作となる．つまり，変異は [2] で用いられている「1 つの沈点に出入りする矢を全て入れ替える操作」の一般化となっている．

定義 2.3. $(Q, \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n))$ をシードとして，Q の一つの頂点 j をとる．j 方向の**団変異** $\mu_j(\mathbf{x})$ を，$(\mathbf{x}, Q)$ を用いて次のように定める．

$$x'_i = \begin{cases} x_i & \text{if } i \neq j \\ \dfrac{\displaystyle\prod_{1 \le i \le n} x_i^{\max(0,b_{ij})} + \prod_{1 \le i \le n} x_k^{\max(0,b_{ji})}}{x_j} & \text{if } i = j. \end{cases} \tag{2.1}$$

以下に団変異の例を与える．シードが $\begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l, "2"'] & 3 \arrow[l] \end{tikzcd}$ と $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ のペアの場合，

$$\mu_2(\mathbf{x}) = \left(x_1, \frac{x_1^2 + x_3}{x_2}, x_3 \right)$$

となる．これらを用いて，シード変異を定める．

定義 2.4. $(Q, \mathbf{x})$ をシードとして，Q の一つの頂点 j をとる．j 方向の**シード変異** $\mu_j(\mathbf{x}, Q)$ を，$(\mathbf{x}, Q)$ を用いて次のように定める．

$$\mu_j(\mathbf{x}, Q) = (\mu_j(\mathbf{x}), \mu_j(Q)). \tag{2.2}$$

これまでの例を組み合わせることで，

$$\begin{array}{ccc} \begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l, "2"'] & 3 \arrow[l] \end{tikzcd} & \stackrel{\mu_2}{\longmapsto} & \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "2"'] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[ll, bend right, "2"'] \end{tikzcd} \\ (x_1, x_2, x_3) & \stackrel{\mu_2}{\longmapsto} & \left(x_1, \dfrac{x_1^2 + x_3}{x_2}, x_3 \right) \end{array}$$

というシード変異が得られる．また μ_k は対合，つまり，$\mu_k \circ \mu_k(\mathbf{x}, Q) = (\mathbf{x}, Q)$ が成立することが直接計算によって確かめられる．ここから，$\mu_k(\mathbf{x}, Q) = (\mathbf{x}', Q')$ がシードとなることがわかる．

次に，$\mathbb{T}_n$ を任意の頂点から n 本の辺が伸びており，その各辺に $1, \ldots, n$ でラベル付けされるグラフであるとする．ここで，1 つの頂点から出る n 本の辺には全て違うラベルがついているようにする．このグラフ $\mathbb{T}_n$

のことを n-**正則木**と呼ぶ．$t, t' \in \mathbb{T}_n$ が ℓ でラベル付けされた辺で繋がっているとき，$t \overset{\ell}{\text{——}} t'$ のように表すものとする．

定義 2.5 ([7, Definition 2.9])**.** $\mathbb{T}_n$ と団全体の間の**団パターン**を，任意の $t \overset{\ell}{\text{——}} t'$ を満たす $\mathbb{T}$ の頂点 t, t' に対して，ラベル付けされたシード $\Sigma_t = (\mathbf{x}_t, Q_t), \Sigma'_t = (\mathbf{x}_{t'}, Q_{t'})$ を互いに ℓ 方向のシード変異で移り合うような $\mathbb{T}_n$ の頂点と団の間の対応と定義する．また，$\mathbf{x}_t$ の元を $\mathbf{x}_t = (x_{1;t}, \dots, x_{n;t})$ と表すことにする．

ここで，上のような団パターンを構成するためには $\mathbb{T}_n$ の頂点 t_0 を 1 つ選んでそこにシード $(\mathbf{x}, Q)$ を 1 つ対応させ，そこから変異と $\mathbb{T}_n$ の辺の対応を使って帰納的に $\mathbb{T}_n$ の頂点とシードの対応を定めていくという方法が考えられる．そこで，この頂点 t_0 に付随するシード Σ_{t_0} を**初期シード**と呼ぶ．団代数は，このシードに含まれる団変数によって生成される部分代数として定義される．

定義 2.6 ([7, Definition 2.11])**.** 任意に初期シード $(\mathbf{x}, Q)$ とその団パターンが与えられたとき，

$$\mathcal{X}(Q) = \bigcup_{t \in \mathbb{T}_n} \mathbf{x}_t = \{x_{i;t} : t \in \mathbb{T}_n, 1 \leq i \leq n\}, \tag{2.3}$$

を団パターンに現れる全ての団変数の和集合として定める．さらに，与えられた団パターンに付随する**団代数** $\mathcal{A}(Q)$ を全ての団変数で生成される $\mathcal{F}$ の $\mathbb{Z}$ 部分代数，すなわち $\mathcal{A}(Q) = \mathbb{Z}[\mathcal{X}(Q)]$ と定義する．

さて，今回注目するのはこの $\mathcal{X}(Q)$ が有限集合の場合である．

定義 2.7. $\mathcal{X}(Q)$ が有限集合であるとき，団代数 $\mathcal{A}(Q)$ またはその団パターンは**有限型**であるという．

有限型の分類は既に終わっており，その結果は Lie 理論などと非常に親和性の高いものである．分類定理を述べる前に，箙の変異同値を定義しておこう．

定義 2.8. 箙 Q と Q' について，ある変異の列 $\mu_{i_1}, ..., \mu_{i_m}$ が存在して $Q' = \mu_{i_m} \circ \cdots \circ \mu_{i_1}(Q)$ となるとき，Q と Q' は**変異同値**であるという．

次の定理が，有限型の分類定理である．

定理 2.9 ([6, Theorem 1.8])**.** 既約な団代数（2 つの団代数の直積で記述できない団代数）$\mathcal{A}(Q)$ が有限型であることと，Q が A, D, E 型のいずれかの箙と変異同値であることは同値である．

注意として，A, D, E 型であって同じグラフを持つ（矢の向きだけが異なる）2 つの箙は互いに変異同値である．また，A, D, E 型の箙に変異同値である箙の中には A, D, E 型のグラフを持たないものも存在する．例えば，次の箙

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[ll, bend right] \end{tikzcd}$$

は A_3 型箙に変異同値である．

次に，団複体，正団複体について述べる．

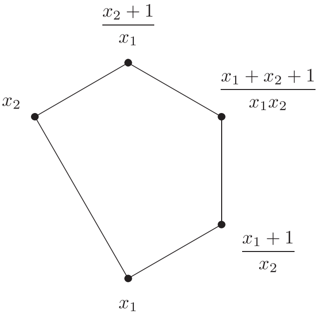
定義 2.10.

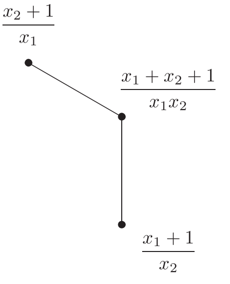
- $\mathcal{X}(Q)$ を頂点集合，団の部分集合を単体とするような単体複体を**団複体**とよび，$\Delta(Q)$ で表す．
- 団複体 $\Delta(Q)$ の初期変数 $\{x_1, \dots, x_n\}$ に対応する頂点を取り除いた充満部分複体を**正団複体**とよび，$\Delta^+(Q)$ で表す．

$Q = 1 \leftarrow 2$ の例を以下で与える．まず，$\mathbb{T}_2$ を以下のようなツリーとする．

$$\cdots \overset{1}{\text{———}} t_0 \overset{2}{\text{———}} t_1 \overset{1}{\text{———}} t_2 \overset{2}{\text{———}} t_3 \overset{1}{\text{———}} t_4 \overset{2}{\text{———}} t_5 \overset{1}{\text{———}} \cdots .$$

このツリーにシードを t_0 から順番に対応させていく．シードは以下の表 1 に挙げるもののうち $0 \leq t \leq 4$ で全てである．正確には団変数の順番が反転しているものも存在する（例えば $t = 5$）が，同じ団変数をもつ団はここでは同一視するものとする．団複体，正団複体は以下のようになる．





t	Q_t	$\mathbf{x}_t$	
0	$1 \leftarrow 2$	x_1	x_2
1	$1 \rightarrow 2$	x_1	$\frac{x_1+1}{x_2}$
2	$1 \leftarrow 2$	$\frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}$	$\frac{x_1+1}{x_2}$
3	$1 \rightarrow 2$	$\frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}$	$\frac{x_2+1}{x_1}$
4	$1 \leftarrow 2$	x_2	$\frac{x_2+1}{x_1}$
5	$1 \rightarrow 2$	x_2	x_1

表 1　シード一覧

明らかに，団代数 $\mathcal{A}(Q)$ が有限型であることと $\Delta(Q), \Delta^{+}(Q)$ が単体複体として有限であることは同値である．また，シード変異の操作は団 $\mathbf{x}$ に対応する極大単体から 1 つの頂点が異なる頂点に入れ替わった別の極大単体に移る操作とみなせるが，これはちょうど団複体や正団複体においてある極大単体から「隣の」極大単体に移る操作であるといえる．さらに，Q と Q' が変異同値である場合 $\Delta(Q) \simeq \Delta(Q')$ である．実際．Q と Q' が変異同値である場合，$(\mathbf{x}, Q)$ を開始地点とする $\Delta(Q)$ には $(\mathbf{x}', Q')$ の団 $\mathbf{x}'$ に相当する極大単体が必ず存在する．この $(\mathbf{x}', Q')$ を初期シードとして団複体 $\Delta(Q)$ をみると，これは定義から $\Delta(Q')$ に他ならない．つまり，Q と Q' が変異同値である場合，$\Delta(Q)$ と $\Delta(Q')$ は団複体のどこを開始地点としているかという点は異なっているが，単体複体としては全く同じものを指していることになる．この点を踏まえると，正団複体

$\Delta^+(Q), \Delta^+(Q')$ は同じ団複体 $\Delta(Q)$ から別の部分を取り除いて構成される単体複体であると捉えることができる．この点は，次の節で定義される τ 傾単体複体にはない視点である．

3　τ 傾理論と団傾斜代数の基礎事項

3.1　τ 傾理論

この節では，主に [1] によって与えられた τ 傾理論における基礎的な事項についてまとめる．この節以降，K は代数閉体であるとする． Λ を有限次元 K 代数として，その有限生成加群圏を $\mathsf{mod}\,\Lambda$，さらに射影加群による $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の充満部分圏を $\mathsf{proj}\,\Lambda$ と表すことにする．

次のような, Λ における特別な加群を考える．$M \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ が τ **リジッド加群**であるとは, $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \tau M) = 0$ を満たす加群であるとする．ここで，τ は Λ における AR 移動である．$|M|$ を互いに非同型な M の直和因子の個数であるとする．τ リジッド加群 M が $|M| = |\Lambda|$ を満たすとき，M は τ **傾加群**であるという．次に，τ リジッド加群や τ 傾加群の一般化概念を与える．

定義 3.1. (M, P) を $M \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ かつ $P \in \mathsf{proj}\,\Lambda$ を満たすペアとする．

(1) (M, P) は M が τ リジッドかつ $\mathsf{Hom}_\Lambda(P, M) = 0$ であるとき Λ の τ **リジッドペア**という．

(2) (M, P) が τ リジッドペアで $|M| + |P| = |\Lambda|$ を満たすとき，Λ の τ **傾ペア**であるという．

τ 系ペア (M, P) が**直既約** (**基本的**) であるとは， $M \oplus P$ が直既約 （基本的）であることをいう．(M, P) が直既約であるとき，M か P のどちらかは 0 であることに注意する．これを用いて，単体複体を定義する．

定義 3.2.

(1) Λ の**台** τ **傾単体複体** $\Delta(s\Lambda)$ を Λ の直既約な τ リジッドペアの同型類を頂点，基本 τ リジッドペアの同型類を単体集合とする単体複体として定義する．

(2) Λ の τ **傾単体複体** $\Delta(\Lambda)$ を Λ の直既約な τ リジッド加群の同型類を頂点，基本 τ リジッド加群の同型類を単体集合とする単体複体として定義する．

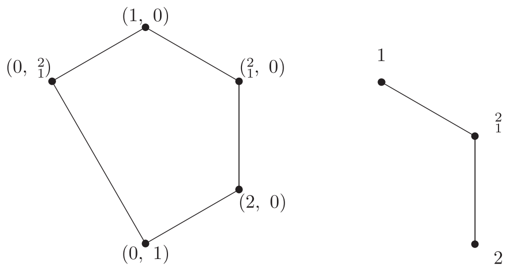
任意の有限次元基本 K 代数 Λ はある（一意的な）連結箙 Q_Λ と許容的イデアル I を用いて KQ_Λ/I の形でかけることに注意する．団代数のシード変異に対応する，τ 傾変異を定義する．

定義&命題 3.3 ([1, Theorem 2.18])**.** Λ を有限次元 K 代数，$(M \oplus N, P \oplus Q)$ を Λ の τ 傾ペアとする．ここで，(N, Q) は直既約な τ リジッドペアとする．このとき直既約な τ リジッドペア (N', Q') であって $(M \oplus N', P \oplus Q')$ が τ 傾ペアとなるものが一意的に存在する．そのとき，$(M \oplus N', P \oplus Q')$ を (M, P) の (N, Q) 方向の τ **傾変異** と呼び，$(M \oplus N', P \oplus Q') = \mu_{(N,P)}(M \oplus N, P \oplus Q)$ とかく．

$\Delta(s\Lambda)$ や $\Delta(\Lambda)$ において，τ 傾変異は極大単体から一つ隣の極大単体に移る操作とみることができる．この点は，シード変異と団複体，正団複体の間の関係と同様である．台 τ 傾単体複体，τ 傾単体複体の $\Lambda = K(1 \leftarrow 2)$ の例を以下で与える．まず，$\mathsf{mod}\,K(1 \leftarrow 2)$ の AR 箙は以下のようになっている．

$$\begin{tikzcd} & {\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}} \arrow[dr] & \\ 1 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & 2 \end{tikzcd}$$

ここで，各成分の数字 i の個数は $1 \leftarrow 2$ の表現における各頂点 i に乗っている線型空間の次元を表している．例えば，$\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$ は頂点 $1,2$ にそれぞれ 1 次元ずつ線型空間が乗っており，その間の線形写像が恒等写像であるような表現（あるいはそれに対応する加群）を表している．この中で，例えば $(M,P) = (1 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, 0)$ は τ 傾ペアである．また，このペアの $(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, 0)$ 方向の変異は $(M', P') = (1, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix})$ である．これらの計算を元に台 τ 傾単体複体，τ 傾単体複体を構成すると次のようになる．



この単体複体は 2 節でみた団複体，正団複体の $Q = 1 \leftarrow 2$ の例と一致しているが，もちろんこれは偶然ではない．詳しくは 4 節で述べる．$\Delta(s\Lambda)$ が単体複体として有限であるとき，Λ は τ **傾有限型**であるという． 明らかに，これは $\Delta(\Lambda)$ が単体複体として有限であることと同値である．

3.2 団傾斜代数

Q を非輪状の箙とする．ここで，非輪状の箙とは向き付きのサイクルがない箙を指す．$\mathcal{C}_Q = \mathcal{D}^b(KQ)/\tau^{-1}[1]$ を考える．この圏は有界導来圏 $\mathcal{D}^b(kQ)$ の $\tau^{-1}[1]$ による軌道圏であり，このような圏を**団圏**という．加法圏 $\mathcal{C}$ に対して，$T \in \mathcal{C}$ が次の条件を満たす時，T を $\mathcal{C}$ の**団傾対象** という．

- $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T[1]) = 0$,
- $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y[1]) = 0$ ならば $Y \in \mathsf{add}\, T$,

ここで，$\mathsf{add}\, T$ は T の直和の直和因子による $\mathcal{C}$ の充満部分圏であるとする．団傾対象にも，団代数のシードや τ 傾理論における τ 傾加群のように変異の操作が定義される．

定義&命題 3.4 ([10, Theorem 5.3])**.** $\mathcal{C}_Q$ を団圏，$T = U \oplus X$ を $\mathcal{C}_Q$ の団傾対象とする．ここで，X は直既約対象であるとする．このとき，直既約対象 X' であって $T = U \oplus X'$ が団傾対象であるようなものが存在する．$T \oplus U'$ は U 方向の $T \oplus U$ の**団傾変異** といい，$T \oplus U' = \mu_U(T \oplus U)$ とかく．

団傾対象から代数を構成することを考える．有限次元代数 Λ は，団圏 $\mathcal{C}_Q$ と団傾対象 T が存在して $\Lambda \cong \mathsf{End}_{\mathcal{C}_Q} T^{\mathrm{op}}$ となるとき，**団傾斜代数**であるという．このとき，$\Lambda = KQ_\Lambda/I$ を与える Q と I は Λ に対して一意的に決定されることが知られている [5, Theorem 2.3]．また，団傾斜代数は Q が非輪状であるときは道代数に一致する．T, T' を $\mathcal{C}_Q$ の団傾対象とし，$\Lambda = \mathsf{End}_{\mathcal{C}_Q} T^{\mathrm{op}}$，$\Lambda' = \mathsf{End}_{\mathcal{C}_Q} T'^{\mathrm{op}}$ とする．T' が T から団傾変異で得られるとき，Q'_Λ は Q_Λ から箙変異によって得られる [4, Theorem I.1,6]．T が極大な基本射影対象であるとき，$Q_\Lambda = Q$ である．従って，Λ が $\mathcal{C}_Q$ の極大な基本射影対象 T と団傾変異同値である団傾対象の End 環であるとき，Q_Λ は Q に箙変異同値である．

以下に $Q = 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$ の例を挙げる．まず団圏の AR 箙は以下のようになる．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & {\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}} \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[dr] & & {1[1]} \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[dr] & & {2[1] \simeq 1} \arrow[dr] & & \\
 & {\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}} \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[ur] \arrow[dr] & & {\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}} \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[ur] \arrow[dr] & & {\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}[1]} \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[ur] \arrow[dr] & & {\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}[1] \simeq \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}} \arrow[dr] & \\
1 \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[ur] & & 2 \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[ur] & & 3 \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[ur] & & {\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}[1]} \arrow[rr, dashed, no head] \arrow[ur] & & {1[2] \simeq \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}}
\end{tikzcd}$$

例えば，$T = 1 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$ は団傾対象であり，これを $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$ 方向で変異すると $T' = 1 \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$ を得る．このとき $\mathsf{End}_{\mathcal{C}_Q} T^{\mathrm{op}} = KQ$ であり，$\mathsf{End}_{\mathcal{C}_Q} T'^{\mathrm{op}}$ は Q' を

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\alpha"'] & 2 \arrow[r, "\beta"'] & 3 \arrow[ll, bend right, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

としたとき（α, β, γ はそれぞれの矢の名前としている），

$$\mathsf{End}_{\mathcal{C}_Q} T'^{\mathrm{op}} = KQ'/\langle \beta\alpha, \gamma\beta, \alpha\gamma \rangle$$

となっていて，確かに Q' は Q の頂点 2 方向の箙変異となっている．

4　正団複体と τ 傾単体複体の同一視

Q が A, D, E 型の箙と変異同値であるとき，前節と前々節で導入した団複体と台 τ 傾単体複体，正団複体と τ 傾単体複体は単体複体として同じものであることが知られている．

定理 4.1 ([9, Theorem 6.6])**.** Λ を Q_Λ が A, D, E 型のいずれかの箙と変異同値な箙であるような団傾斜代数であるとする．このとき，$\Delta(s\Lambda) \simeq \Delta(Q_\Lambda)$ と $\Delta(\Lambda) \simeq \Delta^+(Q_\Lambda)$ が成立する．

Q_Λ がそれ以外の場合は一般に上記の同型は成り立たないが，$\Delta(Q_\Lambda), \Delta^+(Q_\Lambda)$ は $\Delta(s\Lambda), \Delta(\Lambda)$ の部分複体とそれぞれ同型である．従って，団代数の有限型の分類定理（定理 2.9）を用いることで，本稿の主定理である定理 1.2 (1) を得る：

定理 4.2 (再掲)**.** 既約な団傾斜代数（2 つの団傾斜代数の直積でかけない団傾斜代数）Λ が有限表現型であることと Q_Λ が A, D, E 型の箙に変異同値であることは同値である．

ここで，団傾斜代数においては τ 傾有限型であることと有限表現型であることは同値である（例えば [13] などを参照）ことから上の定理が正当化されることに注意する．

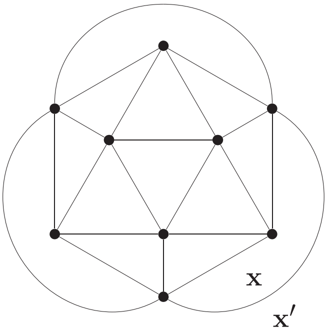
この同一視によって，τ 傾理論の問題を団代数理論の問題に帰着させることができる．次の節で，これを使った定理 1.2 (2) の証明のアウトラインを見ていくことにする．

5　正団複体の面ベクトルの差に関する縮退定理

単体複体において重要な不変量として，**面ベクトル**（f ベクトル）が挙げられる．これは，単体複体の各次元の単体の数をベクトルとして表示したものである．極大面の次元が k であるような有限の単体複体 Δ に対して，

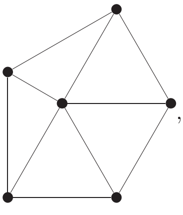
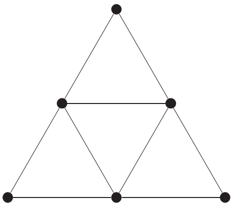
$$f(\Delta) = (f_{-1}, \ldots, f_k)$$

とする．ただし，f_i は Δ に含まれる i 次元単体の個数であり，空集合を -1 次元単体とみなしていることに注意する．まず，正団複体の面ベクトルについて考えていく．[2] では源点や沈点で変異した前後の箙について考察していたので，これを一般化して箙変異の前後の箙から定まる正団複体の変化について考えて見ることにする．具体的に．A_3 型の団複体を例にとって見ていく（A_3 型の箙やそれに変異同値な箙から定まる団複体は全て同型なので，「A_3 型の団複体」という言葉は well-defined であることに注意）．A_3 型の団複体は次のような単体複体である．ただし，この単体複体は 3 次元空間に埋め込まれているものを切り開いて 2 次元平面に展開しているものであり，一番外側にある 3 頂点も 1 つの単体を成していることに注意する．



このとき，面ベクトルは $f(\Delta(Q)) = (1, 9, 21, 14)$ である．

$Q = 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$ としたとき，この箙を含むシード $(Q, \mathbf{x})$ の団 $\mathbf{x}$ に対応する単体は上図において $\mathbf{x}$ を囲む単体に対応している．ここから頂点 2 で変異することによって得られるシード $(\mathbf{x}', Q')$ に含まれる団 $\mathbf{x}'$ に対応する単体は上図において一番外側の 3 頂点によって構成される単体である．正団複体 $\Delta^+(Q)$ は，$(\mathbf{x}, Q)$ の団 $\mathbf{x}$ に含まれる全ての団変数に対応する頂点と，その頂点を含む全ての単体を $\Delta(Q)$ から取り除いて得られる単体複体であった．したがって，$\Delta^+(Q)$,$\Delta^+(Q')$ は次のような単体複体となる．

$\Delta^+(Q) =$ , $\Delta^+(Q') =$  (5.1)

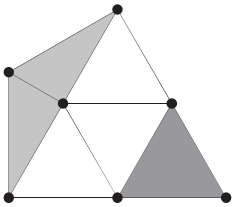
このとき，各々の面ベクトルは $f(\Delta^+(Q)) = (1, 6, 10, 5), f(\Delta^+(Q')) = (1, 6, 9, 4)$ である．ここで，2 つのベクトルの差 $(0, 0, 1, 1)$ を考えてみることにする．この差の値は，τ 傾理論においては $\Lambda = KQ, \Lambda' = KQ'/I$ なる 2 つの団傾斜多元環における τ 傾単体複体 $\Delta(\Lambda), \Delta(\Lambda')$ の面ベクトルの差であることが定理 4.1 からわかる．さらに，このベクトルを成分ごとに見ると，ちょうど「Λ における直和成分が $k(\in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ 個である基本 τ リジッド加群の同型類の個数と，Λ' におけるそれの差」になっていることがわかる．つまり，このベクトルの差が 0 ベクトルであるときが定理 1.2 (2) の主張が述べている状況になる．よって，あとは Q と Q' の間の変異がどういう条件を満たしていれば差が 0 ベクトルになるのかを考えれば良い．これを知る上で重要な定理が次の定理である．

定理 5.1 ([9, Theorem 3.5])**.** $\mathcal{A}(Q)$ を有限型団代数とする．Q が k 方向の箙変異によって Q' になるとき，

$$f(\Delta^+(Q)) - f(\Delta^+(Q')) = \big[f(\Delta^+(Q' - \{k\}))\big]_1 - \big[f(\Delta^+(Q - \{k\}))\big]_1$$

が成り立つ．ただし，$Q - \{k\}$ は Q の頂点 k 以外の頂点からなる充満部分箙であるとし，$[v]_1$ は最初の成分に 0 を挿入して v の成分を右に 1 つずつずらしたベクトルであるとする．

この定理における式の意味について，再び A_3 型の例を用いてもう少し見ていくことにする．(5.1) における 2 つの単体複体の差を考えるときは，共通部分は考慮しなくてよいことがわかる．つまり，重要なのは下図における色の異なる網かけ部分の単体複体の面ベクトルの差である．



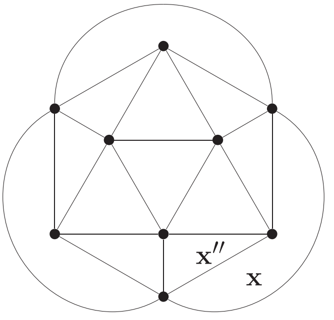
この 2 つの単体複体は，実は変異に用いた頂点 2 を取り除いた箙の正団複体を使って記述可能である．薄い方の網かけは $\Delta^+(Q' - \{2\}) = \Delta^+(1 \leftarrow 3)$ を底面とする錐，濃い方は $\Delta^+(Q - \{2\}) = \Delta^+(1 \quad 3)$ を底面とする錐である．この事実はこの具体例に限らず，定理で考えている全ての状況において成り立つことがわかっている．このようにして，正団複体の面ベクトルの差はより小さい箙の正団複体の面ベクトルの差に縮退（reduction）させることができる．以上の考察から，定理 5.1 の等式が導かれるのである．

さて，定理 5.1 において重要な点は，変異前後の正団複体の面ベクトルの増減量は箙の変異に用いた頂点以外の部分の情報に依存するということである．つまり，変異の前後で箙の頂点 k 周り以外の矢に変化がなければ面ベクトルの値は変化しないということになる．特に源点や沈点での変異は，この条件を満たしている．以上から，定理 1.2(2) が導かれるのである．

定理 5.2 (再掲)**.** $\Lambda = KQ/I$ と $\Lambda' = KQ'/I$ を有限表現型の団傾斜多元環とする．このとき，Q と Q' が沈点変異または源点変異で移り合うならば，任意の自然数 k に対して，直既約因子が k 個である Λ の基本 τ リジッド加群の同型類の個数と Λ' の基本 τ リジッド加群の同型類の個数は等しい．

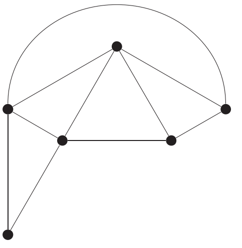
先の例は変異前後の面ベクトルが一致しない例だったので，一致する例も見ておくことにする．$Q = 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$ として $(Q, \mathbf{x})$ から頂点 1 で変異したときのシードを $(Q'', \mathbf{x}'')$ と書くことにする．これは沈点での変異

なので，先の定理から面ベクトルは一致するはずである．$\mathbf{x}''$ に対応する極大単体は下の図の位置になる．

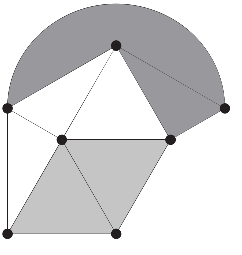


このとき，正団複体は

$$\Delta^+(Q'') =$$



となり，$f(\Delta^+(Q'')) = (1, 6, 10, 5) = f(\Delta^+(Q))$ となっている．また，変異前後で交換される単体複体をみると，次の網かけ部分になっている．



薄い方，濃い方共に $\Delta^+(Q - \{1\}) = \Delta^+(Q'' - \{1\}) = \Delta^+(2 \leftarrow 3)$ を底面とする錐となっていることがわかる．このように，沈点や原点で変異する場合は箙の変異した頂点周り以外の部分の様子が変わらないので，取り除かれる部分と付け足される部分は単体複体として同型である（ただし，$\Delta^+(Q)$ と $\Delta^+(Q'')$ は単体複体としては同型ではないことに注意する）．これは多元環の表現論においてはちょうど APR 傾加群に Brenner-Butler [3] の傾定理を適用したもの（つまり，[2] における鏡映関手の性質）の類似，あるいはその一般化と見ることができる．KQ の捩れ類に相当するのが白色で表している共通部分，捩れ自由類に相当するのが薄い灰色で表している部分で，KQ'' の捩れ類に相当するのが濃い灰色の部分，捩れ自由類に相当するのが白色部分であると見ると，白色の部分が共通していることが KQ の捩れ類と KQ'' の捩れ自由類が圏同値であること，灰色の部分同士が単体複体として同型であることが KQ の捩れ自由類と KQ'' の捩れ類が圏同値であることに対応しているとみれるのである．

なお，定理 5.2 の仮定は必要条件ではなく，源点や沈点における変異でなくても面ベクトルを変化させない変異は存在する．例えば以下のような箙の組がその例である．

$$Q = \begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & & 2 \arrow[ll] \\ & 3 \arrow[ur] \arrow[dl] & \\ 4 \arrow[rr] & & 5 \arrow[ul] \end{tikzcd}, \quad Q' = \begin{tikzcd} 1 \arrow[dd] & & 2 \arrow[dl] \\ & 3 \arrow[ul] \arrow[dr] & \\ 4 \arrow[ur] & & 5 \arrow[uu] \end{tikzcd}.$$

この 2 つの箙 Q, Q' は頂点 3 方向の箙変異で移り合い，明らかに頂点 3 は源点でも沈点でもない．また，この箙は A_5 型箙に変異同値であるから，正団複体は有限である．Q,Q' ともに k を取り除くと $A_2 \times A_2$ 型なので，定理 5.1 から $\Delta^+(Q)$ と $\Delta^+(Q')$ の面ベクトルの差は 0 ベクトルである（実際はもう少し強く，Q と Q' が箙として同型なので $\Delta^+(Q) \simeq \Delta^+(Q')$ である ）．

参考文献

[1] T. Adachi, O. Iyama, and I. Reiten. τ-tilting theory. *Compos. Math.*, 150:415–452, 2014.

[2] I. N. Bernstein, I.M. Gelfand, and V.A. Ponomarev. Coxeter functions and Gabriel's theorem. *Uspiehi Mat. Nauk*, 28:19–33, 1973.

[3] S. Brenner and M.C.R. Butler. Generalizations of the Bernĕsteĭn Gel'fand Ponomarev reflection functors. *Representation theory, II, Lecture Notes in Math.*, 832:103–169, 1980.

[4] A. B. Buan, O. Iyama, I. Reiten, and J. Scott. Cluster structures for 2-Calabi-Yau categories and unipotent groups. *Compos. Math.*, 145(4):1035–1079, 2009.

[5] A.B. Buan, O. Iyama, I. Reiten, and D. Smith. Mutation of cluster-tilting objects and potentials. *Amer. J. Math.*, 133(4):835–887, 2011.

[6] S. Fomin and A. Zelevinsky. Cluster algebras II: Finite type classification. *Invent. Math.*, 154:63–121, 2003.

[7] S. Fomin and A. Zelevinsky. Cluster Algebra IV: Coefficients. *Comp. Math.*, 143:112–164, 2007.

[8] P. Gabriel. Unzerlegbare Darstellungen I. *Manuscripta math.*, 6:71–103, 1972.

[9] Y. Gyoda. Positive cluster complexes and τ-tilting simplicial complexes of cluster-tilted algebras. preprint, arXiv:2105.07974 [math.RT], 2021.

[10] O. Iyama and Y. Yoshino. Mutation in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules. *Invent. Math.*, 172(1):117–168, 2008.

[11] C. Riedtmann and A. Schofield. On a simplicial complex associated with tilting modules. *Comment. Math. Helv.*, 66(1):70–78, 1991.

[12] L. Unger. Shellability of simplicial complexes arising in representation theory. *Adv. Math.*, 144(2):221–246, 1999.

[13] S. Zito. τ-tilting finite cluster-tilted algebras. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 63:950–955, 2020.