Vertex algebraic construction of modules for twisted affine Lie algebras

大阪市立大学理学研究科　武中　亮
Ryo Takenaka
Graduate School of Science, Osaka City University

概要

頂点作用素を用いた可積分最高ウェイト加群の実現により, 可積分最高ウェイト加群およびその主部分空間の組合せ論的な基底を構成する．特に $A_{2l}^{(2)}$ 型のアフィンリー環 $\tilde{\mathfrak{g}}[\nu]$ に対するこれらの加群の研究成果 [7] について概説する．

1　導入

頂点作用素を用いた可積分最高ウェイト加群の研究は Lepowsky と Primc の研究 [4] に端を発する． $\mathfrak{g}$ を複素単純リー環 $\mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{h}$ をそのカルタン部分代数とする． このとき付随するアフィンリー環がそれぞれ $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c, \hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$ で与えられる．ここで c は中心元である．Lepowsky と Primc は可積分最高ウェイト加群の $\hat{\mathfrak{g}} \supset \hat{\mathfrak{h}}$ 剰余空間の基底を構成した．Georgiev はこの結果をより高いランクのリー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ へと一般化した [2].

最近 Butorac, Kožić および Primc によって $X_\ell^{(1)}$ 型のアフィンリー環に対する可積分最高ウェイト加群の組合せ論的基底が構成された [1]. 残された $X_\ell^{(r)} (r > 1)$ 型のアフィンリー環に対する可積分最高ウェイト加群 $L(k\Lambda_0)$ の基底も筆者と大阪市立大学の尾角正人氏との共同研究により $A_{2l}^{(2)}$ 型をのぞいて得られた [6].

これらの研究では Feigin と Stoyanovsky によって導入された主部分空間が中心的な役割を果たす．本稿では頂点作用素を用いて $A_{2l}^{(2)}$ 型アフィンリー環に対応する主部分空間を実現する．その結果をもとに, 可積分最高ウェイト加群 $L(k\Lambda_0)$ の組合せ論的基底を構成する．最後に応用として $L(k\Lambda_0)$ のフェルミ型指標公式を導出する．

2　ν-twist 加群

$\mathfrak{g}$ を A_{2l} 型の複素単純リー環, α_i $(i = 1, \ldots, 2l)$ をその単純ルートとする．このとき $\mathfrak{g}$ のルート格子 L は

$$L = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_{2l}$$

で与えられる．$\mathfrak{g}$ 上の非退化不変対称双線形形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を用いて $\mathfrak{h}^*$ 上の対称双線形形式が次のように導入される．$\mathfrak{h}^*$ の元 α_h と $\mathfrak{h}$ の元 h を $\langle \alpha, \alpha_h \rangle = \alpha(h)$ によって同一視するのである．ここで $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数．$\mathfrak{h}^*$ 上の双線形形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は α がルートであるとき $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2$ となるように固定されているものとする．いま, $\mathfrak{g}$ のディンキン図形とその自己同型は表 1 のように与えられる．従って, L の自己同型 ν は

$$\nu(\alpha_i) = \alpha_{2l-i+1}$$

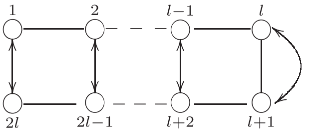

表 1　ディンキン図形と自己同型

で定義される.

注意 1. この場合 ν の位数は 2 であるが, [3] で導入された条件

$$\langle \nu^{\frac{r}{2}}\alpha, \alpha\rangle \in 2\mathbb{Z} \quad (\forall \alpha \in L)$$

を満たすようにするため $r = 4$ とする必要がある.

$\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$ を $\mathfrak{h}$ に付随するアフィンリー環とし, $\hat{\mathfrak{h}}$ の誘導表現を

$$M(1) = U(\hat{\mathfrak{h}}) \otimes_{U(\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}[t]\oplus\mathbb{C}c)} \mathbb{C}$$

で定める. ここで $\mathbb{C}$ は $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t]$ が自明に, c が定数 1 で作用する $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t] \oplus \mathbb{C}c$ の一次元表現. ルート格子 L は正定値偶格子であるので, 頂点代数

$$V_L = M(1) \otimes \mathbb{C}[L]$$

を誘導する. 次に L の自己同型 ν を V_L 上の自己同型 $\hat{\nu}$ に拡張し, 頂点代数 V_L の ν-twist 加群を与えたい. ν は L 上での定義から自然に $\mathfrak{h}, \hat{\mathfrak{h}}, M(1)$ に作用する. $\mathbb{C}[L]$ の自己同型 ν' も L の自己同型から誘導され, 次を満たす：

$$\nu'(h \cdot a) = \nu(h) \cdot \nu'(a), \quad \nu'(a \cdot b) = \nu'(a) \cdot \nu'(b) \quad (h \in \mathfrak{h}, a, b \in \mathbb{C}[L]).$$

V_L の自己同型を $\hat{\nu} = \nu \otimes \nu'$ となるようにとる.

ペア (V_L, ν) が定める ν-twist 加群上の頂点作用素を定義し, その性質を確認する. ζ を虚数単位とする. このとき自己同型 ν に関して, $\mathfrak{h}$ は次の分解をもつ：

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \mathfrak{h}_{(j)}.$$

ここで $\mathfrak{h}_{(j)} = \{h \in \mathfrak{h} \mid \nu h = \zeta^j h\} \subset \mathfrak{h}$ であって, $\mathfrak{h}_{(j \bmod 4)}$ と $\mathfrak{h}_{(j)}$ は同一視されるものとする. この分解に付随するリー環を

$$\hat{\mathfrak{h}}[\nu] = \bigoplus_{m\in\frac{1}{4}\mathbb{Z}} \mathfrak{h}_{(4m)} \otimes t^m \oplus \mathbb{C}c$$

で定義する. $\hat{\mathfrak{h}}[\nu]$ の交換関係は次で与えられる：

$$[\alpha \otimes t^m, \beta \otimes t^n] = \langle \alpha, \beta\rangle m\delta_{m+n,0}c, \quad [\hat{\mathfrak{h}}[\nu], c] = 0 \quad (m, n \in \frac{1}{4}\mathbb{Z}, \alpha \in \mathfrak{h}_{(4m)}, \beta \in \mathfrak{h}_{(4n)}).$$

また, 部分代数をそれぞれ $\hat{\mathfrak{h}}[\nu]^{\pm} = \bigoplus_{\pm m>0} \mathfrak{h}_{(4m)} \otimes t^m$ で定める. 先述の場合と同様に, $\hat{\mathfrak{h}}[\nu]$ の誘導表現を

$$S[\nu] = U(\hat{\mathfrak{h}}[\nu]) \otimes_{U(\bigoplus_{m\geq 0} \mathfrak{h}_{(4m)}\otimes t^m \oplus \mathbb{C}c)} \mathbb{C}$$

で定める．ここで $\mathbb{C}$ は $U(\bigoplus_{m\geq 0}\mathfrak{h}_{(4m)}\otimes t^m \oplus \mathbb{C}c)$ が自明に, c が定数 1 で作用する一次元表現．P_j $(j=0,1,2,3)$ を $\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{h}_{(j)}$ への射影とし, L の部分格子 N を

$$N=(1-P_0)\mathfrak{h}\cap L=\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{\alpha_i-\alpha_{2l-i+1}\}$$

で与える．このとき V_L の ν-twist 加群 V_L^T はベクトル空間として次の同型で実現される：

$$V_L^T\simeq S[\nu]\otimes\mathbb{C}[L/N].$$

次に, $\alpha_{(j)}$ で $P_j\alpha\in\mathfrak{h}_{(j)}$ を表し, $\alpha^\nu(m)=\alpha_{(4m)}\otimes t^m$ とする．V_L^T に作用する頂点作用素が

$$\alpha^\nu(z)=\sum_{m\in\frac{1}{4}\mathbb{Z}}\alpha^\nu(m)z^{-m-1}$$

で定義される．$a=e_\alpha\in\mathbb{C}[L]$ に対する頂点作用素を定義するために, 次の作用素を導入する：

$$E^\pm(\alpha,z)=\exp\left(\sum_{\pm m>0}\frac{\alpha^\nu(m)}{m}z^{-m}\right).$$

この作用素は交換関係

$$E^+(\alpha,z)E^-(\beta,w)=E^-(\beta,w)E^+(\alpha,z)\prod_{j=0}^{3}\left(1-\zeta^j\frac{w^{\frac{1}{4}}}{z^{\frac{1}{4}}}\right)^{\langle\nu^j\alpha,\beta\rangle}\tag{1}$$

をもつ．いま $a=e_\alpha$ に対して頂点作用素を

$$\begin{aligned}Y(a,z)&=(1+\zeta)^{\langle\nu\alpha,\alpha\rangle}2^{-\frac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{2}}E^-(-\alpha,z)E^+(-\alpha,z)az^{\alpha_{(0)}+\frac{\langle\alpha_{(0)},\alpha_{(0)}\rangle}{2}-\frac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{2}}\\&=\sum_{m\in\frac{1}{4}\mathbb{Z}}x_\alpha^\nu(m)z^{-m-\frac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{2}}=x_\alpha^\nu(z)\end{aligned}$$

で定義する．ここで, ウェイトが μ であるベクトル v に対して $z^hv=vz^{\langle h,\mu\rangle}$ $(h\in\mathfrak{h}_{(0)})$．一般に, 頂点代数 V_L のベクトル $v=\alpha_1(-n_1)\cdots\alpha_m(-n_m)\otimes a$ $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in\mathfrak{h},n_1,\ldots,n_m>0,a\in\mathbb{C}[L])$ に対しては 2 つの頂点作用素を組み合わせた

$$Y(v,z)={}^\circ_\circ\left(\frac{1}{(n_1-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n_1-1}\alpha_1^\nu(z)\right)\cdots\left(\frac{1}{(n_m-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n_m-1}\alpha_m^\nu(z)\right)Y(a,z){}^\circ_\circ$$

を対応させる．ここで ${}^\circ_\circ\cdot{}^\circ_\circ$ は正規順序積と呼ばれる頂点作用素同士の積を表す．上記の頂点作用素を ν-twist 加群 V_L^T の頂点作用素とするため, V_L 上の写像 Δ_z を導入する．まず, 定数 c_{mnj} を次のように与える：

$$\begin{aligned}\sum_{m,n\geq 0}c_{mn0}z^mw^n&=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\log\left(\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}-\zeta^{-j}(1+w)^{\frac{1}{4}}}{1-\zeta^{-j}}\right),\\\sum_{m,n\geq 0}c_{mnj}z^mw^n&=\frac{1}{2}\log\left(\frac{(1+z)^{\frac{1}{4}}-\zeta^{j}(1+w)^{\frac{1}{4}}}{1-\zeta^{j}}\right)\quad(j\neq 0).\end{aligned}$$

$\{\gamma_i\}_{i=1}^{2l}$ を $\mathfrak{h}$ の正規直交基底としたとき, 写像 Δ_z が

$$\Delta_z=\sum_{m,n\geq 0}\sum_{j=0}^{3}\sum_{i=1}^{2l}c_{mnj}(\nu^{-1}\gamma_i)(m)\gamma_i(n)z^{-m-n}$$

で与えられ, V_L^T 上の頂点作用素が

$$Y^\nu(v,z) = Y(e^{\Delta_z}v, z)$$

で得られる．このとき, 頂点作用素 $Y^\nu(v,z)$ は次の性質をもつ：

$$Y^\nu(\hat{\nu}^j v, z) = Y^\nu(v,z)\big|_{z^{\frac{1}{4}} \to \zeta^{-j} z^{\frac{1}{4}}}. \tag{2}$$

さらに, (V_L^T, Y^ν) は V_L 加群として既約であることが知られている．

リー環 $\mathfrak{g}$ に対して, そのアフィンリー環 $\hat{\mathfrak{g}}[\nu]$ を

$$\hat{\mathfrak{g}}[\nu] = \bigoplus_{m \in \frac{1}{4}\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{(4m)} \otimes t^m \oplus \mathbb{C}c$$

で定める．ここで $\mathfrak{g}_{(j)} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \nu x = \zeta^j x\}$ であって, $\mathfrak{h}$ の自己同型 ν は自然に $\mathfrak{g}$ に拡張されているとする．このリー環 $\hat{\mathfrak{g}}[\nu]$ は $A_{2l}^{(2)}$ 型のアフィンリー環と同型になることが知られている．定義よりリー環 $\hat{\mathfrak{h}}[\nu]$ は自然に ν-twist 加群 V_L^T に作用することがわかるが, 次の定理によって $\hat{\mathfrak{g}}[\nu]$-加群へと拡張される．

定理 2. ([3]) $\hat{\mathfrak{h}}[\nu]$ の V_L^T 上の表現は

$$(x_\alpha)_{(4m)} \otimes t^m \mapsto x_\alpha^\nu(m) \quad (x_\alpha \in (\mathfrak{g}_\alpha)_{(4m)})$$

により作用を定めることで $\hat{\mathfrak{g}}[\nu]$ の表現へと一意に拡張される．ここで $\mathfrak{g}_\alpha$ はルート α に対する $\mathfrak{g}$ のルート空間．さらに, V_L^T は $\hat{\mathfrak{g}}[\nu]$-加群として既約である．

中心元 c が定数 1 で作用することに注意すれば, V_L^T は最高ウェイトが Λ_0 の可積分最高ウェイト加群 $L(\Lambda_0)$ と同型であることがわかる．ここで Λ_0 は $\langle \Lambda_0, c\rangle = 1$, $\langle \Lambda_0, \mathfrak{h}_{(0)}\rangle = 0$ であるような基本ウェイトである．

この事実を基に, 最高ウェイトが $k\Lambda_0$ である可積分最高ウェイト加群 $L(k\Lambda_0)$ を V_L^T の k テンソル $(V_L^T)^{\otimes k}$ の部分加群として実現する：

$$L(k\Lambda_0) \simeq U(\hat{\mathfrak{g}}[\nu]) \cdot (\mathbf{1}_T \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_T) \subset (V_L^T)^{\otimes k}.$$

ここで, $\mathbf{1}_T$ は V_L^T の最高ウェイトベクトル．また, $L(k\Lambda_0)$ の最高ウェイトベクトル $\mathbf{1}_T \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_T$ を v_0 で表すこととする．このとき, $\hat{\mathfrak{g}}[\nu]$ の $L(k\Lambda_0)$ 上の作用は

$$\Delta^{(k-1)}(x) = x \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + 1 \otimes x \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes x$$

で与えられ, 頂点作用素に対しても同様である．e_α は $(V_l^T)^{\otimes k}$(すなわち $L(k\Lambda_0)$) 上対角的に作用しているとする．すなわち $e_\alpha \mapsto e_\alpha \otimes \cdots \otimes e_\alpha$．いま, 単純ルート α_i と自然数 n に対して

$$x_{n\alpha_i}^\nu(z) = x_{\alpha_i}^\nu(z)^n = [\Delta^{(k-1)}(x_{\alpha_i}^\nu(z))]^n$$

とすると, $L(k\Lambda_0)$ 上で次が成立する：

$$x_{(k+1)\alpha_i}^\nu(z) = 0. \tag{3}$$

3　主部分空間

まず, 最高ウェイト加群 $L(k\Lambda_0)$ の主部分空間の定義を確認する．Δ_+ を正ルートの集合とし, 対応する部分リー環を

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathbb{C}x_\alpha$$

で与える．付随するアフィンリー環とその部分リー環がそれぞれ次のように得られる：

$$\hat{\mathfrak{n}}[\nu] = \bigoplus_{m\in\frac{1}{4}\mathbb{Z}} \mathfrak{n}_{(4m)} \otimes t^m \oplus \mathbb{C}c, \quad \bar{\mathfrak{n}}[\nu] = \bigoplus_{m\in\frac{1}{4}\mathbb{Z}} \mathfrak{n}_{(4m)} \otimes t^m.$$

このとき, $L(k\Lambda_0)$ の主部分空間 $W(k\Lambda_0)$ は次で定義される：

$$W(k\Lambda_0) = U(\bar{\mathfrak{n}}[\nu]) \cdot v_0.$$

次に, $W(k\Lambda_0)$ の基底を与えるために quasi-particle について紹介する．頂点作用素 $x^{\nu}_{n\alpha_i}(z)$ に対して, カラーが i, 電荷が n でエネルギーが $-m$ の quasi-particle が対応するフーリエ係数として次のように定義される：

$$x^{\nu}_{n\alpha_i}(z) = \sum_{m\in\frac{1}{4}\mathbb{Z}} x^{\nu}_{n\alpha_i}(m) z^{-m-n}.$$

また, 各 i で $1 \le n_{r_i^{(1)},i} \le \cdots \le n_{1,i}$, $m_{r_i^{(1)},i} \le \cdots \le m_{1,i}$ をそれぞれ満たす整数 $n_{p,i}$ と $m_{p,i} \in \frac{1}{4}\mathbb{Z}$ に対して 2 つの列

$$\mathcal{R}' = \left(n_{r_l^{(1)},l}, \ldots, n_{1,l}; \cdots; n_{r_1^{(1)},1}, \ldots, n_{1,1}\right), \quad \mathcal{E} = \left(m_{r_l^{(1)},l}, \ldots, m_{1,l}; \cdots; m_{r_1^{(1)},1}, \ldots, m_{1,1}\right)$$

を考える．このとき, これらの列に対応する quasi-particle 単項式が次で与えられる：

$$x^{\nu}_{n_{r_l^{(1)},l}\alpha_l}(m_{r_l^{(1)},l}) \cdots x^{\nu}_{n_{1,l}\alpha_l}(m_{1,l}) \cdots x^{\nu}_{n_{r_1^{(1)},1}\alpha_1}(m_{r_1^{(1)},1}) \cdots x^{\nu}_{n_{1,1}\alpha_1}(m_{1,1}). \tag{4}$$

ここで, $r_i^{(s)}$ は単項式 (4) においてカラーが i で電化が s 以上の quasi-particle の数に対応している．実は quasi-particle 単項式は l 個のヤング図形の組より得られることが知られている．実際, 左から p 番目の列に $n_{p,i}$ 個の箱をもつヤング図形を考えたとき, 対応する quasi-particle 単項式の i 成分 $x^{\nu}_{n_{r_i^{(1)},i}\alpha_i}(m_{r_i^{(1)},i}) \cdots x^{\nu}_{n_{1,i}\alpha_i}(m_{1,i})$ が得られる．またこのとき, $\left(n_{r_i^{(1)},i}, \ldots, n_{1,i}\right)$ と $\left(r_i^{(1)}, \ldots, r_i^{(k)}\right)$ はヤング図形に関して共役であることに注意されたい．

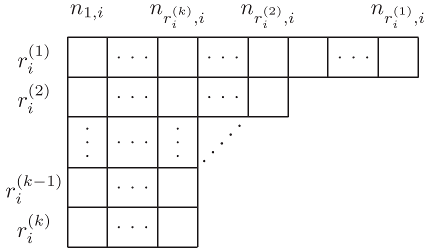

表 2　ヤング図形と電荷

注意 3. 等式 (3) より, 電荷は k 以下, すなわち $r_i^{(s)} = 0$ $(s > k)$ が全ての i で成立する．

(4) の形で表される quasi-particle 単項式全体の集合を M_{QP} とする．M_{QP} にいくつかの条件を課すことで $W(k\Lambda_0)$ の基底を構成する．そのためにいくつかの補題を紹介する．$\rho_i = \langle(\alpha_i)_{(0)}, (\alpha_i)_{(0)}\rangle/2$ とする．このとき, 次の補題により同じカラー同士の quasi-particle の関係が明らかとなる．

補題 4. $1 \leq n_2 \leq n_1$ を固定する．この n_p $(p=1,2)$ に対して $j \in n_2\rho_i + \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $M \in (n_1+n_2)\rho_i + \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ を固定する．このとき, $2n_2$ 個の単項式

$$A = \{x^{\nu}_{n_2\alpha_i}(j)x^{\nu}_{n_1\alpha_i}(M-j), x^{\nu}_{n_2\alpha_i}(j-\frac{1}{2})x^{\nu}_{n_1\alpha_i}(M-j+\frac{1}{2}), \ldots \\ \ldots, x^{\nu}_{n_2\alpha_i}(j-\frac{2n_2-1}{2})x^{\nu}_{n_1\alpha_i}(M-j+\frac{2n_2-1}{2})\}$$

は次の集合

$$\{x^{\nu}_{n_2\alpha_i}(s)x^{\nu}_{n_1\alpha_i}(t) \mid s+t=M\} \setminus A$$

から得られる単項式と $x^{\nu}_{(n_1+1)\alpha_i}(j')$ $(j' \in (n_1+1)\rho_i + \frac{1}{2}\mathbb{Z})$ を含む *quasi-particle* 単項式の線形結合で表される．

次の補題は交換関係 (1) を用いて計算され, 異なるカラー同士の quasi-particle の関係を明らかにする．

補題 5. 多項式 $P(z_{r_l^{(1)},l}, \ldots, z_{1,1})$ を次で定義する：

$$P(z_{r_l^{(1)},l}, \ldots, z_{1,1}) = \prod_{i=1}^{l}\prod_{p=1}^{r_i^{(1)}}\prod_{q=1}^{r_{i-1}^{(1)}}\prod_{j=0}^{3}\left(1-\zeta^j\frac{z_{q,i-1}^{\frac{1}{4}}}{z_{p,i}^{\frac{1}{4}}}\right)^{-\langle\nu^j\alpha_i,\alpha_{i-1}\rangle\min\{n_{p,i},n_{q,i-1}\}} \\ = \prod_{i=1}^{l}\prod_{p=1}^{r_i^{(1)}}\prod_{q=1}^{r_{i-1}^{(1)}}\left(1-\frac{z_{q,i-1}^{\frac{1}{2}}}{z_{p,i}^{\frac{1}{2}}}\right)^{\min\{n_{p,i},n_{q,i-1}\}}.$$

このとき次が成立する：

$$P(z_{r_l^{(1)},l}, \ldots, z_{1,1})\prod_{1\leq s<t\leq r_l^{(1)}}\left(1+\frac{z_{s,l}^{\frac{1}{2}}}{z_{t,l}^{\frac{1}{2}}}\right)^{n_{t,l}} x^{\nu}_{n_{r_l^{(1)},l}\alpha_l}(z_{r_l^{(1)},l})\cdots x^{\nu}_{n_{1,1}\alpha_1}(z_{1,1})v_0 \\ \in \left[\left(\prod_{i=1}^{l}\prod_{p=1}^{r_i^{(1)}} z_{p,i}^{-\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{r_{i-1}^{(1)}}\min\{n_{p,i},n_{q,i-1}\}}\right)\left(\prod_{t=1}^{r_l^{(1)}} z_{t,l}^{-\frac{1}{2}(t-1)n_{t,l}}\right)\right] W(k\Lambda_0)[[z_{r_l^{(1)},l}, \ldots, z_{1,1}]].$$

補題 4, 5 および性質 (2) を加味して, M_{QP} の元 (4) のエネルギーに対して次の条件 (C1)-(C3) を考える：

(C1) $m_{p,i} \in \rho_i n_{p,i} + \frac{1}{2}\mathbb{Z} \quad (1 \leq p \leq r_i^{(1)}, 1 \leq i \leq l)$.

(C2) $m_{p,i} \leq -(2p-1)\rho_i n_{p,i} - \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{r_{i-1}^{(1)}}\min\{n_{p,i}n_{q,i-1}\} \quad (1 \leq p \leq r_i^{(1)}, 1 \leq i \leq l)$.

(C3) $n_{p,i} = n_{p+1,i}$ のとき, $m_{p+1,i} \leq m_{p,i} - n_{p,i} \quad (1 \leq p \leq r_i^{(1)}-1, 1 \leq i \leq l)$.

M_{QP} の元のうち, これらの条件 (C1)-(C3) を満たすもの全体を B_W とする：

$$B_W = \bigcup_{\substack{0\leq r_1^{(k)}\leq\cdots\leq r_1^{(1)} \\ \vdots \\ 0\leq r_l^{(k)}\leq\cdots\leq r_l^{(1)}}} \{b \in M_{QP} \mid b \text{ は条件 (C1)-(C3) を満たす }\}.$$

本稿の 1 つ目の主結果は次のとおりである．

定理 6. 集合

$$\mathcal{B}_W = \{bv_0 \mid b \in B_W\}$$

は主部分空間 $W(k\Lambda_0)$ の基底である．

非負整数 $p_i^{(s)}$ を $p_i^{(s)} = r_i^{(s)} - r_i^{(s+1)}$ で定める．すなわち, 単項式 (4) に対して $p_i^{(s)}$ はカラーが i 電荷が s の quasi-particle の数を表す．単項式 (4) の i 成分に対応する列を $\mathcal{P}_i = (p_i^{(1)}, \ldots, p_i^{(k)})$ とする．いま, 定理 6 より主部分空間 $W(k\Lambda_0)$ の指標が次のように計算される．

定理 7.

$$\mathrm{ch}\ W(k\Lambda_0) = \sum_{\mathcal{P}} \frac{q^{\frac{1}{2}\sum_{i,r=1}^{l}\langle(\alpha_i)_{(0)},(\alpha_j)_{(0)}\rangle \sum_{s,t=1}^{k}\min\{s,t\}p_i^{(s)}p_j^{(t)}}}{\prod_{i=1}^{l}\prod_{s=1}^{k}(q^{\frac{1}{2}};q^{\frac{1}{2}})_{p_i^{(s)}}} \prod_{i=1}^{l} y_i^{\sum_{s=1}^{k} sp_i^{(s)}}$$

ここで列 $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_l, \ldots, \mathcal{P}_1)$ は lk 個の非負整数からなる．

4 可積分最高ウェイト加群

この章では主部分空間 $W(k\Lambda_0)$ の quasi-particle 基底から最高ウェイト加群 $L(k\Lambda_0)$ の基底を構成することを目指す．$Q = \sum_{i=1}^{l} \mathbb{Z}\alpha_i \subset L$ とする．$e_\alpha \in \mathbb{C}[L]$ $(\alpha \in Q)$ の $\hat{\mathfrak{g}}[\nu]$ 上の随伴作用を次で定義する：

$$\begin{aligned}
&e_\alpha c e_\alpha^{-1} = c, \\
&e_\alpha d e_\alpha^{-1} = h - \alpha(h) \quad (h \in \mathfrak{h}_{(0)}), \\
&e_\alpha h(m) e_\alpha^{-1} = h(m) \quad (m \neq 0), \\
&e_\alpha x_\beta^\nu(m) e_\alpha^{-1} = \prod_{j=0}^{3} (-\zeta^j)^{\langle \nu^j \alpha, \beta\rangle} x_\beta^\nu(m - \langle \alpha, \beta_{(0)}\rangle).
\end{aligned}$$

次の補題により正ルートに対する頂点作用素のみを考えれば良いことがわかる．

補題 8. 頂点作用素 $2^{\frac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{2}}(1+\zeta)^{-\langle\nu\alpha,\alpha\rangle} x_\alpha^\nu(z)$ を $\tilde{x}_\alpha^\nu(z)$ とおく．$p + q = k$ であるような非負整数 p, q に対して次が成立する：

$$\frac{1}{p!} E^-(\alpha, z)(z\tilde{x}_\alpha^\nu(z))^p E^+(\alpha, z) = \frac{C_\alpha}{q!} (z\tilde{x}_{-\alpha}^\nu(z))^q e_\alpha z^{\alpha_{(0)} + \frac{k\langle\alpha_{(0)},\alpha_{(0)}\rangle}{2}},$$

ここで C_α は α ごとに定まる 0 でない複素数．

実際, 補題 8 を用いて $L(k\Lambda_0) = U(\hat{\mathfrak{h}}[\nu]^-)QW(k\Lambda_0)$ であることが示される．ところが, 各々の基底を掛け合わせるだけでは基底とならない．従って, $U(\hat{\mathfrak{h}}[\nu]^-)$ の基底を

$$B_H = \left\{ h_{\alpha_l} \cdots h_{\alpha_1} \;\middle|\; \begin{array}{l} h_{\alpha_i} = \alpha_i(-m_{t_i,i})^{n_{t_i,i}} \cdots \alpha_i(-m_{1,i})^{n_{1,i}}, i = 1, \ldots, l, \\ t_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, m_{t_i,i} > \cdots > m_{1,i}, m_{p,i} \in \frac{1}{2}\mathbb{N}, n_{p,i} \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

とし, $W(k\Lambda_0)$ の基底 $\mathcal{B}_W$ を制限することで $L(k\Lambda_0)$ の基底を得たい．M'_{QP} をすべての quasi-particle の電荷が k 未満であるような M_{QP} の部分集合とする．$B'_W = B_W \cap M'_{QP}$ とし, $\mathcal{B}_W$ の制限を

$$\mathcal{B}'_W = \{bv_0 \mid b \in B'_W\}$$

で与える．これにより, 本稿 2 つ目の主結果が次のように得られる．

定理 9. 集合

$$\mathcal{B}_L = \{e_\mu h b v_0 \mid \mu \in Q, h \in B_H, b \in B'_W\}$$

は $L(k\Lambda_0)$ の基底である.

この基底から $L(k\Lambda_0)$ の指標を計算したい. そのため, 次の章で最高ウェイト加群 $L(k\Lambda_0)$ の真空空間を定義し, $L(k\Lambda_0)$ との関係を見る.

5 真空空間

$L(k\Lambda_0)$ の真空空間 $L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}[\nu]^+}$ は次で定義される：

$$L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}[\nu]^+} = \{v \in L(k\Lambda_0) \mid \hat{\mathfrak{h}}[\nu]^+ \cdot v = 0\}.$$

このとき, ベクトル空間として次の同型が存在することが知られている [5]：

$$U(\hat{\mathfrak{h}}[\nu]^-) \otimes L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}[\nu]^+} \simeq L(k\Lambda_0). \tag{5}$$

同型 (5) は次の関係式を誘導する：

$$\mathrm{ch}\ L(k\Lambda_0) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{l}(q^{\frac{1}{2}}; q^{\frac{1}{2}})_\infty} \mathrm{ch}\ L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}[\nu]^+}. \tag{6}$$

従って, $L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}[\nu]^+}$ の基底を構成すれば良いことがわかる.

列 $\mathcal{R}' = \left(n_{r_l^{(1)},l}, \ldots, n_{1,1}\right)$ から定まる頂点作用素を $x^\nu_{\mathcal{R}'}(z_{r_l^{(1)},l}, \ldots, z_{1,1}) = x^\nu_{n_{r_l^{(1)},l}\alpha_l}(z_{r_l^{(1)},l}) \cdots x^\nu_{n_{1,1}\alpha_1}(z_{1,1})$ で表す. このとき, 対応する $\mathcal{Z}$-作用素を

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\mathcal{R}'} = (z_{r_l^{(1)},l}, \ldots, z_{1,1}) =& E^-(\alpha_l, z_{r_l^{(1)},l})^{n_{r_l^{(1)},l}/k} \cdots E^-(\alpha_1, z_{1,1})^{n_{1,1}/k} x^\nu_{\mathcal{R}'}(z_{r_l^{(1)},l}, \ldots, z_{1,1}) \\ &\times E^+(\alpha_l, z_{r_l^{(1)},l})^{n_{r_l^{(1)},l}/k} \cdots E^+(\alpha_1, z_{1,1})^{n_{1,1}/k}\end{aligned}$$

で定義し, そのフーリエ係数を

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{R}'}(z_{r_l^{(1)},l}, \ldots, z_{1,1}) = \sum_{m_{r_l^{(1)},l}, \ldots, m_{1,1} \in \frac{1}{4}\mathbb{Z}} \mathcal{Z}_{\mathcal{R}'}(m_{r_l^{(1)},l}, \ldots, m_{1,1}) z_{r_l^{(1)},l}^{-m_{r_l^{(1)},l} - n_{r_l^{(1)},l}} \cdots z_{1,1}^{-m_{1,1}-n_{1,1}}$$

によって定める. 同型 (5) から得られる射影 $\pi : L(k\Lambda_0) \to L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}[\nu]^+}$ を考えることで次が得られる：

$$\pi : x^\nu_{\mathcal{R}'}(z_{r_l^{(1)},l}, \ldots, z_{1,1})v_0 \mapsto \mathcal{Z}_{\mathcal{R}'}(z_{r_l^{(1)},l}, \ldots, z_{1,1})v_0.$$

従って, 定理 9 より次の結果が得られる.

定理 10. $\mu \in Q$ と B'_W に課された条件を満たす列 $\mathcal{R}' = \left(n_{r_l^{(1)},l}, \ldots, n_{1,1}\right)$ と $\left(m_{r_l^{(1)},l}, \ldots, m_{1,1}\right)$ に対して

$$e_\mu \mathcal{Z}_{\mathcal{R}'}(m_{r_l^{(1)},l}, \ldots, m_{1,1})v_0$$

であるようなベクトル全体の集合を考える. このとき, この集合は真空空間 $L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}[\nu]^+}$ の基底である.

集合 B'_W の quasi-particle 単項式は電荷が k の quasi-particle を含まないのであった. その事実を強調するために, B'_W の元に対する列を $\mathcal{P}^{(k-1)}$ で表す.

いま, 定理 10 と関係式 (6) から $L(k\Lambda_0)$ の指標が次のように計算される.

定理 11.

$$\mathrm{ch}\ L(k\Lambda_0) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{l}(q^{\frac{1}{2}};q^{\frac{1}{2}})_\infty} \sum_{\eta\in P_0Q} q^{\langle\eta,\eta\rangle/2k} \prod_{i=1}^{l} y_i^{\eta_i} \sum_{\mathcal{P}^{(k-1)}} \frac{q^{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}\langle(\alpha_i)_{(0)},(\alpha_j)_{(0)}\rangle \sum_{s,t=1}^{k-1} D_{s,t}^{(k)} p_i^{(s)} p_j^{(t)}}}{\prod_{i=1}^{l}\prod_{s=1}^{k-1}(q^{\frac{1}{2}};q^{\frac{1}{2}})_{p_i^{(s)}}}.$$

ここで列 $\mathcal{P}^{(k-1)}$ は

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{s=1}^{k-1} s p_i^{(s)}(\alpha_i)_{(0)} \in \eta + kP_0Q$$

を満たす $l(k-1)$ 個の非負整数からなり,

$$D_{s,t}^{(k)} = \min\{s,t\} - \frac{st}{k}$$

であるとする.

謝辞

最後に, 研究集会「組合せ論的表現論および関連分野との連携」の開催にご尽力くださり, 筆者に講演の機会を与えてくださった茂木先生に感謝の意を表すとともに, 尾角先生, 国場先生, 今野先生, 中西先生, 山田先生および山根先生の還暦のお祝いを申し上げます.

参考文献

[1] M. Butorac, S. Kožić and M. Primc, Parafermionic bases of standard modules for affine Lie algebras, Mathematische Zeitschrift (2020), published online, https://doi.org/10.1007/s00209-020-02639-w.

[2] G. Georgiev, Combinatorial construction of modules for infinite-dimensional Lie algebras, II, Parafermionic space, arXiv:q-alg/9504024.

[3] J. Lepowsky, Calculus of twisted vertex operators, Proc. Nat. Acid. Sci. USA, **82** (1985), 8295-8299.

[4] J. Lepowsky and M. Primc, Structure of the standard modules for the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$, Contemporary Math., **46**, Amer. Math. Soc, Providence, RI, 1985.

[5] J. Lepowsky and R.L. Wilson, The structure of standard modules, I: Universal algebras and the Rogers-Ramanujan identities, Invent. Math. **77** (1984), 199-290.

[6] M. Okado and R. Takenaka, Parafermionic bases of standard modules for twisted affine Lie algebras of type $A_{2l-1}^{(2)}, D_{l+1}^{(2)}, E_6^{(2)}$ and $D_4^{(3)}$, arXiv:2109.08892v1.

[7] R. Takenaka, Vertex algebraic construction of modules for twisted affine Lie algebras of type $A_{2l}^{(2)}$, (in preparation).