

〈論 文〉

内生的情報取得と情報設計

荒 戸 寛 樹*

1 初めに

経済主体が互いに異なる情報や予想を持っている場合に、これらの主体が取る行動を分析する試みは、ベイジアンゲームの分野において盛んに行われており、様々な経済理論分析に応用されている¹⁾。中でも、情報の送り手となる経済主体が一人、情報の受け取り手となる経済主体が多数いる場合の状況において、情報の精度が変化することの経済厚生への影響や、情報の送り手の目的関数を最大にする情報構造を求める問題は活発に研究されている。前者は**情報の社会的価値**（social value of information）の研究と呼ばれ、後者は、この問題についての手法的革新をもたらした Bergemann and Morris（2013, 2016）以降、**情報設計問題**（information design）と呼ばれている²⁾。一方、多くの情報設計問題の研究においては、情報構造は外生であるか、もしくは情報の送り手のみである。宇井（2018）において指摘されているように、情報の受け手であるプレイヤーが内生的に情報取得を行う場合には、最適な情報構造は情報取得が外生的な場合とは異なってくるであろう³⁾。

本稿では、受け取る情報の構造を情報の受け手が内生的に選択する**内生的情報取得**（endogenous information acquisition）と、内生的情報取得の下での情報設計問題に関する先行研究を整理し、今後の展望を考察する。第2章では、ベイジアンゲームを始めとして関連分野に関する基礎事項を確認する。第3章では多くの先行研究に共通して用いられている内生的情報取得の基本モデルを解説する。第4章では内生的情報取得に関して、特にシグナルが一つのケースを中心に複数均衡の可能性について Hellwig et al.（2012）に従って解説する。第5章では内生的情報取得を組み込んだモデルを用いて情報の社会的価値や最適情報構造を考察している先行研究を紹介する。第6章で結論に変えてまとめと今後の展望について述べる。

* 東京都立大学大学院経営学研究科准教授

1) 産業組織論への応用については Vives（2008）、マクロ経済学およびファイナンスへの応用は Veldkamp（2011）や Angeletos and Lian（2016）が詳しい。また、マクロ経済学への応用に関する日本語の解説論文としては荒戸・中嶋（2010）や奥田（2018）がある。

2) Bergemann and Morris（2013）以前の情報の社会的価値や最適情報構造に関する代表的な研究には、Morris and Shin（2002）、Angeletos and Pavan（2007）、Cornand and Heinemann（2008）、Dewan and Myatt（2008）、Ui and Yoshizawa（2015）などがある。利得構造が2次関数で情報構造が正規分布のベイジアンゲーム（LQGゲーム）における情報設計問題についての日本語での文献には、宇井（2018）がある。

3) 宇井（2018）、162頁を参照。

2 基礎概念の整理

2.1 ベイジアンゲーム

多数のプレイヤーが $[0, 1]$ の連続体上に一様に存在しているとする。プレイヤー i の行動を $a_i \in A_i = \mathbb{R}$ とする。また、全てのプレイヤーの行動の組を $a = (a_i)_{i=0}^1 \in A$ とする。経済の状態の集合を $\Theta = \mathbb{R}$ とし、その上の確率分布を F 、密度関数を f とする。プレイヤー i の利得関数を $u_i: A \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ とする。利得関数の組 $u = (u_i)_{i=0}^1$ と確率分布 F の組を**利得構造**と呼ぶ。

各プレイヤーは状態の実現値 θ を知ることができず、 θ に関する情報 $z_i \in \mathbb{R}^n$ を受け取るとする。全てのプレイヤーの情報の組を $z = (z_i)_{i=0}^1 \in Z$ とし、 z は Z 上の確率分布 $\Psi(\cdot | \theta)$ に従い、その密度関数を $\phi(\cdot | \theta)$ とする。情報の組 z の確率分布 Ψ を**情報構造**と呼ぶ。

利得構造 (u, F) と情報構造 Ψ の組を、ベイジアンゲームという。

2.2 信念

上のベイジアンゲームにおいて、経済の状態や他のプレイヤーのタイプ（情報）は確率的に定まるが、プレイヤーはその実現値 θ や z_{-i} を観測できない。この場合、経済主体はこれらの変数に関して自らが抱く確率分布に基づいて行動を決定する。この確率分布は、この経済主体の**信念** (belief) と呼ばれる。

■**信念の更新** 経済の状態 θ は確率密度関数 $f(\theta)$ に従っているとする。経済主体は θ の確率分布を知っている、実現値は観測することができないと仮定する。このとき、以下のような順序で経済が進む場合を考えてみよう。

1. 自然が Θ から値 θ を f に従ってランダムに1つ引く。
2. 経済主体は、 θ と相関のある確率変数 Z の実現値 z を1つ受け取る。
3. 経済主体が、 z を使って θ に関する予想を更新する。

経済の状態についての無条件の確率密度関数 $f(\theta)$ は自然が用いる確率分布を表しているとともに、経済主体が情報を受け取る前に θ に対して抱いている確率分布を表している。これを、 θ に関する経済主体の**事前信念** (prior belief) と呼ぶ。

経済主体が θ と相関のある確率変数 Z の実現値を1つ観測したとする。この実現値 z は経済変数の実現値 θ に関する情報（シグナル）として機能する。ある値 θ の下での Z の条件付き確率密度関数を $\phi(z | \theta)$ で表すことにする。このとき、情報 z を観測した下での θ の条件付き確率密度関数 $f(\theta | z)$ は、ベイズの法則

$$f(\theta | z) = \frac{f(\theta)\phi(z | \theta)}{f(z)} \quad (1)$$

によって計算することができる。ベイズの法則は、経済主体が情報 z を観測して、 Θ に関する信念を $f(\theta)$ から $f(\theta | z)$ に更新するプロセスをモデル化していると解釈することができる。 $f(\theta | z)$ は情報 z の観測により更新された信念であり、 θ に関する経済主体の**事後信念** (posterior belief) と呼ばれる。

■**例：正規分布** 状態 θ は平均 μ 、分散 σ_θ^2 の正規分布に従うとする。したがって経済主体の θ に

関する事前信念は

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\theta^2}} \exp\left[-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\sigma_\theta^2}\right]$$

で表される。確率変数 Z は以下を満たすとする。

$$Z = \theta + u, \quad u \sim \mathcal{N}(0, \sigma_u^2),$$

このとき Z は、 θ で条件付けると、平均 θ 、分散 σ_u^2 の正規分布に従う。このとき、 Z の実現値である情報 z を受け取った経済主体の、 θ に関する事後信念は

$$f(\theta|z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_\theta^{-2} + \sigma_u^{-2})^{-1}}} \exp\left[-\frac{\left(\theta - \frac{\sigma_\theta^{-2}\mu + \sigma_u^{-2}z}{\sigma_\theta^{-2} + \sigma_u^{-2}}\right)^2}{2(\sigma_\theta^{-2} + \sigma_u^{-2})^{-1}}\right]$$

で表される⁴⁾。つまり、事前信念と、情報の条件付き分布がともに正規分布であるならば、以下の3つが言える。

1. 事後信念も正規分布である。
2. 事後信念の平均は、事前信念の平均と情報の加重平均であり、その重みは精度（分散の逆数）である。

$$\mathbb{E}(\theta|z) = \frac{\sigma_\theta^{-2}\mu + \sigma_u^{-2}z}{\sigma_\theta^{-2} + \sigma_u^{-2}}$$

3. 事後信念の精度は、事前信念の精度と情報の精度の和である。

$$[\mathbb{V}(\theta|z)]^{-1} = \sigma_\theta^{-2} + \sigma_u^{-2}$$

多数のシグナルを受け取る場合でも、事前信念と全ての情報の条件付き分布が正規分布であれば、上の3つの性質から、信念の更新を全ての情報に対して逐次的に行うことで事後分布が得られ、更新に用いる情報の順番は事後分布に影響しない。すなわち、 n 個の情報 $z = (z_1, \dots, z_n)$ を受け取る時、事前信念が $\theta \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_\theta^2)$ 、情報 z_i の条件付き分布が $z_i|\theta \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma_i^2)$ のとき、事後分布は正規分布となり、平均と精度はそれぞれ

$$\mathbb{E}(\theta|z) = \frac{\sigma_\theta^{-2}\mu + \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2}z_i}{\sigma_\theta^{-2} + \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2}},$$

$$[\mathbb{V}(\theta|z)]^{-1} = \sigma_\theta^{-2} + \sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2}$$

となる。

2.3 対称 LQG ゲーム

利得関数が2次関数で状態と情報の分布が正規分布であるベイジアンゲームを LQG (Linear-Quadratic Gaussian) ゲームという⁵⁾。本稿では主に LQG ゲームを考え、さらに以下のクラス

4) 証明は補論 A を参照。

5) LQG ゲームの厳密な定義および詳しい解説は宇井 (2018) を参照。

(対称 LQG ゲーム) に限定する。

- 仮定 1 : 経済の状態は全てのプレイヤーに共通である⁶⁾とし、その状態 θ は 1 次元の実数であるとする。
- 仮定 2 : 利得関数は各プレイヤーに共通で、以下の関数型を持つとする⁷⁾。

$$u_i(a, \theta) = -a_i^2 + 2r\bar{a}a_i + 2(1-r)\theta a_i + h(a_{-i}, \theta) \quad (2)$$

ここで $r < 1$ であり、関数 h は任意の 2 次関数である。利得関数の第 4 項 $h(a_{-i}, \theta)$ はプレイヤー i の行動が含まれないので、この項はプレイヤー i の最適行動には影響を与えない。

プレイヤー共通の状態 θ は正規分布に従い、期待値を μ , 分散を σ_θ^2 とする。

情報構造は以下の通りとする。プレイヤー $i \in [0, 1]$ はそれぞれ情報 z_i を受け取る。情報 z_i は

$$z_i = \theta + b \cdot u + d \cdot v_i, \quad u \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad v_i \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (3)$$

に従うとする。ここで $b \cdot u$ は θ とは独立で、全てのプレイヤーに共通のノイズ、 $d \cdot v_i$ は θ と独立であり、かつプレイヤー間で独立かつ同じ分布を持つノイズである。この二つのノイズをそれぞれ **共通ノイズ** と **個別ノイズ** と呼ぶ。 b と d は正の定数であり、それぞれ共通ノイズと個別ノイズの標準偏差を表している。

■ **ベイズナッシュ均衡** 上で提示された対称 LQG ゲームのベイズナッシュ均衡を求める。各プレイヤーは自分のタイプ (情報) z_i の関数として戦略を決める。つまり、プレイヤー i の戦略は関数 $a_i: Z \rightarrow A_i$ であり、

$$a_i = a_i(z_i)$$

に従って行動 a_i を決定する。

プレイヤー i の最適反応戦略 a_i^* は、他のプレイヤーの戦略を所与として、自身の事後信念の下で計算した期待利得を最大にする戦略である。ベイズナッシュ均衡は、全てのプレイヤーが他のプレイヤーに戦略に対する最適反応戦略となっている戦略の組である。

利得関数 (2) より、プレイヤー i の一階の条件は $-2a_i(z_i) + 2r\mathbb{E}(\bar{a} | z_i) + 2(1-r)\mathbb{E}(\theta | z_i) = 0$, つまり、

$$a_i^*(z_i) = (1-r)\mathbb{E}(\theta | z_i) + r\mathbb{E}(\bar{a} | z_i) \quad (4)$$

となる。ここで、線型対称均衡 $a_i^*(z_i) = \alpha^*(z_i) = A\mu + Bz_i$ を考える⁸⁾と、 $\bar{a} = A\mu + B(\theta + bu)$ である。これとベイズの法則を使うと、(4) は

$$\alpha^*(z_i) = (1-r) \frac{\sigma_\theta^{-2}\mu + (b^2 + d^2)^{-1}z_i}{\sigma_\theta^{-2} + (b^2 + d^2)^{-1}} + r \left(A\mu + B \cdot \frac{(\sigma_\theta^2 + b^2)^{-1}\mu + d^{-2}z_i}{(\sigma_\theta^2 + b^2)^{-1} + d^{-2}} \right)$$

と書くことができる。この式と $\alpha^*(z_i) = A\mu + Bz_i$ の係数を比較することにより、

6) 全てのプレイヤーに共通の状態のみが存在する利得構造を共通価値の利得構造という。

7) 全てのプレイヤーが共通の利得関数を持つ LQG ゲームを LQG チームという。

8) Angeletos and Pavan (2007) は、この均衡は線型戦略の中で一意なベイズナッシュ均衡であることを証明している。また、Ui and Yoshizawa (2013) は Radner (1962) の定理を用いてこの線型対称均衡が一意なベイズナッシュ均衡であることを証明している。

$$A = (1-r) \cdot \frac{\sigma_\theta^{-2}}{\sigma_\theta^{-2} + (b^2 + d^2)^{-1}} + rA + rB \cdot \frac{(\sigma_\theta^2 + b^2)^{-1}}{(\sigma_\theta^2 + b^2)^{-1} + d^{-2}},$$

$$B = (1-r) \cdot \frac{(b^2 + d^2)^{-1}}{\sigma_\theta^{-2} + (b^2 + d^2)^{-1}} + rB \cdot \frac{d^{-2}}{(\sigma_\theta^2 + b^2)^{-1} + d^{-2}}$$

が得られ、 (A, B) に関するこの連立方程式を解くことにより、ベイズナッシュ均衡

$$a^*(z_i) = A\mu + Bz_i, \quad (5)$$

$$A = 1 - B, \quad B = \frac{(\sigma_\theta^2 + b^2)^{-1} + d^{-2}}{(1-r)^{-1}(\sigma_\theta^2 + b^2)^{-1} + d^{-2}} \cdot \frac{(b^2 + d^2)^{-1}}{\sigma_\theta^{-2} + (b^2 + d^2)^{-1}} \quad (6)$$

が得られる。

3 内生的情報取得のモデル

情報構造が外生的に与えられる状況では、上のベイジアンゲームのベイズナッシュ均衡を求めることによりゲームの解が得られる。

一方、情報取得が内生的である状況を考察する際は、上のベイジアンゲームが行われる前に情報取得ステージを加えた、以下のような2段階のゲームを考えることが多い。

1. (情報取得ステージ) 自然が経済の状態 θ を引き、各プレイヤーは (θ の値を知ることなしに) 情報構造を選択する。
2. (行動決定ステージ) 第1段階で選択した情報構造の下でベイジアンゲームをプレイする。

3.1 情報取得技術

本論文で紹介するモデルのうちほとんどは、情報構造を式 (3) と同じく

$$z_i = \theta + b_i \cdot u + d_i \cdot v_i \quad (7)$$

とする。ただし、内生的情報取得のモデルでは、情報取得ステージにおいてプレイヤー i が共通ノイズの標準偏差と個別ノイズの標準偏差の組 $(b_i, d_i) \in D \subset \mathbb{R}_+^2$ を選択するような状況を考える⁹⁾。これにより、プレイヤー i の情報構造は $(b_i, d_i) \in D \subset \mathbb{R}_+^2$ で特徴づけられる。内生的情報取得のモデルでは、情報の確率分布がプレイヤー間で必ずしも共通とはならない (つまり $(b_i, d_i) \neq (b_j, d_j)$ となる可能性がある) ことにも注意する必要がある。

標準偏差 (b_i, d_i) の情報を受け取るためには、情報取得費用が利得単位で $c = C(b_i, d_i)$ 必要であるとする。ただし C はどちらの引数に対しても減少関数であると仮定する¹⁰⁾。したがってプレイヤー i の利得関数は

$$u_i(a, \theta) = -a_i^2 + 2r\bar{a}a_i + 2(1-r)\theta a_i + h(a_{-i}, \theta) - C(b_i, d_i)$$

9) Hellwig et al. (2012) では、各プレイヤーがそれぞれ情報を複数受け取る状況を考えているが、本論文では簡単化のため各プレイヤーが受け取る情報はそれぞれ1つずつであるとする。このように簡単化しても主要な結論に変更は生じない。

10) この仮定はノイズを小さくするために追加的な費用がかかるという現実を反映している。

となる。選択可能な情報構造の集合（このモデルの場合は、情報の生成プロセス（7）と選択可能な標準偏差の組の範囲 D ）とその上で定義される情報取得費用関数 C の組を**情報取得技術**と呼ぶ。

3.2 情報選択行動

モデルは 2 段階のゲームとなっているため、後ろ向き帰納法を用いて第 1 ステージの情報選択行動を導く。

標準偏差の組 $((b_i, d_i))_{i=0}^1$ によって特徴づけられる情報構造を所与とし、さらに情報取得ステージでの対称均衡 $(b_i, d_i) = (b^*, d^*)$ for all i に注目する。

第 1 ステージにおいて、プレイヤー i は (b_i, d_i) を選択し、 i 以外のプレイヤーは全員 (b, d) を選択したとしよう。このとき、プレイヤー i 以外のプレイヤーは 2.3 節の対称 LQG ゲームをプレイすると考えて良い¹¹⁾。したがって、プレイヤー i 以外のプレイヤー j の第 2 ステージでの戦略 $\alpha^*(z_j)$ は式（5）と（6）より、

$$\alpha^*(z_j) = A^* \mu + B^* z_j, \quad (8)$$

$$A^* = 1 - B^*, \quad B^* = \frac{(\sigma_\theta^2 + b^2)^{-1} + d^{-2}}{(1-r)^{-1}(\sigma_\theta^2 + b^2)^{-1} + d^{-2}} \cdot \frac{(b^2 + d^2)^{-1}}{\sigma_\theta^{-2} + (b^2 + d^2)^{-1}} \quad (9)$$

となる。一方、プレイヤー i は自分以外のプレイヤーが上述の α^* をプレイすることを所与として自身の最適反応をプレイする。プレイヤー i の最適反応は、一階の条件（4）と $\bar{a} = A^* \mu + B^*(\theta + bu)$ より、

$$\begin{aligned} \alpha(z_i) &= (1-r) \cdot \frac{\sigma_\theta^{-2} \mu + (b_i^2 + d_i^2)^{-1} z_i}{\sigma_\theta^{-2} + (b_i^2 + d_i^2)^{-1}} + r \left[A^* \mu + B^* \cdot \underbrace{\frac{(\sigma_\theta^2 + b_i b)^{-1} \mu + (b_i^2 + d_i^2 - b_i b)^{-1} z_i}{(\sigma_\theta^2 + b_i b)^{-1} + (b_i^2 + d_i^2 - b_i b)^{-1}}}_{= \mathbb{E}(\theta + bu | z_i)} \right] \\ &= \left(\frac{(1-r) \sigma_\theta^{-2}}{\sigma_\theta^{-2} + (b_i^2 + d_i^2)^{-1}} + r \left[A^* + \frac{B^* (\sigma \Sigma_\theta^2 + b_i b)^{-1}}{(\sigma_\theta^2 + b_i b)^{-1} + (b_i^2 + d_i^2 - b_i b)^{-1}} \right] \right) \mu \\ &\quad + \left(\frac{(1-r)(b_i^2 + d_i^2)^{-1}}{\sigma_\theta^{-2} + (b_i^2 + d_i^2)^{-1}} + \frac{r B^* (b \Sigma_i^2 + d \Sigma_i^2 - b_i b)^{-1}}{(\sigma_\theta^2 + b_i b)^{-1} + (b_i^2 + d_i^2 - b_i b)^{-1}} \right) z_i \end{aligned} \quad (10)$$

となる。事前の期待利得は式（2）より以下ようになる。

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u_i((\alpha(z_i), (\alpha^*(z_j))_{j \neq i}), \theta)] &= -\mathbb{V}(\alpha(z_i)) \\ &\quad + 2r \cdot \text{Cov}(\alpha(z_i), \bar{a}) \\ &\quad + 2(1-r) \text{Cov}(\theta, \alpha(z_i)) \\ &\quad + \mathbb{E}(h(a_{-i}, \theta)) \\ &\quad - C(b_i, d_i) \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、 $\bar{a}$ は共通の標準偏差 (b, d) から情報を受け取った、 i 以外のプレイヤーの行動の平均である。つまり、 $\phi(\cdot; m, \sigma^2)$ を平均 m 、分散 σ^2 の正規分布の確率密度関数として、

11) プレイヤーは連続体で存在するので、プレイヤー i の測度はゼロ。従って、プレイヤー i 単独で行動の平均 $\bar{a}$ に影響を与えることはない。

$$\bar{a} = \int_{v_j \in \mathbb{R}} \alpha^*(z_j; b, d) \phi(v_j; 0, d^2) dv_j$$

である。プレイヤー i は第 1 ステージに式 (11) で表される期待利得を最大化するように、標準偏差の組 (b_i, d_i) を選択可能な範囲 D から選ぶ。この問題を解くことにより、第 1 ステージでの最適反応関数（もしくは対応） $(b_i, d_i) = q(b, d)$ が得られ、 q の不動点 (b^*, d^*) が第 1 ステージでの（対称）均衡戦略となる。次節では、主に Hellwig et al. (2012) に従いながら、典型的ないくつかの情報取得技術に関して、均衡の一意性を議論する。

4 情報取得技術と複数均衡

本節では、3 節で構築したシンプルな内生的情報取得モデルを用いて、主に Hellwig et al. (2012) に従って、情報取得技術の違いが複数均衡の有無にどのように関わっているかを紹介する。

4.1 ケース 1：完全取得と非取得の離散選択の場合

情報選択が、情報の完全取得 ($b_i = d_i = 0$) と完全非取得 ($b_i + d_i = \infty$) の二つからどちらか一方を選ぶ離散選択のケースを考えよう。この場合は、 τ を正の定数として、情報取得技術は全ての i に対して

$$D = \{(0, 0)\} \cup \{(b_i, d_i) | b_i = \infty \text{ or } d_i = \infty\}, \quad (12)$$

$$C(b_i, d_i) = \begin{cases} \tau & \text{if } (b_i, d_i) = (0, 0), \\ 0 & \text{if } b_i = \infty \text{ or } d_i = \infty \end{cases} \quad (13)$$

である。各プレイヤーの第 1 ステージの戦略は「完全な情報を受け取る」か「情報を全く受け取らない」かのどちらかである。これと対称性から、プレイヤー i は、他のプレイヤーのうち「完全な情報を受け取る」という戦略を選んだプレイヤーの割合 $P (\in [0, 1])$ を所与として、期待利得の高い方の戦略を選択する。情報を全く受け取らないプレイヤーの第 2 ステージの戦略は 1 階の条件である式 (4) より

$$\alpha^*(z_i; \infty, \infty) = \mu, \quad (14)$$

一方、完全な情報を受け取ったプレイヤーの第 2 ステージの最適戦略は同じく式 (4) より $\alpha^*(\theta; 0, 0) = (1-r)\theta + r[P\alpha^*(\theta; 0, 0) + (1-P)\mu]$ 、すなわち、

$$\alpha^*(\theta; 0, 0) = \frac{1-r}{1-rP} \cdot \theta + \frac{r(1-P)}{1-rP} \cdot \mu \quad (15)$$

となる。したがって、行動の平均 $\bar{a}$ は

$$\begin{aligned} \bar{a} &= P\alpha^*(\theta; 0, 0) + (1-P)\alpha^*(z_i; \infty, \infty) \\ &= \frac{P(1-r)}{1-rP} \cdot \theta + \frac{rP(1-P)}{1-rP} \cdot \mu + (1-P) \cdot \mu \\ &= \frac{(1-r)P}{1-rP} \cdot \theta + \frac{1-P}{1-rP} \cdot \mu \end{aligned} \quad (16)$$

となる。ここから、プレイヤー i が情報を取得した場合の（しなかった場合と比べた）期待利得の増加は、式 (11) (14), (15), (16) より、

$$-\mathbb{V}(\alpha^*(\theta; 0, 0)) - [-\mathbb{V}(\alpha^*(z_i; \infty, \infty))]$$

$$\begin{aligned}
& +2r[\text{Cov}(\alpha^*(\theta; 0, 0), \bar{a}) - \text{Cov}(\alpha^*(z_i; \infty, \infty), \bar{a})] \\
& +2(1-r)[\text{Cov}(\theta, \alpha^*(\theta; 0, 0)) - \text{Cov}(\theta, \alpha^*(z_i; \infty, \infty))] \\
& -\tau \\
& = -\left(\frac{1-r}{1-rP}\right)^2 \sigma_\theta^2 - 0 \\
& +2r\left[\frac{1-r}{1-rP} \cdot \frac{(1-r)P}{1-rP} \cdot \sigma_\theta^2 - 0\right] \\
& +2(1-r)\left[\frac{1-r}{1-rP} \cdot \sigma_\theta^2 - 0\right] \\
& -\tau \\
& = \frac{1-r}{1-rP} \left[-\frac{1-r}{1-rP} + \frac{2r(1-r)P}{1-rP} + 2(1-r)\right] \sigma_\theta^2 - \tau \\
& = \left(\frac{1-r}{1-rP}\right)^2 \sigma_\theta^2 - \tau
\end{aligned}$$

したがって、プレイヤー i の第 1 ステージでの最適戦略は、

$$\tau \geq \left(\frac{1-r}{1-rP}\right)^2 \sigma_\theta^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{「非取得」} \\ \text{無差別} \\ \text{「取得」} \end{cases}$$

ここから、 $r > 0$ のとき（すなわち第 2 ステージでの行動に戦略的補完性が存在するとき）は、 P が大きい（すなわち他のプレイヤーの多くが情報を取得する）ほど、自らが情報取得によって得られる利得も大きくなり、情報取得が最適行動になりやすくなる。言い換えると、**第 2 ステージでの行動に戦略的補完性がある場合は、第 1 ステージでの情報取得にも戦略的補完性が生まれる**（Hellwig and Veldkamp, 2009）。この情報取得に関する戦略的補完性が、情報取得行動における複数均衡の可能性を生じさせる。それは、均衡での情報取得者の割合を P^* として、以下の命題に表される。

命題 1 （Hellwig and Veldkamp, 2009）情報取得技術が（12）と（13）で表される離散選択の場合¹²⁾、以下の 1 と 2 が成立する。

1. $r > 0$ の場合;

$\tau \geq \sigma_\theta^2$ ならば均衡は一意に定まり、 $P^* = 0$ となる（無情報均衡。どのプレイヤーも情報を取得しない均衡）。 $\tau \leq (1-r)^2 \sigma_\theta^2$ ならば均衡は一意に定まり、 $P^* = 1$ となる（完全取得均衡。全てのプレイヤーが情報を取得する均衡）。 $\tau \in ((1-r)^2 \sigma_\theta^2, \sigma_\theta^2)$ ならば、均衡は複数存在し、無情報均衡、完全取得均衡の他に、部分取得均衡（ある割合の人が情報を取得し、残りは取得しない均衡）となる $P^* = \bar{P} \in (0, 1)$ が 1 つ存在する。

2. $r < 0$ の場合;

12) Hellwig and Veldkamp (2009) では、ノイズの標準偏差が有限のシグナルが有限個存在している状況についても定性的に同様の結論が得られることが証明されている。

任意の τ に対して均衡が一意に定まる。 $\tau \leq \sigma_\theta^2$ ならば完全取得均衡, $\tau \geq (1-r)^2 \sigma_\theta^2$ ならば無情報均衡, $\tau \in (\sigma_\theta^2, (1-r)^2 \sigma_\theta^2)$ ならば部分取得均衡となる。

4.2 ケース 2：私的情報のケース

次に、全ての i について (7) の共通ノイズの標準偏差 b_i をゼロに固定し、(θ で条件づけた) 情報がプレイヤー間で無相関になっている場合を考える。プレイヤー間で相関がない情報を**私的情報**と呼ぶ。各プレイヤーは個別ノイズの標準偏差 d_i を非負の実数の範囲から選択可能であるとする。つまり情報取得技術は全ての i に対して

$$D = \{(0, d_i) \mid d_i \geq 0\},$$

$$C(0, d_i) = c(d_i), \quad c'(d_i) < 0$$

と表すことができる¹³⁾。このケースでは、3.2 節の方法で均衡を求めることができる。式 (8), (9), (10) より,

$$\alpha^*(z_i) = \underbrace{\frac{(1-r)^{-1} \sigma_\theta^{-2}}{(1-r)^{-1} \sigma_\theta^{-2} + d_i^{-2}}}_{=A^*(=1-B^*)} \cdot \mu + \underbrace{\frac{d_i^{-2}}{(1-r)^{-1} \sigma_\theta^{-2} + d_i^{-2}}}_{=B^*} \cdot z_i,$$

第 2 ステージでの行動の平均 $\bar{a}$ は

$$\bar{a} = A^* \mu + B^* \theta,$$

プレイヤー i のステージ 2 での最適反応は式 (10) より

$$\begin{aligned} \alpha(z_i) &= \left(\frac{(1-r) \sigma_\theta^{-2}}{\sigma_\theta^{-2} + d_i^{-2}} + r A^* + r B^* \frac{\sigma_\theta^{-2}}{\sigma_\theta^{-2} + d_i^{-2}} \right) \mu + \left(\frac{(1-r) d_i^{-2}}{\sigma_\theta^{-2} + d_i^{-2}} + r B^* \frac{d_i^{-2}}{\sigma_\theta^{-2} + d_i^{-2}} \right) z_i \\ &= A^* \left(\frac{\sigma_\theta^{-2} + (1-r) d_i^{-2} + r d_i^{-2}}{\sigma_\theta^{-2} + d_i^{-2}} \right) \mu + B^* \cdot \frac{\sigma_\theta^{-2} + d_i^{-2}}{\sigma_\theta^{-2} + d_i^{-2}} \cdot \frac{d_i^{-2}}{d_i^{-2}} z_i \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\mathbb{V}(\alpha(z_i)) = \left(B^* \cdot \frac{\sigma_\theta^{-2} + d_i^{-2}}{\sigma_\theta^{-2} + d_i^{-2}} \cdot \frac{d_i^{-2}}{d_i^{-2}} \right)^2 \cdot (\sigma_\theta^2 + d_i^2), \quad (17)$$

$$\text{Cov}(\alpha(z_i), \bar{a}) = (B^*)^2 \cdot \frac{\sigma_\theta^{-2} + d_i^{-2}}{\sigma_\theta^{-2} + d_i^{-2}} \cdot \frac{d_i^{-2}}{d_i^{-2}} \cdot \sigma_\theta^2 \quad (18)$$

$$\text{Cov}(\theta, \alpha(z_i)) = B^* \cdot \frac{\sigma_\theta^{-2} + d_i^{-2}}{\sigma_\theta^{-2} + d_i^{-2}} \cdot \frac{d_i^{-2}}{d_i^{-2}} \cdot \sigma_\theta^2 \quad (19)$$

である。したがって、第 1 ステージで戦略 d_i を選んだときのプレイヤー i の期待利得は式 (11), (17), (18), (19) より,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u_i((\alpha^*(z_i; 0, d_i), (\alpha^*(z_j; 0, d^*))_{j \neq i}), \theta)] &= - \left(B^* \cdot \frac{\sigma_\theta^{-2} + d_i^{-2}}{\sigma_\theta^{-2} + d_i^{-2}} \cdot \frac{d_i^{-2}}{d_i^{-2}} \right)^2 \cdot (\sigma_\theta^2 + d_i^2) \\ &\quad + 2r \cdot (B^*)^2 \cdot \frac{\sigma_\theta^{-2} + d_i^{-2}}{\sigma_\theta^{-2} + d_i^{-2}} \cdot \frac{d_i^{-2}}{d_i^{-2}} \cdot \sigma_\theta^2 \end{aligned}$$

13) このようなケースは、Sims (2003) が提案した合理的不注意 (Rational Inattention) のモデルによって基礎づけられる。合理的不注意のモデルの基礎的事項についての解説は補論 B を参照。

$$\begin{aligned}
& + 2(1-r) \cdot B^* \cdot \frac{\sigma_\theta^{-2} + d^{-2}}{\sigma_\theta^{-2} + d_i^{-2}} \cdot \frac{d_i^{-2}}{d^{-2}} \cdot \sigma_\theta^2 \\
& + E(h(a_{-i}, \theta)) \\
& - c(d_i)
\end{aligned} \tag{20}$$

情報取得の限界利得（式（20）を d_i^{-2} で微分したもの）は情報の精度 d_i^{-2} の減少関数であるので、他のプレイヤーの戦略 d^* を所与とすると最適戦略が一意に決まり、最適反応関数 $d_i = q(d)$ が得られる。また、 $r > 0$ ならば、限界利得は d^{-2} の増加関数となる。したがって、 $q'(d^*) > 0$ 、すなわち、他のプレイヤーがより精度の高い情報を取得しようとするときにはプレイヤー i 自身もより精度の高い情報を得ることが最適反応となる。つまり、この場合もケース 1 の離散選択の場合と同様に、第 2 ステージでの行動に戦略的補完性が存在するときには、情報取得にも戦略的補完性が生じることになる。ただし、私的情報取得のケースではこの戦略的補完性は複数均衡を生み出すほどには強くなく、均衡は一意に定まることが知られている（Hellwig and Veldkamp, 2009）。

4.3 ケース 3：公共情報のケース

次のケースは、(7) の個別ノイズの標準偏差 d_i をゼロに固定し、(θ で条件づけた) 情報がプレイヤー間で完全相関になっている場合を考える（Hellwig and Veldkamp, 2009）。プレイヤー間で完全相関となっている情報を**公共情報**と呼ぶ。各プレイヤーは共通ノイズの標準偏差 b_i を非負の実数の範囲から選択可能であるとする。つまり情報取得技術は全ての i に対して

$$\begin{aligned}
D &= \{(b_i, 0) \mid b_i \geq 0\}, \\
C(0, d_i) &= c(b_i), \quad c'(b_i) < 0
\end{aligned}$$

と表すことができる。式(8), (9) より、第 2 ステージのベイズナッシュ均衡は

$$\alpha^{*(z_j)} = \underbrace{\frac{\sigma_\theta^{-2} + r b^{-2}}{\sigma_\theta^{-2} + b^{-2}}}_{=A^*(=1-B^*)} \cdot \mu + \underbrace{\frac{(1-r)b^{-2}}{\sigma_\theta^{-2} + b^{-2}}}_{=B^*} \cdot z_j$$

なので、第 2 ステージでの行動の平均 $\bar{a}$ は

$$\bar{a} = A^* \mu + B^*(\theta + b u)$$

となる。また、(10) より、

$$\begin{aligned}
\alpha(z_i) &= \underbrace{\left(\frac{(1-r)\sigma_\theta^{-2}}{\sigma_\theta^{-2} + b_i^{-2}} + r A^* + \frac{r B^*(\sigma_\theta^2 + b_i b)^{-1}}{(\sigma_\theta^2 + b_i b)^{-1} + (b_i^2 - b_i b)^{-1}} \right)}_{=A(=1-B)} \mu \\
&+ \underbrace{\left(\frac{(1-r)b_i^{-2}}{\sigma_\theta^{-2} + b_i^{-2}} + \frac{r B^*(b_i^2 - b_i b)^{-1}}{(\sigma_\theta^2 + b_i b)^{-1} + (b_i^2 - b_i b)^{-1}} \right)}_{=B} z_i
\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\mathbb{V}(\alpha(z_i)) = B^2(\sigma_\theta^2 + b_i^2), \tag{21}$$

$$\text{Cov}(\alpha(z_i), \bar{a}) = B^* B(\sigma_\theta^2 + b_i b^*) \tag{22}$$

$$\text{Cov}(\theta, \alpha(z_i)) = B \cdot \sigma_\theta^2 \tag{23}$$

である。したがって、第 1 ステージで戦略 b_i を選んだときのプレイヤー i の期待利得は式 (11), (21), (22), (23) より、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u_i((\alpha(z_i), (\alpha^*(z_j))_{j \neq i}), \theta)] = & -B^2 \cdot (\sigma_\theta^2 + b_i^2) \\ & + 2r \cdot B^* B \cdot (\sigma_\theta^2 + b_i b^*) \\ & + 2(1-r) \cdot B \sigma_\theta^2 \\ & + E(h(a_{-i}, \theta)) \\ & - c(b_i) \end{aligned} \quad (24)$$

式 (24) の b_i^{-2} での微分を取ると、情報取得の限界利得が得られるが、 B に $(b_i^2 - b_{ib})^{-1}$ という項が存在することに注意が必要である。この項の存在により、限界利得は $b_i = b$ を境に限界利得が非連続的に変化する¹⁴⁾。この直観は以下の通りである。公共情報は経済の状態 θ だけでなく他のプレイヤーの行動の予測にも用いることができる。 $r > 0$ としよう。このとき第2ステージの行動は戦略的補完性を持つので、プレイヤー i は公共情報に対して高い価値を置く。ただし、共通ノイズの標準偏差 b_i が他のプレイヤーのそれである b よりも小さい状態では、追加的にノイズを減らして得られる情報は他のプレイヤーの保有していない情報を得ているので、これは公共情報ではない。そのため、 $b_i < b$ のときには追加的に b_i を低下させることによる限界利得は $b_i > b$ のときの限界利得より小さくなる。この限界利得の非連続的な変化が、4.2節で述べた戦略的補完性とは別の戦略的補完性を生み出す。なぜなら、プレイヤー i が $b_i = b$ を選択していたときに、他のプレイヤーが b を下げた（つまり追加的な情報を取得した）とする。すると、 $b_i > b$ となるため、プレイヤー i の追加的な情報取得の限界利得が上昇する。このため、最適反応となる b_i は低下し、プレイヤー i も追加的な情報取得を行うインセンティブが生じる。この戦略的補完性は条件次第で十分強くなり、複数均衡を生じさせる¹⁵⁾。

4.4 ケース4：不完全相関のケース

複数均衡の最後の例として、情報がプレイヤー間で不完全相関している場合を紹介する。まず、(7)において、共通ノイズの標準偏差 b_i は固定されていて個別ノイズの標準偏差 d_i を選択する場合を考える。この場合、以下の命題が成り立つ (Myatt and Wallace, 2012)。

命題2 (Myatt and Wallace, 2012) 情報のソースが二つ存在し、各プレイヤーは (7) の型を持つ二つの情報 z_i^1 と z_i^2 を受け取る。各プレイヤーはそれぞれ個別ノイズの標準偏差 d_i^1 と d_i^2 を選択する。費用関数が $C((d_i^1)^{-2} + (d_i^2)^{-2})$ の型を持つとき、均衡は一意に定まる。

個別ノイズの標準偏差を選択する問題であるため、4.2節で見たように限界利得は連続的に変化するため、複数均衡を生じさせるほどの強い戦略的補完性は生じない。

Hellwig et al. (2012) は、個別ノイズの標準偏差 d_i が固定されていて共通ノイズの標準偏差 b_i を選択する場合についても考察し、以下の命題を示している。

命題3 (Hellwig et al., 2012) 情報が不完全相関のケースで b_i を選択するとき、費用関数 $C(b_i)$ が凸関数であれば、均衡は一意に定まる。

14) 詳しい議論は Veldkamp (2011) や Hellwig and Veldkamp (2009) を参照。

15) 証明は Hellwig and Veldkamp (2009) を参照。

4.5 今後の展望

一つは、複数均衡が生じた際の均衡選択についてである。Myatt and Wallace (2012) の公共情報のモデル化のように、現実により近い形でモデルを拡張することと複数均衡を排除するということが難しいケースも存在する。そのとき、複数均衡を許したまま、より強い均衡概念を用いて、生き残る均衡を選択する方法も考えられる。Arato et al. (2021) は 4.1 節のように情報選択が離散的なモデルを考え、複数均衡のうちどの均衡が安定的であるかを分析し、部分取得均衡は安定的でないことを示した。この結果は、政府が公共情報を販売するような状況で、一部の人のみに情報を伝えるような政策は難しいことを表している¹⁶⁾。

もう一つは行動が離散選択となっているモデルへの応用である。ここまで述べた内生的情報取得のモデルは、第 2 ステージでの行動に関する戦略空間が実数の範囲で連続であった。近年では、離散選択のモデルに合理的不注意のモデルを組み込む研究も盛んに行われている (Matějka and McKay, 2015; Fosgerau et al., 2020; Cheremukhin et al., 2015; Szkup and Trevino, 2015)。この文脈はグローバルゲーム (Morris and Shin, 2003) と関連があり、今後も発展が予想される。

5 内生的情報所得下での情報の社会的価値と情報設計問題

本節では情報取得が内生的な状況での、情報の社会的価値や情報設計に関する代表的な研究をいくつか紹介し、その後この分野の展望を述べる。本節では、情報が公共情報と私的情報の 2 種類存在し、公共情報の精度が外生、私的情報の精度は各プレイヤーが内生的に取得するモデルを中心に紹介する¹⁷⁾。

情報の社会的価値や情報設計問題を考える際には、情報取得技術だけでなく社会厚生関数の設定にも大きな注意を払わなければならない。多くの場合社会厚生関数はプレイヤーの事前の期待利得を考えるので、このことはプレイヤーの利得構造（特に、自身の行動には影響を与えない項 $h(a_{-i}, \theta)$ ）が、結果に対して重要な役割を果たす。前節のように情報取得行動のみを考える上では、利得構造（2）内の自身の行動に影響を受けない項 $h(a_{-i}, \theta)$ の関数型は結果に影響を与えない。しかし、情報の社会的価値や情報設計問題を考える上では、全てのプレイヤーに影響を与える変数（例えば公共情報の精度）を操作して事前の期待利得を最大化するため、 $h(a_{-i}, \theta)$ の形状が結果に大きな影響を与える¹⁸⁾。以下、利得構造と情報取得技術の違いに注目しながら、代表的な研究を紹介する。

5.1 線型の情報費用のケース

最初のケースは、情報取得技術として私的情報の精度に対して線型の情報取得費用を仮定しているものである。最も基本的なモデルは Colombo and Femminis (2008) である。彼らは、利得構造として、以下のような Morris and Shin (2002) のゼロサム美人投票ゲームを使った。

16) Arato et al. (2021) では、部分取得均衡が安定的となるような情報の価格付けルールも提案している。

17) 4.2 節の議論により、この場合には均衡の一意性が広いクラスで保証される。

18) Angeletos and Pavan (2007), Ui (2015) は外生的な情報取得のモデルで包括的に分析している。情報取得が内生的なケースでもこの事実に変化はない。

$$u(a, \theta, b_i^{-2}) = -(1-r)(a_i - \theta)^2 - r \int_0^1 (a_j - a_i)^2 dj + r \int_0^1 \int_0^1 (a_j - a_i)^2 dldj - pd_i^{-2}$$

ここから社会厚生関数は $-E(a_i - \theta)^2 - pd^{-2} - \bar{p}b^{-2}$, すなわち各プレイヤーの行動の, 経済の状態からの乖離の平均と情報費用の合計が社会的なコストになっている。ここで $\bar{p}$ は政府が支払う情報取得コストであり, 社会的コストに加えられる。Colombo and Femminis (2008) はこの設定のもとでは,

1. 公共情報は私的情報をクラウドアウトする。つまり, 公共情報の精度が上昇するほど各プレイヤーが選択する私的情報の精度は減少すること,
2. $\bar{p} < p$ つまり, 公共情報の取得コストのほうが安いときには, 公的情報の精度の向上は必ず経済厚生を上昇させること

を示した。

Ui (2013) は線型の私的情報取得費用関数を導入した n 人ゲームを分析した。このとき, 利得構造も Morris and Shin (2002) 型を含むような一般的な 2 次の利得関数に拡張している。この下で, 私的情報の価格の低下の厚生効果を分析している。私的情報の価格の厚生効果は, 利得構造とプレイヤーの人数の両方に依存しており, 価格の低下が厚生 of 低下につながる場合が存在すること, および, 私的情報の価格の低下が厚生を上昇させるための必要十分条件が導出されている。

5.2 精度に対して情報費用が凸関数のケース

Colombo et al. (2014) は私的情報取得の費用関数が精度に対して凸関数のケースを考察した。彼らの分析では利得構造は Angeletos and Pavan (2007) と同様の 2 次関数を使っており, 情報の利用 (第 2 ステージの線型戦略において各情報に振り分ける重み) が社会的に効率であることと情報の取得が効率的である (情報の社会的な限界価値と情報取得の限界費用が一致している) ことが必ずしも同時に成立しないことを示し, その下で公共情報の社会的価値を導出している。

Ui (2014) は利得構造を Morris and Shin (2002) の美人投票ゲームに絞っているが, Colombo and Femminis (2008) との比較によって費用関数の凸性が持つ性質, (例えば公共情報による私的情報取得のクラウドアウト効果は凸性によって弱まるため, 公共情報の社会的価値は凸性が強いほど外生情報取得の結果に近づくことなど) を明解に示している。

Ui (2015) は Colombo et al. (2014) よりも広いクラスの社会厚生関数に対して公共情報の価値を分析し, 公共情報の精度の向上が経済厚生を上昇させるための必要十分条件を導出している。その結果, 社会厚生関数の形状と情報取得費用の弾力性によって公共情報の精度の厚生効果は 1) 単調増加, 2) 単調減少, 3) U 字型, 4) 逆 U 字型の 4 つの状況が存在することを示している。

5.3 今後の展望

私的情報の精度をプレイヤーが内生的に取得する状況における公共情報の価値および最適情報公開の問題は, 利得構造および社会厚生関数が 2 次関数で情報構造を正規分布のクラスに関しては Colombo et al. (2014) と Ui (2015) によってかなり詳細に分析されている。このクラスのモデルに関する今後の展望は, Bergemann and Morris (2013, 2016) の情報設計の枠組みで再構築すること

により内生的情報取得の下での統一的な分析の枠組みを確立することであると考えられる。情報取得が外生の状況については Ui (2020) が LQG ゲームでの情報設計の解法を整理している。これを内生的情報取得のモデルに拡張することはこの分野の進展にとって重要と考えられる。

6 終わりに

本稿では内生的情報取得とその下での最適情報構造・情報設計に関する主要な研究を紹介するとともに、今後の進展を展望した。本稿で紹介した研究のほとんどは LQG ゲームの枠組みでの研究であったが、LQG ゲーム以外でも、意思決定理論の分野などで内生的情報取得の研究も増えている (Caplin and Martin, 2015; Caplin and Dean, 2015; Matějka and McKay, 2015; Chambers et al., 2020)。LQG ゲームを含むより広いクラスにおける内生的情報取得のモデルにおける情報設計 (たとえば, Amir and Lazzati (2016) など) は今後の課題である。また、内生的情報取得のモデルとしてどのような枠組みが重要なのかを検証するためには、実験分野の蓄積も必要と考えられる (Baeriswyl et al., 2021)。これらの研究の蓄積を応用研究へ繋げていくことが今後の課題と考えられる。

参考文献

- Amir, Rabah and Natalia Lazzati (2016) "Endogenous Information Acquisition in Bayesian Games with Strategic Complementarities," *Journal of Economic Theory*, Vol. 163, pp. 684–698, DOI: 10.1016/j.jet.2016.03.005.
- Angeletos, G. M. and C. Lian (2016) "Chapter 14 – Incomplete Information in Macroeconomics: Accommodating Frictions in Coordination," in Taylor, John B. and Harald Uhlig eds., *Handbook of Macroeconomics*, Vol. 2, pp. 1065–1240; Elsevier, DOI: 10.1016/bs.hesmac.2016.04.011.
- Angeletos, George-Marios and Alessandro Pavan (2007) "Efficient Use of Information and Social Value of Information," *Econometrica*, Vol. 75, No. 4, pp. 1103–1142, DOI: 10.1111/j.1468-0262.2007.00783.x.
- Arato, Hiroki, Takeo Hori, and Tomoya Nakamura (2021) "Endogenous Information Acquisition and the Partial Announcement Policy," *Information Economics and Policy*, Vol. 55, p. 100898, DOI: 10.1016/j.infoecopol.2020.100898.
- Baeriswyl, Romain, Kene Boun My, and Camille Cornand (2021) "Double Overreaction in Beauty Contests with Information Acquisition: Theory and Experiment," *Journal of Monetary Economics*, Vol. 118, pp. 432–445, DOI: 10.1016/j.jmoneco.2020.12.004.
- Bergemann, Dirk and Stephen Morris (2013) "Robust Predictions in Games With Incomplete Information," *Econometrica*, Vol. 81, No. 4, pp. 1251–1308, DOI: 10.3982/ECTA11105.
- (2016) "Bayes Correlated Equilibrium and the Comparison of Information Structures in Games," *Theoretical Economics*, Vol. 11, No. 2, pp. 487–522, DOI: 10.3982/TE1808.
- Caplin, Andrew and Mark Dean (2015) "Revealed Preference, Rational Inattention, and Costly Information Acquisition," *American Economic Review*, Vol. 105, No. 7, pp. 2183–2203, DOI: 10.1257/aer.20140117.
- Caplin, Andrew and Daniel Martin (2015) "A Testable Theory of Imperfect Perception," *Economic Journal*, Vol. 125, No. 582, pp. 184–202, DOI: 10.1111/ecoj.12130.
- Chambers, Christopher P., Ce Liu, and John Rehbeck (2020) "Costly Information Acquisition," *Journal of Economic Theory*, Vol. 186, p. 104979, DOI: 10.1016/j.jet.2019.104979.
- Cheremukhin, Anton, Anna Popova, and Antonella Tutino (2015) "A Theory of Discrete Choice with Information Costs," *Journal of Economic Behavior & Organization*, Vol. 113, pp. 34–50, DOI: 10.1016/j.jebo.2015.02.022.

- Colombo, Luca and Gianluca Femminis (2008) “The Social Value of Public Information with Costly Information Acquisition,” *Economics Letters*, Vol. 100, No. 2, pp. 196–199, DOI: 10.1016/j.econlet.2008.01.009.
- Colombo, Luca, Gianluca Femminis, and Alessandro Pavan (2014) “Information Acquisition and Welfare,” *Review of Economic Studies*, Vol. 81, No. 4, pp. 1438–1483, DOI: 10.1093/restud/rdu015.
- Cornand, Camille and Frank Heinemann (2008) “Optimal Degree of Public Information Dissemination,” *Economic Journal*, Vol. 118, No. 528, pp. 718–742, DOI: 10.1111/j.1468-0297.2008.02139.x.
- Dewan, Torun and David P. Myatt (2008) “The Qualities of Leadership: Direction, Communication, and Obfuscation,” *American Political Science Review*, Vol. 102, No. 3, pp. 351–368, DOI: 10.1017/S0003055408080234.
- Fosgerau, Mogens, Emerson Melo, André de Palma, and Matthew Shum (2020) “Discrete Choice and Rational Inattention: A General Equivalence Result,” *International Economic Review*, Vol. 61, No. 4, pp. 1569–1589, DOI: 10.1111/iere.12469.
- Hellwig, Christian and Laura Veldkamp (2009) “Knowing What Others Know: Coordination Motives in Information Acquisition,” *Review of Economic Studies*, Vol. 76, No. 1, pp. 223–251, DOI: 10.1111/j.1467-937X.2008.00515.x.
- Hellwig, Christian, Sebastian Kohls, and Laura Veldkamp (2012) “Information Choice Technologies,” *American Economic Review*, Vol. 102, No. 3, pp. 35–40, DOI: 10.1257/aer.102.3.35.
- Matějka, Filip and Alisdair McKay (2015) “Rational Inattention to Discrete Choices: A New Foundation for the Multinomial Logit Model,” *American Economic Review*, Vol. 105, No. 1, pp. 272–298, DOI: 10.1257/aer.20130047.
- Morris, Stephen and Hyun Song Shin (2002) “Social Value of Public Information,” *American Economic Review*, Vol. 92, No. 5, pp. 1521–1534, DOI: 10.1257/000282802762024610.
- (2003) “Chapter 3 – Global Games: Theory and Applications,” in *Advances in Economics and Econometrics Theory and Applications, Eighth World Congress*: Cambridge University Press.
- Myatt, David P. and Chris Wallace (2012) “Endogenous Information Acquisition in Coordination Games,” *Review of Economic Studies*, Vol. 79, No. 1, pp. 340–374, DOI: 10.1093/restud/rdr018.
- Radner, R. (1962) “Team Decision Problems,” *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 33, No. 3, pp. 857–881.
- Sims, Christopher A. (2003) “Implications of Rational Inattention,” *Journal of Monetary Economics*, Vol. 50, No. 3, pp. 665–690, DOI: 10.1016/S0304-3932(03)00029-1.
- Szkup, Michal and Isabel Trevino (2015) “Information Acquisition in Global Games of Regime Change,” *Journal of Economic Theory*, Vol. 160, pp. 387–428, DOI: 10.1016/j.jet.2015.10.005.
- Ui, Takashi (2013) “Welfare Effects of Information Acquisition Costs.”
- (2014) “The Social Value of Public Information with Convex Costs of Information Acquisition,” *Economics Letters*, Vol. 125, No. 2, pp. 249–252, DOI: 10.1016/j.econlet.2014.09.015.
- (2015) “Optimal Disclosure of Public Information with Endogenous Acquisition of Private Information.”
- (2020) “LQG Information Design.”
- Ui, Takashi and Yasunori Yoshizawa (2013) “Radner’s Theorem on Teams and Games with a Continuum of Players,” *Economics Bulletin*, Vol. 33, No. 1, pp. 72–77.
- (2015) “Characterizing Social Value of Information,” *Journal of Economic Theory*, Vol. 158, pp. 507–535, DOI: 10.1016/j.jet.2014.12.007.
- Veldkamp, Laura (2011) *Information Choice in Macroeconomics and Finance*: Princeton University Press.
- Vives, Xavier (2008) *Information and Learning in Markets: The Impact of Market Microstructure*: Princeton University Press.
- 荒戸寛樹・中嶋智之 (2010) 「共有知識の不完全性とマクロ経済学」, 『経済研究』, 第 61 巻, 第 1 号, 33–46 頁.
- 宇井貴志 (2018) 「情報設計問題と LQG ゲーム」, 『現代経済学の潮流 2018』, 133–166 頁, 東洋経済新報社.
- 奥田達志 (2018) 「ノイズ情報モデルとインフレ動学」, 『金融研究』, 第 37 巻, 第 4 号, 69–120 頁.

補論 A 正規分布下でのベイズ更新

θ の事前分布, 情報 Z の θ の下での条件付き分布の密度関数 $f(\theta)$, $\phi(z|\theta)$ はそれぞれ

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\theta^2}} \exp\left[-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\sigma_\theta^2}\right]$$

$$\phi(z|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}} \exp\left[-\frac{(z-\theta)^2}{2\sigma_u^2}\right]$$

であるから, ベイズの法則 (式 (1)) を用いて,

$$\begin{aligned} f(\theta|z) &= \frac{f(\theta)\phi(z|\theta)}{f(z)} \\ &\propto \exp\left[-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\sigma_\theta^2} - \frac{(z-\theta)^2}{2\sigma_u^2}\right] \\ &= \exp\left[-\frac{\sigma_u^2 2(\theta-\mu)^2 + \sigma_\theta^2 (z-\theta)^2}{2\sigma_\theta^2 \sigma_u^2}\right] \\ &= \exp\left[-\frac{(\sigma_u^2 + \sigma_\theta^2)\left(\theta^2 - 2 \cdot \frac{\sigma_u^2 \mu + \sigma_\theta^2 z}{\sigma_u^2 + \sigma_\theta^2} \theta + \frac{\sigma_u^2 \mu^2 + \sigma_\theta^2 z^2}{\sigma_u^2 + \sigma_\theta^2}\right)}{2\sigma_\theta^2 \sigma_u^2}\right] \\ &\propto \exp\left[-\frac{(\sigma_u^2 + \sigma_\theta^2)\left(\theta - \frac{\sigma_u^2 \mu + \sigma_\theta^2 z}{\sigma_u^2 + \sigma_\theta^2}\right)^2}{2\sigma_\theta^2 \sigma_u^2}\right] \\ &= \exp\left[-\frac{\left(\theta - \frac{\sigma_\theta^{-2} \mu + \sigma_u^{-2} z}{\sigma_\theta^{-2} + \sigma_u^{-2}}\right)^2}{2 \cdot \frac{\sigma_\theta^2 \sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_\theta^2}}\right] \\ &= \exp\left[-\frac{\left(\theta - \frac{\sigma_\theta^{-2} \mu + \sigma_u^{-2} z}{\sigma_\theta^{-2} + \sigma_u^{-2}}\right)^2}{2(\sigma_\theta^{-2} + \sigma_u^{-2})^{-1}}\right] \end{aligned} \quad (25)$$

が成り立つ。ここで, $A(x) \propto B(x)$ とは, ある (x に依存しない) 定数 C が存在して, $A(x) = C \times B(x)$ であることを意味する。したがって, 式 (25) は, θ に依存しない定数 C が存在して,

$$f(\theta|z) = C \times \exp\left[-\frac{\left(\theta - \frac{\sigma_\theta^{-2} \mu + \sigma_u^{-2} z}{\sigma_\theta^{-2} + \sigma_u^{-2}}\right)^2}{2(\sigma_\theta^{-2} + \sigma_u^{-2})^{-1}}\right] \quad (26)$$

であることを意味する。この式の左辺は θ についての確率密度なので θ で積分すると 1 となることと, 右辺はガウス積分

$$\int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \sqrt{2\pi\sigma^2}$$

を利用して, 式 (26) の両辺を θ で積分すると,

$$1 = C \times \sqrt{2\pi(\sigma_\theta^{-2} + \sigma_u^{-2})^{-1}},$$

すなわち $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_\theta^{-2} + \sigma_u^{-2})^{-1}}}$ が成り立つ。これと式 (26) より,

$$f(\theta|z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_\theta^{-2} + \sigma_u^{-2})^{-1}}} \exp\left[-\frac{\left(\theta - \frac{\sigma_\theta^{-2} \mu + \sigma_u^{-2} z}{\sigma_\theta^{-2} + \sigma_u^{-2}}\right)^2}{2(\sigma_\theta^{-2} + \sigma_u^{-2})^{-1}}\right]$$

が示された。

補論 B 合理的不注意 (Rational Inattention)

■情報量とエントロピー 確率密度関数 f を持つ n 次元連続型確率変数 X に対して、ある事象 $X=x$ が起こったことを知ることから得られる情報量を $-\log f(x)$ と定義する。

エントロピー $H(X)$ は情報量の平均として以下のように定義される。

$$H(X) = -\mathbb{E}[\log f(x)]$$

エントロピーは、確率変数の不確実性に関する指標である。もし確率分布が 1 点 $X=a$ に退化している、つまりほとんどすべての場合において X が定数 a を取ることがわかっているとき、 $H(X)=0$ である。それ以外の場合には、エントロピーは正の値を取る。全ての事象が等しい確率密度を持つ時、すなわち事前にはどの事象が起こりやすいかについての情報が存在しない時、エントロピーは最大となる。

X が n 次元確率変数で、分散共分散行列が Σ の正規分布に従うならば、このとき x は

$$H(X) = \frac{1}{2} \log [(2\pi e)^n |\Sigma|] \quad (27)$$

のエントロピーを持つ。

■相互情報量 二つの確率変数 X, Y が存在するとしよう。確率変数の組 (X, Y) も確率変数であるから、 (X, Y) の同時確率密度関数を使ってエントロピー $H(X, Y)$ を定義できる。また、 Y で条件づけた X の条件付きエントロピーを

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y) \quad (28)$$

で定義する。さらに、 X と Y の相互情報量 (mutual information) を、 Y を観測することによる X のエントロピーの減少として以下のように定義する。

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) \end{aligned} \quad (29)$$

と定義する。

■合理的不注意 Sims (2003) は相互情報量に制約を課すことにより、経済主体の情報処理能力に限界があることをモデル化した。このモデルを、合理的不注意 (Rational Inattention) のモデルと呼ぶ。

相互情報量がある定数 $K(\geq 0)$ 以下でなければならないという制約は、情報フロー制約 (Information-flow constraints) と呼ばれている。これは、経済主体の事前信念を X 、経済主体が得る情報を Y 、事後信念を $X|Y$ とすると、

$$I(X, Y) \leq K \quad (30)$$

と表すことができる。この正の定数 K は経済主体の情報処理能力を表しており、その経済主体が持つ情報容量 (Information capacity) と呼ばれる。

■例：正規分布 もし X と Y の確率分布がともに正規分布であるならば、式 (27), (28), (29) より、情報フロー制約制約 (30) は

$$\hat{\sigma}^2 \geq a \exp(-2K) \cdot \sigma^2$$

と表すことができる。ここで、 σ^2 はこの経済主体の事前信念 X の、 $\hat{\sigma}^2$ は事後信念 $X|Y$ のそれぞれ分散であり、これは情報 Y の条件付き分散 $\sigma_{Y|X}^2$ を使って

$$\hat{\sigma}^{-2} = \sigma^{-2} + \sigma_{Y|X}^{-2}$$

を満たしている。したがって、情報フロー制約は、情報の条件付き分散の最大値に制約を課していることと同じである。