

ある種に分岐・合流型決定過程について

— 決定過程としてのニューラルネットワーク —

九州工業大学・大学院工学研究院 藤田 敏治

Toshiharu Fujita

Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology

1 はじめに

本論文では、ノンシリアル動的計画 ([1, 3]) における分岐型推移 (Diverging Branch Systems) と合流型推移 (Converging Branch Systems) を組み合わせた決定過程モデルを利用する。ここで扱うモデルでは、与えられた1つの初期状態から開始し、途中で分岐と合流を繰り返した後、最終的に1つの終端状態へ達してシステムが終了する。そして、初期状態のみが確率的に生じる場合を考えることで、決定過程モデルとしてのパーセプトロンやニューラルネットワーク学習過程の表現を試みる。なお、本論文の目的は、ニューラルネットワークの決定過程による「表現」であり、そのことによる利点は現時点で得られていない。しかしながら、今後ニューラルネットワークに関する新たな知見の獲得やモデルの拡張、あるいはよりよい解法の探求を目指すための基盤の一つとなる可能性をもつ結果と考えている。

2 分岐・合流型決定過程

分岐型と合流型の推移を合わせもつ有限段決定過程問題を考える。ただし、ここでは初期状態のみが確率的に与えられ、その後の推移が確定的となるモデルを扱う。

まず、

X : 有限状態空間 ($X \neq \phi$)

U : 有限決定空間 ($U \neq \phi$)

とし、状態変数を x_1, x_2, \dots, x_N ($N > 2$) であらわし、 x_1 を初期状態、 x_N は終端状態とする。各状態 x_n が実際に取りうる範囲を $X_n \subset X$ とおく。また、 $U_n : X_n \rightarrow 2^U \setminus \{\phi\}$ ($n = 1, 2, \dots, N-1$) は、状態 $x_n \in X_n$ に対し選択可能な決定全体をあたえるものとし、各状態 $x_n \in X_n$ ($n = 1, 2, \dots, N-1$) に対し、選択した決定を $u_n \in U_n(x_n)$ であらわす。このとき、

$r_n : Gr(U_n) \rightarrow \mathbf{R}$: 状態 x_n に対し決定 u_n を選択した際の利得 ($n = 1, 2, \dots, N-1$)

$k : X_N \rightarrow \mathbf{R}$: 終端状態 x_N に対する終端利得

とする。ただし、

$$Gr(U_n) = \{(x_n, u_n) \mid u_n \in U_n(x_n), x_n \in X_n\}$$

である。

初期状態 x_1 は確率変数として与えられるものとし、その確率関数を p とする。

$$p : X_1 \rightarrow [0, 1], \quad \sum_{x \in X_1} p(x) = 1$$

である。初期状態が定まった後の状態推移は確定的であるとする。推移法則に関しては、

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & (x_j \text{ が } x_i \text{ の次の状態}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とおき、推移行列（隣接行列） $E = (e_{ij}) \in \{0, 1\}^{N \times N}$ を定め、確定的推移を

$$x_n = f_n(\langle x_m, u_m \rangle_{m \in I_n}), \quad n = 2, 3, \dots, N$$

により表すものとする。ただし、 I_j は、状態 x_j に 1 回の推移で到達可能な状態すべての添え字集合、すなわち

$$I_j = \{i \mid e_{ij} = 1\}, \quad j = 2, 3, \dots, N$$

であり（便宜上、 $j = 1$ に対しては $I_j = \phi$ とする）、また、一般に添え字集合 $I = \{m_1, m_2, \dots, m_M\}$ ($m_1 < m_2 < \dots < m_M$) が与えられたとき、状態と決定の相互列：

$$x_{m_1}, u_{m_1}, x_{m_2}, u_{m_2}, \dots, x_{m_M}, u_{m_M}$$

を $\langle x_m, u_m \rangle_{m \in I}$ とあらわしている。

このとき、考える問題は、次の最小化問題である。

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad & \text{Minimize } E[r_1(x_1, u_1) + r_2(x_2, u_2) + \dots + r_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) + k(x_N)] \\ & \text{subject to } x_n = f_n(\langle x_m, u_m \rangle_{m \in I_n}), \quad n = 2, 3, \dots, N \\ & \quad u_n \in U_n(x_n), \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

目的関数は、初期状態 x_1 が確率変数であることから以下のように定まる：

$$\begin{aligned} & E[r_1(x_1, u_1) + r_2(x_2, u_2) + \dots + r_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) + k(x_N)] \\ &= \sum_{x_1 \in X_1} [r_1(x_1, u_1) + r_2(x_2, u_2) + \dots + r_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) + k(x_N)] p(x_1). \end{aligned}$$

ここでは、まず初期状態 x_1 が確定的に与えられると仮定した場合を考える。任意の i ($1 \leq i \leq N-1$) に対し $e_{ij} = 1$ ならば $i < j \leq N$ が成り立っているとき、部分問題を以下のように構成する。

$n = N$ のとき

終端状態 x_N に対しては次のように定義する：

$$v^N(x_N) = k(x_N), \quad x_N \in X.$$

$n < N$ のとき

状態列 x_n, x_{n+1}, \dots, x_N に対応する部分問題は次で定める：

$$\begin{aligned} & v^n(x_n; \langle x_m, u_m \rangle_{m \in J_n}) \\ &= \min_{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{N-1}; (*)} \left[r_n(x_n, u_n) + r_{n+1}(x_{n+1}, u_{n+1}) + \dots + k(x_N) \right], \\ & \quad x_n \in X, \quad x_m \in X, \quad u_m \in U(x_m), \quad m \in J_n \end{aligned}$$

ただし

$$J_n = \bigcup_{l=n+1}^N \{j \in I_l \mid j < n\}$$

$$(*) : \begin{cases} u_l \in U(x_l), & l = n, n+1, \dots, N-1 \\ x_{l+1} = f_{l+1}(\langle x_m, u_m \rangle_{m \in I_{l+1}}), & l = n, n+1, \dots, N-1 \end{cases}$$

である。状態変数 x_l ($l > n$) が状態 x_n, \dots, x_{l-1} および決定 u_n, \dots, u_{l-1} で定まらない場合、値関数には、必要な情報をパラメータとして与えなければならない。その際に必要となるパラメータの添え字集合が J_n である。

と定義すれば、次の再帰式が成り立つ ([2]) :

$$\begin{aligned} v^N(x_N) &= k(x_N), \quad x_N \in X_N \\ v^n(x_n; \langle x_m, u_m \rangle_{m \in J_n}) \\ &= \min_{u_n \in U(x_n)} \left[r_n(x_n, u_n) + v^{n+1}(f_{n+1}(\langle x_m, u_m \rangle_{m \in I_{n+1}}); \langle x_m, u_m \rangle_{m \in J_{n+1}}) \right], \quad x_n \in X_n \\ & \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

初期状態 x_1 が確率的な場合は、 v^1 ($n = 1$ のとき) のみ異なり、

$$\begin{aligned} v^1(x_1; \langle x_m, u_m \rangle_{m \in J_1}) \\ = \min_{u_1 \in U(x_1)} \sum_{x_1 \in X_1} \left[r_1(x_1, u_1) + v^2(f_2(\langle x_m, u_m \rangle_{m \in I_2}); \langle x_m, u_m \rangle_{m \in J_2}) \right] p(x_1), \quad x_1 \in X_1 \end{aligned}$$

を採用すればよい。

3 パーセプトロンの学習過程

ここで考えるのは、簡単のため 2 入力・1 出力の単純パーセプトロンとする。入力を ξ_1, ξ_2 , 対応する重みを w_1, w_2 , バイアスを b であらわし、出力を

$$\eta = \begin{cases} 0 & (w_1\xi_1 + w_2\xi_2 + b \leq 0) \\ 1 & (w_1\xi_1 + w_2\xi_2 + b > 0) \end{cases}$$

とする (図 1)。

このパーセプトロンの学習過程は、次の分岐・合流型決定過程モデル (図 2) により表現される。

分岐・合流型決定過程モデル (I)

- ・状態 $N = 6$ で、初期状態は $x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13}) \in \mathbf{R}^3$, その他の状態については $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbf{R}$.
- ・決定 x_1, x_4 に対しては決定なしで、 $u_2, u_3, u_5 \in \mathbf{R}$ は状態非依存の決定 (すなわち u_n は x_n の値と無関係に定まる決定 ($n = 2, 3, 5$)).

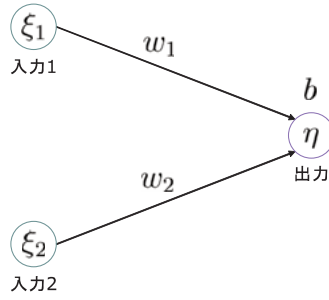


図 1: 単純パーセプトロン

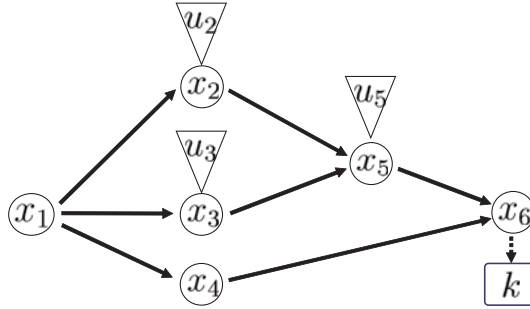


図 2: 分岐・合流型決定過程モデル (I)

- ・ 状態推移 $e_{12} = e_{13} = e_{14} = e_{25} = e_{35} = e_{56} = e_{46} = 1$ (その他の e_{ij} は 0) で

$$x_n = f_n(x_1) = x_{1(n-1)}, \quad n = 2, 3, 4$$

$$x_5 = f_5(x_2, u_2, x_3, u_3) = x_2 u_2 + x_3 u_3$$

$$x_6 = f_6(x_4, x_5, u_5) = \chi^+(x_5 + u_5) - x_4$$

ここで

$$\chi^+(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

- ・ 利得関数 終端利得のみ (すなわち $r_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, 4, 5$)) で

$$k(x_6) = |x_6|.$$

このとき、目的関数は $E[k(x_6)]$ となり、初期状態は、各学習データ (入力 ξ_1, ξ_2 を第 1, 2 成分, 出力を第 3 成分としてもつベクトル) を等確率でとるものとして与えることで、 x_2, x_3 がパーセプトロンにおける入力 ξ_1, ξ_2 に対応し、 u_2, u_3, u_5 が w_1, w_2, b にそれぞれ対応する。そして、最小化によって得られた解を u_2^*, u_3^*, u_5^* とするとき、 u_2^*, u_3^* がパーセプトロンにおける重みパラメータを、 u_5^* がバイアスを与える。

具体例として、パーセプトロンにおける論理積の学習が、この決定過程モデルにより実行され

ることを示す。学習データは次の表で与えられる：

	入力 1 (ξ_1)	入力 2 (ξ_2)	出力 (η)
学習データ 1	0	0	0
学習データ 2	1	0	0
学習データ 3	0	1	0
学習データ 4	1	1	1

初期状態 x_1 は各学習データ

$$s_1 = (0, 0, 0), \quad s_2 = (1, 0, 0), \quad s_3 = (0, 1, 0), \quad s_4 = (1, 1, 1)$$

をそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ でとるものとする。例えば、 $x_1 = s_2$ のとき、 $x_n = f_n(x_1)$ ($n = 2, 3, 4$) より

$$x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

そして、 $x_5 = f_5(x_2, u_2, x_3, u_3)$, $x_6 = f_6(x_4, x_5, u_5)$ より

$$x_5 = 1 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 = u_2, \quad x_6 = \chi^+(u_2 + u_5) - 0 = \chi^+(u_2 + u_5).$$

よって

$$k(x_6) = |\chi^+(u_2 + u_5)|.$$

同様に、 $x_1 = s_1, s_3, s_4$ に対して $k(x_6)$ はそれぞれ

$$|\chi^+(u_5)|, \quad |\chi^+(u_3 + u_5)|, \quad |\chi^+(u_2 + u_3 + u_5) - 1|$$

となり、目的関数は

$$E[k(x_6)] = (|\chi^+(u_5)| + |\chi^+(u_2 + u_5)| + |\chi^+(u_3 + u_5)| + |\chi^+(u_2 + u_3 + u_5) - 1|) \times \frac{1}{4}$$

となる。

ここで、明らかに $E[k(x_6)] \geq 0$ であるが、 $(u_2, u_3, u_5) = (1, 1, -1)$ のとき $E[k(x_6)] = 0$ なので、次の最適解（注：最適解は一意ではない）を得る：

$$(u_2^*, u_3^*, u_5^*) = (1, 1, -1).$$

すなわち、論理積に対するパーセプトロンの重み $w_1 = u_2 = 1$, $w_2 = u_3 = 1$, バイアス $b = u_5 = -1$ が与えられる。なお、分岐・合流型決定過程モデル (I) において、 x_2, x_3 から開始し、 x_5, x_6 までを含む部分過程において、決定を最適解で置き換えたもの（図 3）がパーセプトロンと等価な働きとなる。実際、パーセプトロンの入力を x_2, x_3 として与えたとき、推移法則に従って得られる x_6 の値がパーセプトロンの出力（論理積の結果）である。

4 ニューラルネットワークの学習過程

ここでは、多クラス分類を目的とする M 入力・ K 出力の中間層を持たないニューラルネットワーク（図 4）を考える。入力を $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M$, 出力を $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_K$ とし、重みを w_{ij} ($i =$

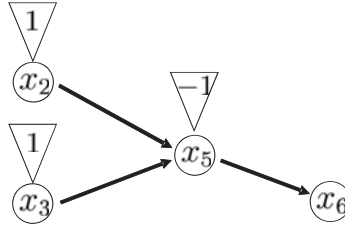


図 3: パーセプトロンと等価な部分過程

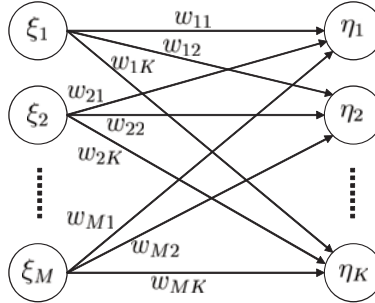


図 4: ニューラルネットワーク

$1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, K$), バイアスを b_1, b_2, \dots, b_K であらわす. そして, ソフトマックス関数:

$$g_j(\mathbf{u}) = \frac{e^{u_j}}{\sum_{k=1}^K e^{u_k}}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_K \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^K, \quad j = 1, 2, \dots, K$$

を採用し,

$$\eta_j = g_j(\mathbf{u}), \quad j = 1, 2, \dots, K$$

ただし

$$u_j = \sum_{i=1}^M w_{ij} \xi_i + b_j, \quad j = 1, 2, \dots, K$$

により出力を定めるものとする. η_j は入力クラス j に属する確率と解釈され, 各入力に対し正解クラスが k であるとき, $\eta_k > \eta_j (\forall j \neq k)$ が期待される結果である.

このニューラルネットワーク (簡単のため, ここでは $M = K = 2$ の場合を考える) の学習過程は, 次の分岐・合流型決定過程モデル (図 6) により表現される.

分岐・合流型決定過程モデル (II)

- ・ 状態 $N = 11$ で, 初期状態は $x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13}) \in \mathbf{R}^3$, その他の状態については $x_2, x_3, \dots, x_{11} \in \mathbf{R}$.
- ・ 決定 $x_1, x_4, x_7, x_8, x_9, x_{10}$ に対しては決定なしで, $u_n = (u_{n1}, u_{n2}) \in \mathbf{R}^2 (n = 2, 3); u_5, u_6 \in \mathbf{R}$ は状態非依存の決定 (すなわち u_n は x_n の値と無関係に定まる決定 ($n =$

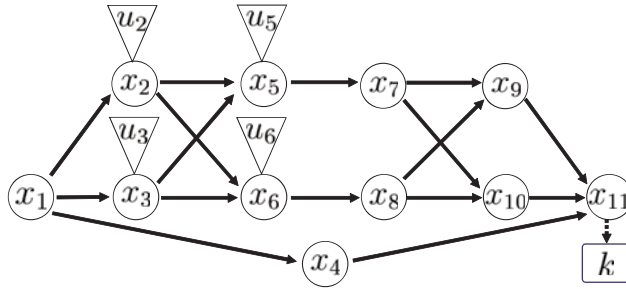


図 5: 分岐・合流型決定過程モデル (II)

2, 3, 5, 6)) .

・状態推移 推移行列は

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられ,

$$\begin{aligned} x_n &= f_n(x_1) = x_{1(n-1)}, & n = 2, 3, 4 \\ x_5 &= f_5(x_2, u_2, x_3, u_3) = x_2 u_{21} + x_3 u_{31} \\ x_6 &= f_6(x_2, u_2, x_3, u_3) = x_2 u_{22} + x_3 u_{32} \\ x_7 &= f_7(x_5, u_5) = e^{x_5 + u_5} \\ x_8 &= f_8(x_6, u_6) = e^{x_6 + u_6} \\ x_9 &= f_9(x_7, x_8) = \frac{x_7}{x_7 + x_8} \\ x_{10} &= f_{10}(x_7, x_8) = \frac{x_8}{x_7 + x_8} \\ x_{11} &= f_{11}(x_4, x_9, x_{10}) = x_{x_4 + 8}. \end{aligned}$$

・利得関数 終端利得のみ (すなわち $r_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots, 10$)) で

$$k(x_{11}) = x_{11}.$$

これは、入力データに対し、正しい出力が得られる確率に相当している。

また、このモデルにおいては、ニューラルネットワークで用いられる多様な損失関数に適応させるため、目的関数の期待値演算を一般化し

$$L[k(x_{11})] \rightarrow \text{最小化}$$

を考える。\$L\$ は \$k(x_{11})\$ の実現値（1組の学習データに1つの実現値が対応）の関数である。例えば交差エントロピー誤差を考える場合、\$k(x_{11})\$ の実現値を \$k_1, k_2, \dots, k_p\$ とすれば

$$L(k_1, k_2, \dots, k_p) = -\log \prod_{i=1}^p k_i$$

とすればよい。

例えば、学習データとして、クラス2に属する学習データ \$\xi_1, \xi_2\$ が与えられたとき、\$x_1\$ の実現値として

$$x_1 = (\xi_1, \xi_2, 2)$$

を考え、\$x_n = f_n(x_1) = x_{1(n-1)}\$ (\$n = 2, 3, 4\$) より

$$x_2 = \xi_1, \quad x_3 = \xi_2, \quad x_4 = 2.$$

次に

$$x_5 = f_5(\xi_1, u_2, \xi_2, u_3) = \xi_1 u_{21} + \xi_2 u_{31}$$

$$x_6 = f_6(\xi_1, u_2, \xi_2, u_3) = \xi_1 u_{22} + \xi_2 u_{32}$$

となり

$$x_7 = f_7(\xi_1 u_{21} + \xi_2 u_{31}, u_5) = e^{\xi_1 u_{21} + \xi_2 u_{31} + u_5}$$

$$x_8 = f_8(\xi_1 u_{22} + \xi_2 u_{32}, u_6) = e^{\xi_1 u_{22} + \xi_2 u_{32} + u_6}$$

を得る。そして

$$x_9 = f_9(e^{\xi_1 u_{21} + \xi_2 u_{31} + u_5}, e^{\xi_1 u_{22} + \xi_2 u_{32} + u_6}) = \frac{e^{\xi_1 u_{21} + \xi_2 u_{31} + u_5}}{e^{\xi_1 u_{21} + \xi_2 u_{31} + u_5} + e^{\xi_1 u_{22} + \xi_2 u_{32} + u_6}}$$

$$x_{10} = f_{10}(e^{\xi_1 u_{21} + \xi_2 u_{31} + u_5}, e^{\xi_1 u_{22} + \xi_2 u_{32} + u_6}) = \frac{e^{\xi_1 u_{22} + \xi_2 u_{32} + u_6}}{e^{\xi_1 u_{21} + \xi_2 u_{31} + u_5} + e^{\xi_1 u_{22} + \xi_2 u_{32} + u_6}}$$

を経て

$$\begin{aligned} x_{11} &= f_{11}\left(2, \frac{e^{\xi_1 u_{21} + \xi_2 u_{31} + u_5}}{e^{\xi_1 u_{21} + \xi_2 u_{31} + u_5} + e^{\xi_1 u_{22} + \xi_2 u_{32} + u_6}}, \frac{e^{\xi_1 u_{22} + \xi_2 u_{32} + u_6}}{e^{\xi_1 u_{21} + \xi_2 u_{31} + u_5} + e^{\xi_1 u_{22} + \xi_2 u_{32} + u_6}}\right) \\ &= x_{2+8} = \frac{e^{\xi_1 u_{22} + \xi_2 u_{32} + u_6}}{e^{\xi_1 u_{21} + \xi_2 u_{31} + u_5} + e^{\xi_1 u_{22} + \xi_2 u_{32} + u_6}} \end{aligned}$$

に達する。

各学習データに対し、このように得られる正解確率を、\$L\$ によりまとめて最大化することが目的となる。得られた最適解 \$u_2^*, u_3^*, u_5^*, u_6^*\$ を図6の分岐・合流型決定過程モデル(II)の該当する決定に代入し、状態 \$x_1, x_4, x_{11}\$ および \$k\$ と関連する枝を取り除いたものが、求めるニューラルネットワークの働きを実現する。本モデルにおいては、\$\xi_1, \xi_2\$ をそれぞれ \$x_2, x_3\$ へ代入し、推移法則に従って最終的に得られる \$x_9, x_{10}\$ の値が出力 \$\eta_1, \eta_2\$ にそれぞれ対応する。

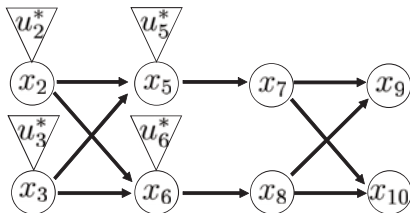


図 6: ニューラルネットワークと等価な部分過程

5 ニューラルネットワークの学習過程 (その2)

一般に、パーセプトロンやニューラルネットワークの学習過程を分岐・合流型決定過程として扱う場合の表現は一通りと限らない。前節で扱ったニューラルネットワーク学習過程を表現するモデルとして、ここではもう一つの例を挙げる（ここでも簡単のため、 $M = K = 2$ の場合を考える）。学習過程は、次の分岐・合流型決定過程モデル（図7）によって表現することも可能である。

分岐・合流型決定過程モデル (III)

- ・状態 $N = 8$ で、初期状態は $x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13}) \in \mathbf{R}^3$ 、その他の状態については $x_2, x_3, \dots, x_8 \in \mathbf{R}$ 。
- ・決定 x_1, x_5, x_6, x_7, x_8 に対しては決定なしで、 $u_n = (u_{n1}, u_{n2}) \in \mathbf{R}^2$ ($n = 2, 3, 4$) は状態非依存の決定。
- ・状態推移 推移行列は

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられ、

$$\begin{aligned} x_2 &= f_2(x_1) = 1 \text{ (定数)} \\ x_n &= f_n(x_1) = x_{1(n-2)}, \quad n = 3, 4, 5 \\ x_6 &= f_6(x_2, u_2, x_3, u_3, x_4, u_4) = \frac{g_1}{g_1 + g_2} \\ x_7 &= f_7(x_2, u_2, x_3, u_3, x_4, u_4) = \frac{g_2}{g_1 + g_2} \\ x_8 &= f_8(x_5, x_6, x_7) = x_{x_5+5} \end{aligned}$$

ただし

$$g_i = g_i(x_2, u_2, x_3, u_3, x_4, u_4) = e^{x_2 u_{2i} + x_3 u_{3i} + x_4 u_{4i}}.$$

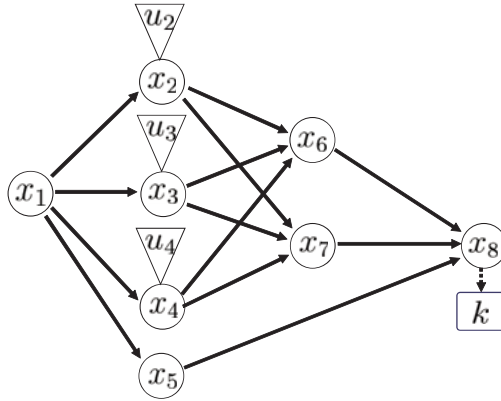


図 7: 分岐・合流型決定過程モデル (III)

- ・ 利得関数 終端利得のみ (すなわち $r_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots, 7$)) で

$$k(x_8) = x_8.$$

この値は、分岐・合流型決定過程モデル (II) と同じものとなる。

$L[k(x_8)]$ を最小化することにより得られた最適解 u_2^* , u_3^* , u_4^* を図 7 の分岐・合流型決定過程モデル (III) の該当する決定に代入し、状態 x_1 , x_5 , x_8 および k と関連する枝を取り除いたものが、求めるニューラルネットワークの働きを実現する。ここでは、 ξ_1 , ξ_2 をそれぞれ x_3 , x_4 へ代入して生じる x_6 , x_7 の値が出力 η_1 , η_2 にそれぞれ対応する。

分岐・合流型決定過程モデルとしての扱いはさまざまな形が考えられ、どの形式での扱いがよいかは今後の検討課題である。

6 再帰的解法について

ここでは、パーセプトロンの学習過程に対して与えた分岐・合流型決定過程モデル (I) の再帰的解法について考える。第 2 節の一般モデルに対する結果を適用すれば、

$$\begin{aligned} v^6(x_6) &= k(x_6) \\ v^5(x_5; x_4) &= \min_{u_5} v^6(f_6(x_4, x_5, u_5)) \\ v^4(x_4; x_2, u_2, x_3, u_3) &= v^5(f_5(x_2, u_2, x_3, u_3); x_4) \\ v^3(x_3; x_1, x_2, u_2) &= \min_{u_3} v^4(f_4(x_1); x_2, u_2, x_3, u_3) \\ v^2(x_2; x_1) &= \min_{u_2} v^3(f_3(x_1); x_1, x_2, u_2) \\ v^1(x_1) &= E[v^2(f_2(x_1); x_1)] \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}
 v^6(x_6) &= |x_6| \\
 v^5(x_5; x_4) &= \min_{u_5} v^6(\chi^+(x_5 + u_5) - x_4) \\
 v^4(x_4; x_2, u_2, x_3, u_3) &= v^5(x_2 u_2 + x_3 u_3; x_4) \\
 v^3(x_3; x_1, x_2, u_2) &= \min_{u_3} v^4(x_{13}; x_2, u_2, x_3, u_3) \\
 v^2(x_2; x_1) &= \min_{u_2} v^3(x_{12}; x_1, x_2, u_2) \\
 v^1(x_1) &= E[v^2(x_{11}; x_1)]
 \end{aligned}$$

を得る。しかしながら、このモデルにおける決定は状態非依存であるため、この結果をそのまま適用することはできない。実際、すべての決定は最初すなわち v_1 で与える必要があり、

$$v^1(x_1) = \min_{u_2, u_3, u_5} E[v^2(x_{11}; x_1, u_2, u_3, u_5)]$$

としなければならない。これにより、残りの再帰式は

$$\begin{aligned}
 v^6(x_6) &= |x_6| \\
 v^5(x_5; x_4, u_5) &= v^6(\chi^+(x_5 + u_5) - x_4) \\
 v^4(x_4; x_2, u_2, x_3, u_3, u_5) &= v^5(x_2 u_2 + x_3 u_3; x_4, u_5) \\
 v^3(x_3; x_1, x_2, u_2, u_3, u_5) &= v^4(x_{13}; x_2, u_2, x_3, u_3, u_5) \\
 v^2(x_2; x_1, u_2, u_3, u_5) &= v^3(x_{12}; x_1, x_2, u_2, u_3, u_5)
 \end{aligned}$$

となる。この再帰式は、最適化を伴わない単純な再帰的計算式となっており、動的計画法による逐次最適化への変換はかなわない（ニューラルネットワークに対する分岐・合流型決定過程モデル (II) および (III) においても同様）。この点についても今後のさらなる考察が必要である。

参考文献

- [1] U. Bertelé and F. Brioschi: *Nonserial Dynamic Programming* Academic Press, New York, 1972.
- [2] 藤田敏治, 分岐・合流型推移をもつ決定過程, 日本数学会統計数学分科会講演アブストラクト (2022年3月), to appear.
- [3] G.L. Nemhauser: *Introduction to Dynamic Programming* Wiley, NY, 1966.