バイアップがある多クラス静的レベニューマネジメントモデル
Multi-class Static Revenue Management Model with Buy-up Behavior

筑波大学名誉教授・高木英明
Hideaki Takagi
Professor Emeritus, University of Tsukuba
takagi@sk.tsukuba.ac.jp

概 要

In the classical Littlewood's two-period model of static revenue management for airline seat reservation as well as its extensions to multi-period models by other researchers, it is assumed that the demands in each period are independent and that customers whose request for reservation are once rejected disappear immediately. This assumption does not reflect a common behavior of customers in practice such that they tend to seek booking again at higher fare. The theoretical treatment of such *buy-up* behavior is not simple because of the resultant mutual dependence of the demands over several periods. Some literature heuristically (incorrectly) treats the two-class model with customers' buy-up behavior.

In a series of papers, we study the optimal booking limits in the two- and more-period static revenue management models with customers' buy-up behavior. In the RIMS Proceedings of Symposium 2158 (paper 19) [9], we showed an analysis for the three-period model with numerical results. In the present paper, we proceed to study the four-period model (without numerical results) based on a newly found technique to derive the expressions for the first partial derivatives of the expected number of reserved seats with respect to the booking limits in each period.

1 はじめに

レベニューマネジメント (revenue management)（以前は**イールドマネジメント** (yield management) と言われた）の発端は，1978 年に米国で航空会社規制緩和法 (Airline Deregulation Act) が成立し，航空市場が自由化されて急成長した格安航空会社の PeopleExpress 社の安値攻勢に対抗するため，大手航空会社の American Airlines 社が既存のオンライン座席予約システム SABRE に蓄えられた予約実績から将来の予約数を予測し，予約日によって料金を変えることを編み出した画期的なビジネスモデルである [2], [7, p. 6]．その後，レベニューマネジメントは航空業界にとどまらず，ホテル、レンタカー等，変動する需要に対しても運用経費が固定しているので，収益が需要により決まるという特性をもつ業界の経営に適用されてきた．

現在のレベニューマネジメントの基礎となる数理モデルの始まりは，当時，British Airways 社に属した Ken Littlewood (1972) が提案した 2 期間モデルである [4]．このモデルでは，旅行を早期に計画できるレジャー客には安い料金で売り，搭乗日が近づいて予約を求めるビジネス客には高く売ることにより，予約数を最大化するのではなく，収益を最大化することを目指す．早期に来る多くのレジャー客に安く売ると，後になって高い料金でも厭わないビジネス客が来ても空席がないという機会損失を恐れ，レジャー客に売ってもよい座席数に上限を設ける．しかし，この上限値が低すぎると，ビジネス客が期待したほどに来なければ，航空機は多くの空席を残したまま離陸しなければならなくなる．従って，レジャー客とビジネス客の数が不確定なときに，期待収益が最大になるようなレジャー客に対する予約可能数の最適値 (**最適ブッキングリミット**, optimal booking limit) を求める問題が定式化される．

今日，**Littlewood の法則** (Littlewood's rule) と呼ばれる公式は，総座席数を C，早期の予約料金を r_2，後期の予約料金を r_1 $(> r_2)$ とし，ビジネス客の数（確率変数）D_1 の確率分布が与え

られたときに，レジャー客に予約を与える上限の最適値 b_2^* を計算する式

$$\frac{r_2}{r_1} = P\{D_1 > C - b_2^*\} \tag{1}$$

である．ここで，r_2/r_1 を**料金比** (fare ratio) という．早期に売れ残った座席は後期に r_1 円で売られるという **ネスト式ブッキング** (nested booking) 方式を仮定している．この式は，b_2^* がビジネス客の数 D_1 だけに依存し，レジャー客の数 D_2 に依存していないことに注意する．

この公式では，予約できなかったレジャー客はすべて退散することを前提としているが，より現実的には，それら客の一部は高い料金でも予約しようとするので，ビジネス客が増えたような状況になる．このような顧客行動は（客から見て）**バイアップ** (buy-up),（航空会社から見て）sell-up，あるいは vertical shift, upgrade などと呼ばれ，各文献でその影響が考察されている．バイアップ客の増分はもとのレジャー客数に依存するので，理論的には，2 つの期における需要が独立ではないレベニューマネジメント問題となり，多期間モデルの厳密な解析は簡単ではない．

予約できなかったレジャー客が後期に予約を求める割合を**バイアップ率** (buy-up factor) と言い，α で表す ($0 \le \alpha \le 1$)．レベニューマネジメントの代表的参考書である Phillips [6] と Talluri and van Ryzin [7] には，決定木（decision tree）の方法や限界座席価値（expected marginal value of capacity）の方法により，レジャー客予約可能数の最適値 b_2^* を計算する式

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{r_2}{r_1} - \alpha\right) = P\{D_1 > C - b_2^*\} \tag{2}$$

が示されている．この式の左辺は**変形料金比** (modified fare ratio) と呼ばれる [6, p. 168]．

式 (2) は $\alpha \to 0$（バイアップがない）のとき，式 (1) に帰着する．しかし，式 (2) は，バイアップがある場合に影響を与えるはずのレジャー客数 D_2 を含んでいないので，疑わしいことが明らかである．式 (2) を訂正する式

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{r_2}{r_1} - \alpha\right) = P\{\underbrace{D_1 + \alpha(D_2 - b_2^*) > C - b_2^*}_{\text{1 期に予約を求める客数が空席数より多い}} \mid D_2 > b_2^*\} \tag{3}$$

は Takagi (2021) [9] に示されている．この正しい式は Pfeifer (1989) [5] や Brumelle ら (1990) [1] によって導かれていたものであるが，何故か後続の基本的参考文献 [6, 7, 8] に引用されていない．佐藤・澤木 (2020)[10] にも，2 期間の需要が独立ではない一般の 2 期間モデルに対する正確な最適ブッキングリミットの導出が示されている．

3 期間モデルへの拡張結果は，数値計算結果とともに，講究録 2158 [11] に示されており，変形料金比は次のように表される．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{r_2}{r_1} - \alpha\right) \\
&= \frac{\begin{array}{l} P\{D_3 \le b_3^*, D_2 + D_3 > b_2^*, D_1 + \alpha(D_2 + D_3 - b_2^*) > C - b_2^*\} \\ \quad + P\{D_3 > b_3^*, D_2 + \beta(D_3 - b_3^*) > b_2^* - b_3^*, D_1 + \alpha[D_2 + \beta(D_3 - b_3^*) - b_2^* + b_3^*] > C - b_2^*\} \end{array}}{P\{D_3 \le b_3^*, D_2 + D_3 > b_2^*\} + P\{D_3 > b_3^*, D_2 + \beta(D_3 - b_3^*) > b_2^* - b_3^*\}}
\end{aligned} \tag{4}$$

この式に現れる記号は，後に示す定義を参照されたい．この式の右辺の分母は，2 期及び 3 期のブッキングリミットの最適値がそれぞれ b_2^* 及び b_3^* であるときに，1 期にバイアップ客がある確率である．また，分子は，1 期に予約を求める客数が空席数よりも多い確率であり，その上段が $D_3 \le b_3^*$ の場合を，下段が $D_3 > b_3^*$ の場合を表している．

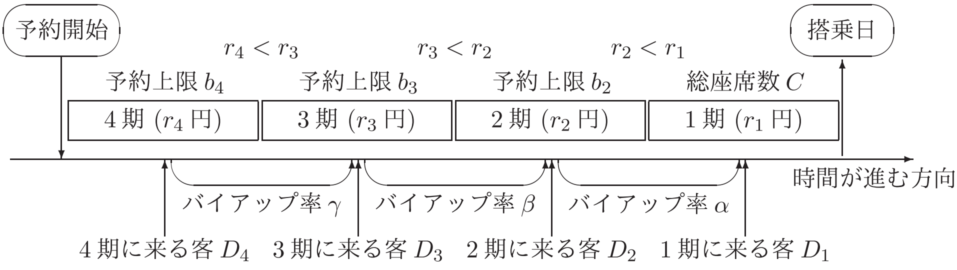

図 1: バイアップがある 4 期間静的レベニューマネジメントモデル．

3 期間モデルに対する解析を示した講究録 2158 [11] では、「同じ方法は，原理的に 4 期間以上のモデルにも拡張できるが，煩雑になる」と述べたが，実際にはできなかった．その後，4 期間以上のモデルについても，最適ブッキングリミットの算出に使われる連立方程式に現れる多重定積分を各期の予約座席数の表現式から単純に導くことができる方法を見つけたので，本稿において，その方法を応用した 4 期間モデルの定式化を報告する．

バイアップがある静的レベニューマネジメントモデルは，各期の需要が相互依存するモデルの簡単な例であるが，その解析は容易ではない．Gallego and Topalogue (2019) [3] は「実務家は，多年にわたり，各期の需要が相互依存する場合に対する Littlewood の法則や EMSR (expected marginal seat revenue) 近似法の拡張を求めてきた．しかし，Littlewood の法則を正しく拡張する方法は，思ったより難しいことが分かった」と述べている．

4 期間静的モデルに係る記号を定義する（図 1 を参照)．期の番号は，時間の進む方向とは逆方向に，1 期 (搭乗日），2 期，3 期，4 期（予約開始）と呼ぶ．t 期に新たに来る客の数（需要）を非負の連続的な値を取る（この仮定は，客数が多ければ近似的に正しい）確率変数 D_t で表す（$t = 1, 2, 3, 4$）．これらは互いに独立であると仮定する．t 期に予約を求める客は，t 期に新しく来る客と，$t-1$ 期に予約できなかった客のうちバイアップを試みる客である．t 期に予約できる客の上限は t 期のブッキングリミットである．各期のバイアップ率を次のように定める．4 期に予約できなかった客が 3 期に予約を求める確率を γ とし，3 期に予約できなかった客が 2 期に予約を求める確率を β とし，2 期に予約できなかった客が 1 期に予約を求める確率を α とする．総座席数を C とし，t 期のブッキングリミットを b_t ($b_4 \le b_3 \le b_2 \le C$) とする．$t$ 期の予約料金を r_t ($r_4 < r_3 < r_2 < r_1$) とする．最適ブッキングリミットを決定するための連立方程式を解析的に表す際には、確率変数 D_t の分布関数を $F_t(x) := P\{D_t \le x\}$ とし，密度関数を $f_t(x) := dF_t(x)/dx, x \ge 0$ とし，$F_t(0) = 0, F_t(\infty) = 1$ を仮定する ($t = 1, 2, 3, 4$)．各期の需要の確率分布が前もって与えられているという仮定により，このモデルを「静的」と呼ぶ．

2　各期に予約される座席数

各期に予約される座席数を，その期に新たに到着する客の数，ブッキングリミット，及びバイアップ率で表す．4 期に予約される座席数を $S_4(b_4)$ で表し，3 期に予約される座席数を $S_3(b_3, b_4)$ で表し，2 期に予約される座席数を $S_2(b_2, b_3, b_4)$ で表し，1 期に予約される座席数を $S_1(b_2, b_3, b_4)$ で表す．$S_1(b_2, b_3, b_4)$ は総座席数 C に依存するが，定数 C は明示しない．ネスト式ブッキング方式に従って，各期に予約される座席数は，その期及びそれ以前の期における需要とブッキングリミットにより，以下のように表される．

4 期に予約される座席数は

$$S_4(b_4) = \min\{b_4, D_4\} = \begin{cases} D_4 & D_4 \le b_4, \\ b_4 & D_4 > b_4 \end{cases} \tag{5}$$

である．

3 期に予約される座席数は

$$\begin{aligned} S_3(b_3, b_4) &= \min\{\underbrace{b_3 - b_4 + \max\{0, b_4 - D_4\}}_{4\text{ 期に売れ残った座席数}}, \underbrace{D_3 + \gamma\max\{0, D_4 - b_4\}}_{3\text{ 期に予約を求める客数}}\} \\ &= \begin{cases} \min\{b_3 - D_4, D_3\} & D_4 \le b_4, \\ \min\{b_3 - b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4)\} & D_4 > b_4 \end{cases} \\ &= \begin{cases} D_3 & D_4 \le b_4, D_3 + D_4 \le b_3, \\ b_3 - D_4 & D_4 \le b_4, D_3 + D_4 > b_3, \\ D_3 + \gamma(D_4 - b_4) & D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) \le b_3 - b_4, \\ b_3 - b_4 & D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) > b_3 - b_4 \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

である．ここで，$\gamma(D_4 - b_4)$ は，4 期で $\{D_4 > b_4\}$ のときに発生する 3 期からのバイアップ客の数であることに注意する．

2 期に予約される座席数は次のように表される．

$$\begin{aligned} &S_2(b_2, b_3, b_4) \\ &= \begin{cases} \min\{b_2 - D_3 - D_4, D_2\} & D_4 \le b_4, D_3 + D_4 \le b_3, \\ \min\{b_2 - b_3, D_2 + \beta(D_3 + D_4 - b_3)\} & D_4 \le b_4, D_3 + D_4 > b_3, \\ \min\{b_2 - D_3 - b_4 - \gamma(D_4 - b_4), D_2\} & D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) \le b_3 - b_4, \\ \min\{b_2 - b_3, D_2 + \beta[D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_3 - b_4)]\} & \\ & D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) > b_3 - b_4 \end{cases} \\ &= \begin{cases} D_2 & D_4 \le b_4, D_3 + D_4 \le b_3, D_2 + D_3 + D_4 \le b_2, \\ b_2 - D_3 - D_4 & D_4 \le b_4, D_3 + D_4 \le b_3, D_2 + D_3 + D_4 > b_2, \\ D_2 + \beta(D_3 + D_4 - b_3) & D_4 \le b_4, D_3 + D_4 > b_3, D_2 + \beta(D_3 + D_4 - b_3) \le b_2 - b_3, \\ b_2 - b_3 & D_4 \le b_4, D_3 + D_4 > b_3, D_2 + \beta(D_3 + D_4 - b_3) > b_2 - b_3, \\ D_2 & D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) \le b_3 - b_4, D_2 + D_3 + \gamma(D_4 - b_4) \le b_2 - b_4, \\ b_2 - D_3 - b_4 - \gamma(D_4 - b_4) & \\ & D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) \le b_3 - b_4, D_2 + D_3 + \gamma(D_4 - b_4) > b_2 - b_4, \\ D_2 + \beta[D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_3 - b_4)] & \\ & D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) > b_3 - b_4, \\ & D_2 + \beta[D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_3 - b_4)] \le b_2 - b_3, \\ b_2 - b_3 & D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) > b_3 - b_4, \\ & D_2 + \beta[D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_3 - b_4)] > b_2 - b_3 \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

1期に予約される座席数は次のように与えられる．
(i): 4期からのバイアップがない場合 ($D_4 \le b_4$):

$$
\begin{aligned}
&S_1(b_2, b_3, b_4) \\
&= \begin{cases}
\min\{C - D_2 - D_3 - D_4, D_1\} \\
\qquad\qquad D_4 \le b_4, D_3 + D_4 \le b_3, D_2 + D_3 + D_4 \le b_2, \\
\min\{C - b_2, D_1 + \alpha(D_2 + D_3 + D_4 - b_2)\} \\
\qquad\qquad D_4 \le b_4, D_3 + D_4 \le b_3, D_2 + D_3 + D_4 > b_2, \\
\min\{C - D_2 - b_3 - \beta(D_3 + D_4 - b_3), D_1\} \\
\qquad\qquad D_4 \le b_4, D_3 + D_4 > b_3, D_2 + \beta(D_3 + D_4 - b_3) \le b_2 - b_3, \\
\min\{C - b_2, D_1 + \alpha[D_2 + \beta(D_3 + D_4 - b_3) - (b_2 - b_3)]\} \\
\qquad\qquad D_4 \le b_4, D_3 + D_4 > b_3, D_2 + \beta(D_3 + D_4 - b_3) > b_2 - b_3
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
D_1 & D_4 \le b_4, D_3 + D_4 \le b_3, D_2 + D_3 + D_4 \le b_2, D_1 + D_2 + D_3 + D_4 \le C, \\
C - D_2 - D_3 - D_4 & \\
& D_4 \le b_4, D_3 + D_4 \le b_3, D_2 + D_3 + D_4 \le b_2, D_1 + D_2 + D_3 + D_4 > C, \\
D_1 + \alpha(D_2 + D_3 + D_4 - b_2) & \\
& D_4 \le b_4, D_3 + D_4 \le b_3, D_2 + D_3 + D_4 > b_2, \\
& D_1 + \alpha(D_2 + D_3 + D_4 - b_2) \le C - b_2, \\
C - b_2 & D_4 \le b_4, D_3 + D_4 \le b_3, D_2 + D_3 + D_4 > b_2, \\
& D_1 + \alpha(D_2 + D_3 + D_4 - b_2) > C - b_2, \\
D_1 & D_4 \le b_4, D_3 + D_4 > b_3, D_2 + \beta(D_3 + D_4 - b_3) \le b_2 - b_3, \\
& D_1 + D_2 + \beta(D_3 + D_4 - b_3) \le C - b_3, \\
C - D_2 - b_3 - \beta(D_3 + D_4 - b_3) & \\
& D_4 \le b_4, D_3 + D_4 > b_3, D_2 + \beta(D_3 + D_4 - b_3) \le b_2 - b_3, \\
& D_1 + D_2 + \beta(D_3 + D_4 - b_3) > C - b_3, \\
D_1 + \alpha[D_2 + \beta(D_3 + D_4 - b_3) - (b_2 - b_3)] & \\
& D_4 \le b_4, D_3 + D_4 > b_3, D_2 + \beta(D_3 + D_4 - b_3) > b_2 - b_3, \\
& D_1 + \alpha[D_2 + \beta(D_3 + D_4 - b_3) - (b_2 - b_3)] \le C - b_2, \\
C - b_2 & D_4 \le b_4, D_3 + D_4 > b_3, D_2 + \beta(D_3 + D_4 - b_3) > b_2 - b_3, \\
& D_1 + \alpha[D_2 + \beta(D_3 + D_4 - b_3) - (b_2 - b_3)] > C - b_2.
\end{cases}
\end{aligned} \tag{8}
$$

式 (5)〜(9) に示された各期に予約される座席数に対し，その期待値を需要の分布関数及び密度関数の多重定積分で表すことは可能である．しかし，期待収益を最大化する最適ブッキングリミットを求めるためには，その表現を必要としないので，ここには示さない（第3節の最後を参照）．

Case (ii): 4 期からのバイアップがある場合 $(D_4 > b_4)$:

$$
\begin{aligned}
&S_1(b_2, b_3, b_4)\\
&= \begin{cases}
\min\{C - D_2 - D_3 - \gamma(D_4 - b_4) - b_4, D_1\} \\
\qquad\qquad D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) \le b_3 - b_4, D_2 + D_3 + \gamma(D_4 - b_4) \le b_2 - b_4, \\
\min\{C - b_2, D_1 + \alpha[D_2 + D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_2 - b_4)]\} \\
\qquad\qquad D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) \le b_3 - b_4, D_2 + D_3 + \gamma(D_4 - b_4) > b_2 - b_4, \\
\min\{C - D_2 - b_3 - \beta[D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_3 - b_4)], D_1\} \\
\qquad\qquad D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) > b_3 - b_4, \\
\qquad\qquad D_2 + \beta[D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_3 - b_4)] \le b_2 - b_3, \\
\min\{C - b_2, D_1 + \alpha\langle D_2 + \beta[D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_3 - b_4)] - (b_2 - b_3)\rangle\} \\
\qquad\qquad D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) > b_3 - b_4, \\
\qquad\qquad D_2 + \beta[D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_3 - b_4)] > b_2 - b_3
\end{cases}\\
&= \begin{cases}
D_1 & D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) \le b_3 - b_4, D_2 + D_3 + \gamma(D_4 - b_4) \le b_2 - b_4, \\
& D_1 + D_2 + D_3 + \gamma(D_4 - b_4) \le C - b_4, \\
C - D_2 - D_3 - \gamma(D_4 - b_4) - b_4 & \\
& D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) \le b_3 - b_4, D_2 + D_3 + \gamma(D_4 - b_4) \le b_2 - b_4, \\
& D_1 + D_2 + D_3 + \gamma(D_4 - b_4) > C - b_4, \\
D_1 + \alpha[D_2 + D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_2 - b_4)] & \\
& D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) \le b_3 - b_4, D_2 + D_3 + \gamma(D_4 - b_4) > b_2 - b_4, \\
& D_1 + \alpha[D_2 + D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_2 - b_4)] \le C - b_2, \\
C - b_2 & D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) \le b_3 - b_4, D_2 + D_3 + \gamma(D_4 - b_4) > b_2 - b_4, \\
& D_1 + \alpha[D_2 + D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_2 - b_4)] > C - b_2, \\
D_1 & D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) > b_3 - b_4, D_2 + \beta[D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_3 - b_4)] \le b_2 - b_3, \\
& D_1 + D_2 + \beta[D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_3 - b_4)] \le C - b_3, \\
C - D_2 - b_3 - \beta[D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_3 - b_4)] & \\
& D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) > b_3 - b_4, \\
& D_2 + \beta[D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_3 - b_4)] \le b_2 - b_3, \\
& D_1 + D_2 + \beta[D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_3 - b_4)] > C - b_3, \\
D_1 + \alpha\{D_2 + \beta[D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_3 - b_4)] - (b_2 - b_3)\} & \\
& D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) > b_3 - b_4, \\
& D_2 + \beta[D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_3 - b_4)] > b_2 - b_3, \\
& D_1 + \alpha\{D_2 + \beta[D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_3 - b_4)] - (b_2 - b_3)\} \le C - b_2, \\
C - b_2 & D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) > b_3 - b_4, \\
& D_2 + \beta[D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_3 - b_4)] > b_2 - b_3, \\
& D_1 + \alpha\{D_2 + \beta[D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_3 - b_4)] - (b_2 - b_3)\} > C - b_2.
\end{cases}
\end{aligned} \tag{9}
$$

3　期待収益を最大化する最適ブッキングリミット

期待収益は，3 つのブッキングリミット b_2, b_3, b_4 の関数として，

$$E[R(b_2,b_3,b_4)] = r_4 E[S_4(b_4)] + r_3 E[S_3(b_3,b_4)] + r_2 E[S_2(b_2,b_3,b_4)] + r_1 E[S_1(b_2,b_3,b_4)] \quad (10)$$

で与えられる．従って，$E[R(b_2,b_3,b_4)]$ を最大化する最適値 b_2^*, b_3^*, b_4^* は，必要条件として，連立方程式

$$\left.\frac{\partial E[R(b_2,b_3,b_4)]}{\partial b_4}\right|_{b_2=b_2^*,b_3=b_3^*,b_4=b_4^*} = \left.\frac{\partial E[R(b_2,b_3,b_4)]}{\partial b_3}\right|_{b_2=b_2^*,b_3=b_3^*,b_4=b_4^*}$$
$$= \left.\frac{\partial E[R(b_2,b_3,b_4)]}{\partial b_2}\right|_{b_2=b_2^*,b_3=b_3^*,b_4=b_4^*} = 0 \quad (11)$$

の解である．期待収益 $E[R(b_2,b_3,b_4)]$ の b_4, b_3 及び b_2 に関する 1 階偏微分係数は，各期に予約される期待座席数の b_4, b_3 及び b_2 に関する 1 階偏微分係数の線形結合として，次のように与えられる．

$$\frac{\partial E[R(b_2,b_3,b_4)]}{\partial b_4} = r_4\frac{dE[S_4(b_4)]}{db_4} + r_3\frac{\partial E[S_3(b_3,b_4)]}{\partial b_4} + r_2\frac{\partial E[S_2(b_2,b_3,b_4)]}{\partial b_4} + r_1\frac{\partial E[S_1(b_2,b_3,b_4)]}{\partial b_4}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial E[R(b_2,b_3,b_4)]}{\partial b_3} = r_3\frac{\partial E[S_3(b_3,b_4)]}{\partial b_3} + r_2\frac{\partial E[S_2(b_2,b_3,b_4)]}{\partial b_3} + r_1\frac{\partial E[S_1(b_2,b_3,b_4)]}{\partial b_3}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial E[R(b_2,b_3,b_4)]}{\partial b_2} = r_2\frac{\partial E[S_2(b_2,b_3,b_4)]}{\partial b_2} + r_1\frac{\partial E[S_1(b_2,b_3,b_4)]}{\partial b_2}. \quad (14)$$

ここで，これらの式の右辺に現れる各期の予約数 $S_4(b_4), S_3(b_3,b_4), S_2(b_2,b_3,b_4), S_1(b_2,b_3,b_4)$ は，式 (5)～(9) に示されているように，ブッキングリミット b_2, b_3, b_4 の線形関数である．よって，各期の予約数の期待値 $E[S_4(b_4)], E[S_3(b_3,b_4)], E[S_2(b_2,b_3,b_4)], E[S_1(b_2,b_3,b_4)]$ もまた，ブッキングリミット b_2, b_3, b_4 の線形関数である．従って，上記の b_4, b_3 及び b_2 に関するそれらの 1 階偏微分係数は，式 (5)～(9) において，b_4, b_3 及び b_2 が現れる場合の多重確率を集めたものになる．

4　変形料金比

上に説明したように，式 (12)～(14) の右辺に現れる各期の予約数の期待値 $E[S_4(b_4)]$, $E[S_3(b_3,b_4)]$, $E[S_2(b_2,b_3,b_4)]$, 及び $E[S_1(b_2,b_3,b_4)]$ のブッキングリミット b_4, b_3 及び b_2 に関する 1 階偏微分係数を，式 (5)～(9) から機械的に書き下すことができる．

この方法を式 (11) と (14) に適用して，4 期間モデルに対する変形料金比が次のように得られる．

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{r_2}{r_1}-\alpha\right)$$

$$= \frac{\begin{array}{l} P\{D_4 \le b_4, D_3+D_4 \le b_3, D_2+D_3+D_4 > b_2, D_1+\alpha(D_2+D_3+D_4-b_2) > C-b_2\} \\ +\ P\{D_4 \le b_4, D_3+D_4 > b_3, D_2+\beta(D_3+D_4-b_3) > b_2-b_3, \\ \qquad D_1+\alpha[D_2+\beta(D_3+D_4-b_3)-(b_2-b_3)] > C-b_2\} \\ + P\{D_4 > b_4, D_3+\gamma(D_4-b_4) \le b_3-b_4, D_2+D_3+\gamma(D_4-b_4) > b_2-b_4, \\ \qquad D_1+\alpha[D_2+D_3+\gamma(D_4-b_4)-(b_2-b_4)] > C-b_2\} \\ + P\{D_4 > b_4, D_3+\gamma(D_4-b_4) > b_3-b_4, D_2+\beta[D_3+\gamma(D_4-b_4)-(b_3-b_4)] > b_2-b_3, \\ \qquad D_1+\alpha\langle D_2+\beta[D_3+\gamma(D_4-b_4)-(b_3-b_4)]-(b_2-b_3)\rangle > C-b_2\} \end{array}}{\begin{array}{l} P\{D_4 \le b_4, D_3+D_4 \le b_3, D_2+D_3+D_4 > b_2\} \\ + P\{D_4 \le b_4, D_3+D_4 > b_3, D_2+\beta(D_3+D_4-b_3) > b_2-b_3\} \\ + P\{D_4 > b_4, D_3+\gamma(D_4-b_4) \le b_3-b_4, D_2+D_3+\gamma(D_4-b_4) > b_2-b_4\} \\ + P\{D_4 > b_4, D_3+\gamma(D_4-b_4) > b_3-b_4, D_2+\beta[D_3+\gamma(D_4-b_4)-(b_3-b_4)] > b_2-b_3\} \end{array}} \tag{15}$$

式 (15) の分母は，1 期にバイアップ客がある確率であり，多重確率及び多重定積分により，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E[S_2(b_2,b_3,b_4)]}{\partial b_2} \\
&= P\{D_4 \le b_4, D_3+D_4 \le b_3, D_2+D_3+D_4 > b_2\} \\
&+ P\{D_4 \le b_4, D_3+D_4 > b_3, D_2+\beta(D_3+D_4-b_3) > b_2-b_3\} \\
&+ P\{D_4 > b_4, D_3+\gamma(D_4-b_4) \le b_3-b_4, D_2+D_3+\gamma(D_4-b_4) > b_2-b_4\} \\
&+ P\{D_4 > b_4, D_3+\gamma(D_4-b_4) > b_3-b_4, D_2+\beta[D_3+\gamma(D_4-b_4)-(b_3-b_4)] > b_2-b_3\} \\
&= 1-\int_0^{b_4} F_4(u)du \int_{b_2-b_3}^{b_2-u} f_3(b_2-u-y)f_2(y)dy \\
&-\int_{b_4}^{b_3} F_4\left(b_4+\frac{u-b_4}{\gamma}\right)du \int_{b_2-b_3}^{b_2-u} f_3(b_2-u-y)f_2(y)dy \\
&-\int_0^{b_4} F_4(u)du \int_0^{b_2-b_3} f_3\left(b_3-u+\frac{b_2-b_3-y}{\beta}\right)f_2(y)dy \\
&-\int_{b_4}^{b_3+(b_2-b_3)/\beta} F_4\left(b_4+\frac{u-b_4}{\gamma}\right)du \int_0^{\min\{b_2-b_3,b_2-b_3-\beta(u-b_3)\}} f_3\left(b_3-u+\frac{b_2-b_3-y}{\beta}\right)f_2(y)dy
\end{aligned} \tag{16}$$

で与えられる．この多重確率は，式 (7) において，b_2 に線形依存する 4 つの場合の確率を集めることによって得られることに注意する．さらに，多重定積分は，Mathematica を使って，以下のような簡単なプログラムにより数値計算される（数値積分は速く計算できる）．

```
1-NIntegrate[F4[u]*f3[b2-u-y]*f2[y],{u,0,b4},{y,b2-b3,b2-u}]
-NIntegrate[F4[b4+(u-b4)/gamma]*f3[b2-u-y]*f2[y],{u,b4,b3},{y,b2-b3,b2-u}]
-NIntegrate[F4[u]*f3[b3-u+(b2-b3-y)/beta]*f2[y],{u,0,b4},{y,0,b2-b3}]
-NIntegrate[F4[b4+(u-b4)/gamma]*f3[b3-u+(b2-b3-y)/beta]*f2[y],
{u,b4,b3+(b2-b3)/beta},{y,0,Min[b2-b3,b2-b3-beta*(u-b3)]}]
```

また，式 (15) の分子は

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial E[S_1(b_2,b_3,b_4)]}{\partial b_2}\\
&= P\{D_4 \le b_4, D_3+D_4 \le b_3, D_2+D_3+D_4 > b_2, D_1+\alpha(D_2+D_3+D_4-b_2) > C-b_2\}\\
&+ P\{D_4 \le b_4, D_3+D_4 > b_3, D_2+\beta(D_3+D_4-b_3) > b_2-b_3,\\
&\qquad\qquad D_1+\alpha[D_2+\beta(D_3+D_4-b_3)-(b_2-b_3)] > C-b_2\}\\
&+ P\{D_4 > b_4, D_3+\gamma(D_4-b_4) \le b_3-b_4, D_2+D_3+\gamma(D_4-b_4) > b_2-b_4,\\
&\qquad\qquad D_1+\alpha[D_2+D_3+\gamma(D_4-b_4)-(b_2-b_4)] > C-b_2\}\\
&+ P\{D_4 > b_4, D_3+\gamma(D_4-b_4) > b_3-b_4, D_2+\beta[D_3+\gamma(D_4-b_4)-(b_3-b_4)] > b_2-b_3,\\
&\qquad\qquad D_1+\alpha\langle D_2+\beta[D_3+\gamma(D_4-b_4)-(b_3-b_4)]-(b_2-b_3)\rangle > C-b_2\}\\
&+ \alpha\Big\langle P\{D_4 \le b_4, D_3+D_4 \le b_3, D_2+D_3+D_4 > b_2, D_1+\alpha(D_2+D_3+D_4-b_2) \le C-b_2\}\\
&+ P\{D_4 \le b_4, D_3+D_4 > b_3, D_2+\beta(D_3+D_4-b_3) > b_2-b_3,\\
&\qquad\qquad D_1+\alpha[D_2+\beta(D_3+D_4-b_3)-(b_2-b_3)] \le C-b_2\}\\
&+ P\{D_4 > b_4, D_3+\gamma(D_4-b_4) \le b_3-b_4, D_2+D_3+\gamma(D_4-b_4) > b_2-b_4,\\
&\qquad\qquad D_1+\alpha[D_2+D_3+\gamma(D_4-b_4)-(b_2-b_4)] \le C-b_2\}\\
&+ P\{D_4 > b_4, D_3+\gamma(D_4-b_4) > b_3-b_4, D_2+\beta[D_3+\gamma(D_4-b_4)-(b_3-b_4)] > b_2-b_3,\\
&\qquad\qquad D_1+\alpha\langle D_2+\beta[D_3+\gamma(D_4-b_4)-(b_3-b_4)]-(b_2-b_3)\rangle \le C-b_2\}\Big\rangle
\end{aligned}
\tag{17}
$$

において，係数 α の掛かっていない部分であり，これは，1 期において予約を求める客数が空席数よりも多い確率である．始めのの 2 つの多重確率が $D_4 \le b_4$ の場合を，後の 2 つの多重確率ががが $D_4 > b_4$ の場合を表している．ここに現れる多重確率も，それぞれ以下のように，多重定積分と Mathematica のプログラムで表すことができる．

$$
\begin{aligned}
&P\{D_4 \le b_4, D_3+D_4 \le b_3, D_2+D_3+D_4 > b_2, D_1+\alpha(D_2+D_3+D_4-b_2) > C-b_2\}\\
&= \int_0^{b_4} f_4(u)du \int_0^{b_3-u} f_3(z)dz \int_{b_2-z-u}^{(C-b_2)/\alpha+b_2-z-u} f_2(y)\{1-F_1[C-b_2-\alpha(y+z+u-b_2)]\}dy
\end{aligned}
$$

```
NIntegrate[f4[u]*f3[z]*f2[y]*(1-F1[CC-b2-alpha*(y+z+u-b2)]),
{u,0,b4},{z,0,b3-u},{y,b2-z-u,(CC-b2)/alpha+b2-z-u}]
```

$$
\begin{aligned}
&P\{D_4 \le b_4, D_3+D_4 > b_3, D_2+\beta(D_3+D_4-b_3) > b_2-b_3,\\
&\qquad D_1+\alpha[D_2+\beta(D_3+D_4-b_3)-(b_2-b_3)] > C-b_2\}\\
&= \int_0^{b_4} f_4(u)du \int_{b_3-u}^{(b_2-b_3)/\beta+b_3-u} f_3(z)dz\\
&\qquad \int_{b_2-b_3-\beta(z+u-b_3)}^{(C-b_2)/\alpha+b_2-b_3-\beta(z+u-b_3)} f_2(y)\Big\langle 1-F_1\{C-b_2-\alpha[y+\beta(z+u-b_3)-(b_2-b_3)]\}\Big\rangle dy
\end{aligned}
$$

```
NIntegrate[f4[u]*f3[z]*f2[y]*(1-F1[CC-b2-alpha*(y+beta*(z+u-b3)-(b2-b3))]),
{u,0,b4},{z,b3-u,(b2-b3)/beta+b3-u},
{y,b2-b3-beta*(z+u-b3),(CC-b2)/alpha+b2-b3-beta*(z+u-b3)}]
```

$$
\begin{aligned}
&P\{D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) \le b_3 - b_4, D_2 + D_3 + \gamma(D_4 - b_4) > b_2 - b_4,\\
&\qquad D_1 + \alpha[D_2 + D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_2 - b_4)] > C - b_2\}\\
&= \int_{b_4}^{(b_3-b_4)/\gamma+b_4} f_4(u)du \int_0^{b_3-b_4-\gamma(u-b_4)} f_3(z)dz\\
&\qquad \int_{b_2-b_4-z-\gamma(u-b_4)}^{(C-b_2)/\alpha+b_2-b_4-z-\gamma(u-b_4)} f_2(y) \left\langle 1 - F_1\{C - b_2 - \alpha[y + z + \gamma(u - b_4) - (b_2 - b_4)]\}\right\rangle dy
\end{aligned}
$$

```
NIntegrate[f4[u]*f3[z]*f2[y]*(1-F1[CC-b2-alpha*(y+z+gamma*(u-b4)-(b2-b4))]),
{u,b4,(b3-b4)/gamma+b4},{z,0,b3-b4-gamma*(u-b4)},
{y,b2-b4-z-gamma*(u-b4),(CC-b2)/alpha+b2-b4-z-gamma*(u-b4)}]
```

$$
\begin{aligned}
&P\{D_4 > b_4, D_3 + \gamma(D_4 - b_4) > b_3 - b_4, D_2 + \beta[D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_3 - b_4)] > b_2 - b_3,\\
&\qquad D_1 + \alpha\langle D_2 + \beta[D_3 + \gamma(D_4 - b_4) - (b_3 - b_4)] - (b_2 - b_3)\rangle > C - b_2\}\\
&= \int_{b_4}^{(b_3-b_4)/\gamma+b_4} f_4(u)du \int_{b_3-b_4-\gamma(u-b_4)}^{(b_2-b_3)/\beta+b_3-b_4-\gamma(u-b_4)} f_3(z)dz\\
&\qquad \int_{b_2-b_3-\beta[z+\gamma(u-b_4)-(b_3-b_4)]}^{(C-b_2)/\alpha+b_2-b_3-\beta[z+\gamma(u-b_4)-(b_3-b_4)]} f_2(y)\\
&\qquad \times \left\langle 1 - F_1\{C - b_2 - \alpha\langle y + \beta[z + \gamma(u - b_4) - (b_3 - b_4)] - (b_2 - b_3)\rangle\}\right\rangle dy
\end{aligned}
$$

```
NIntegrate[f4[u]*f3[z]*f2[y]
*(1-F1[CC-b2-alpha*(y+beta*(z+gamma*(u-b4)-(b3-b4))-(b2-b3))]),
{u,b4,(b3-b4)/gamma+b4},
{z,b3-b4-gamma*(u-b4),(b2-b3)/beta+b3-b4-gamma*(u-b4)},
{y,b2-b3-beta*(z+gamma*(u-b4)-(b3-b4)),
(CC-b2)/alpha+b2-b3-beta*(z+gamma*(u-b4)-(b3-b4))}]
```

式 (12) 及び (13) についても，同様の方法により，予約数 $S_3(b_3, b_4), S_2(b_2, b_3, b_4), S_1(b_2, b_3, b_4)$ のブッキングリミット b_3, b_2 に関する 1 階偏微分係数を多重確率で表すことができ，さらに、それらを多重定積分で表した式を Mathematica で数値評価できる．これらの結果を式 (11) に代入すると，3 変数 b_2, b_3, b_4 に関する 3 つの非線形連立方程式が得られる．これを数値的に解いて，最適ブッキングリミット b_2^*, b_3^*, b_4^* を求めることができる．

5　あとがき

本稿の執筆時点（2022 年 1 月）において，4 期間モデルの最適ブッキングリミットを求め，そのときの最大収益を計算する数値計算は未完了である．

参考文献

[1] Brumelle SL, McGill JI, Oum TH, Sawaki K, and Tretheway MW, Allocation of airline seats between stochastically dependent demands, *Transportation Science*, 24(3), pp.183–192, August 1990.

[2] Cross RG, *Revenue Management*, Broadway Books, 1997. 水島温夫訳, 儲からない時代に利益を生み出すRM[収益管理］のすべて，日本実業出版社，1998年10月．第4章 ダビデの敗北〜ピープル・エクスプレス vs アメリカン航空．

[3] Gallego G and Topaloglu H, *Revenue Management and Pricing Analytics*, Springer Science + Business Media, 2019.

[4] Littlewood K, Forecasting and control of passenger bookings, *Proceedings of the Twelfth Annual AGIFORS Symposium* (edited by J. Hinson), pp.95–117, Nathanya, Israel, 1972. Reprinted in the *Journal of Revenue and Pricing Management*, 4(2), pp.111–123, 2005.

[5] Pfeifer PE, The airline discount fare allocation problem, *Decision Sciences*, 20(1), pp.149–157, Winter 1989.

[6] Phillips R, *Pricing and Revenue Optimization*, Stanford University Press, 2005.

[7] Talluri KT and van Ryzin GJ, *The Theory and Practice of Revenue Management*, Springer Science + Business Media, 2004.

[8] van Ryzin GJ and Talluri KT, An introduction to revenue management, *Tutorials in Operations Research*, pp.142–194, INFORMS 2005.

[9] H. Takagi, Comment on modified fare ratio in a two-class static revenue management model with buy-up behavior, *Transportation Science*, Vol.55, No.6, pp.1228–1231, November–December 2021. Published online, 19 October 2021. `https://doi/org/10.1287/trsc.2021.1082` .

[10] 佐藤公俊・澤木勝茂，レベニューマネジメント：収益管理の基礎からダイナミックプライシングまで，共立出版，2020年11月．4.3, 4.4節．

[11] 高木英明，バイアップがある静的レベニューマネジメントモデル，京都大学数理解析研究所講究録2158, 論文19, pp.159–170．RIMS共同研究（公開型）不確実・不確定性の下における数理的意思決定の理論と応用，京都大学数理解析研究所（京都市），2020年6月（2019年11月11–13日に発表）．