A resolvent trace formula of Jacquet-Zagier type for Hilbert Maass forms

久家　聖二（九州大学）

Graduate School of Mathematics, Kyushu University
Motooka 744, Nishi-ku Fukuoka 819-0395, Japan

概 要

杉山氏, 都築氏は, Jacquet-Zagier 型跡公式を用いて, Hilbert モジュラー形式に対する対称 2 次 L 関数に関する公式を得た. 本記事では, パラレルウェイト 0 の Hilbert Maass 形式に対する, 杉山-都築の跡公式の類似となる公式を与える.

1　研究の背景

1.1　Zagier の公式

まずは, 本研究の出発点となる, Zagier の公式 ([9]) について紹介する. $\mathbb{H}=\{x+\sqrt{-1}y \mid x,y\in\mathbb{R},\ y>0\}$ を上半平面, $\Gamma=SL_2(\mathbb{Z})$, 正の偶数 $k\geq 4$ に対して, $S_k(\Gamma)$ を重さ k, レベル 1 の正則カスプ形式全体の空間とする. $S_k(\Gamma)$ 上の Petersson 内積は

$$\langle f,g\rangle=\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{g(z)}y^k\frac{dxdy}{y^2},\quad f,g\in S_k(\Gamma)$$

で定義される.

正規化された Hecke 同時固有形式 $f\in S_k(\Gamma)$ に対して, その Fourier 展開 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_f(n)q^n$ $(q=e^{2\pi\sqrt{-1}z})$ を与えたとき, f に関する対称 2 次 L 関数 $L(s,f\times f)$ を

$$L(s,f\times f)=2^{-s-k+1}\pi^{-\frac{3}{2}(s+k-1)}\Gamma(s+k-1)\Gamma(\tfrac{s+1}{2})\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_f(n)^2}{n^{s+k-1}}$$

で定義する. この級数は, 領域 $\mathrm{Re}>1$ で広義一様絶対収束し, 複素平面全体に正則に解析接続され, 関数等式

$$L(1-s,f\times f)=L(s,f\times f)$$

を満たすことが知られている. Hecke 同時固有形式からなる $S_k(\Gamma)$ の正規化された直交基底 $\{f_i\}_{1\leq i\leq \dim(S_k(\Gamma))}$ を取ったとする. このとき, Zagier は以下の公式を証明した.

Theorem 1.1 (Zagier([9])). $k \geq 4$ を偶数, $m \in \mathbb{N}$ とする. このとき, $2-k < \mathrm{Re}(s) < k-1$ なる $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} C_{k,s} \sum_{i=1}^{\dim(S_k(\Gamma))} \frac{L(s, f_i \times f_i)}{L(1, f_i \times f_i)} a_{f_i}(m) \\ &= m^{k-1} \sum_{t \in \mathbb{Z}} \left\{ I(t^2-4m, t; s) + I(t^2-4m, -t; s) \right\} L(s, t^2-4m) \\ &\quad + \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{\Gamma(k+s-1)\zeta(2s)}{2^{2s+k-3}\pi^{s-1}\Gamma(k)} m^{\frac{k-s-1}{2}} & (m \text{ は平方数}) \\ 0 & (m \text{ は平方数でない}) \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $C_{k,s} = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}} 2^{-s-k+3} \pi^{\frac{s+1}{2}}}{(k-1)\Gamma(\frac{s+1}{2})}$ であり, $\Delta = t^2 - 4m$, $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})/\mathbb{Q}$ の判別式を D, $\Delta = Df^2$ $(f \in \mathbb{N})$ とおいたとき, $I(\Delta, t; s)$ と $L(s, \Delta)$ はそれぞれ

$$I(\Delta, t; s) = \frac{\Gamma(k-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k)} \int_0^\infty \frac{y^{k+s-2}}{(y^2 + \sqrt{-1}ty - \frac{\Delta}{4})^{k-\frac{1}{2}}} dy,$$

$$L(s, \Delta) = \begin{cases} \zeta(2s-1) & (\Delta = 0) \\ L(s, (\frac{D}{\bullet})) \sum_{d|f} \mu(d) (\frac{D}{d}) d^{-s} \sigma_{1-2s}(\frac{f}{d}) & (\Delta \neq 0) \end{cases}$$

で与えられる.

Zagier の公式は Δ が平方数の時に $s=1$ で $L(s, \Delta)$ の部分が単純極を持つが, このとき $I(\Delta, t; s) + I(\Delta, -t; s)$ の部分は $s=1$ を零点に持つので, 除去可能である. したがって, $s=1$ を代入することができ, それによって Eichler-Selberg の跡公式を復元できることが示されている.

Zagier はさらにレベル 1 の Maass 波動形式の場合に同様の公式を証明している ([10]). Zagier の公式の Hilbert モジュラー形式への一般化は水本 ([4]) が行なっており, 狭義類数が 1 の総実代数体上のレベル 1, パラレルウェイト $k \in \prod_{v \in \Sigma_\infty} 2\mathbb{N}$, nebentypus が自明な場合に証明された. さらに高瀬 ([6]) は, 狭義類数が 1 という仮定のまま一般のレベル, ウェイト, nebentypus が原始的という条件の元で水本の公式を一般化した.

1.2 Jacquet-Zagier 型跡公式

ここまで紹介した結果は, 全て古典的な手法を用いて示されたものである. ここからはアデリックな設定のもとでの Zagier の公式の一般化を紹介する. 本記事では, 以下の記号を用いる.

- F : 代数体
- $\mathfrak{o}$: F の整数環
- Σ_{fin} : F の有限素点からなる集合
- Σ_∞ : F の無限素点からなる集合
- $\Sigma_F = \Sigma_{\mathrm{fin}} \cup \Sigma_\infty$

- $\mathbb{A}$: F のアデール環
- F_v : F の $v \in \Sigma_F$ での完備化
- $\mathfrak{o}_v$: $\mathfrak{o}$ の $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ での完備化
- $\mathfrak{p}_v$: $\mathfrak{o}_v$ の素イデアル
- ϖ_v : $\mathfrak{o}_v$ の素元
- $q_v = \#(\mathfrak{o}_v/\mathfrak{p}_v)$

代数群 G, B, Z をそれぞれ $G = GL_2$, $B = \{(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}) \in G\}$, $Z = \{(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}) \in G\}$ とし, $G_{\mathbb{A}}$ の標準的な極大コンパクト部分群を $\mathbf{K}$ とする. 具体的には,

$$\mathbf{K} = \prod_{v \in \Sigma_F} \mathbf{K}_v, \quad \mathbf{K}_v = \begin{cases} GL_2(\mathfrak{o}_v) & (v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}) \\ O(2) & (v \in \Sigma_\infty) \end{cases}$$

で与えられる.

各素点 v 毎の F_v のモジュラスから定義されるイデールノルム $|\cdot|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{R}_+$ に対して, 関数 $y : G_{\mathbb{A}} \to \mathbb{R}_+$ を, $y(k) = 1$ $(\forall k \in \mathbf{K})$, $y((\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix})g) = |\frac{a}{d}|_{\mathbb{A}} y(g)$ $(\forall (\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}) \in B_{\mathbb{A}}, \forall g \in G_{\mathbb{A}})$ を満たすただひとつの関数とする. このとき, Eisenstein 級数は $\mathrm{Re}(z) > 1$ なる $z \in \mathbb{C}$ と $g \in G_{\mathbb{A}}$ に対して

$$E(z; g) = \sum_{\gamma \in B_F \backslash G_{\mathbb{F}}} y(\gamma g)^{\frac{z+1}{2}}.$$

で定義される. Eisenstein 級数は複素平面全域に有理型に解析接続することができ, $s = 1$ で単純極を持つ. さらに, D_F を $F/\mathbb{Q}$ の判別式の絶対値, ζ_F を完備化された F の Dedekind ゼータ関数とし, $E^*(z; g) = D_F^{\frac{z}{2}} \zeta_F(z) E(z; g)$ とおくと関数等式

$$E^*(1 - z; g) = E^*(z; g)$$

を満たす.

十分良い収束性を持つ（例えば, コンパクト台を持つなど）テスト関数 $\varphi : Z_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}} \to \mathbb{C}$ に対して, $\mathcal{L}^2(Z_{\mathbb{A}} G_F \backslash G_{\mathbb{A}})$ 上の右正則表現 R から構成される作用素 $R(\varphi)$ の核関数

$$K_\varphi(g, h) = \sum_{\gamma \in G_F \backslash G_{\mathbb{A}}} \varphi(g^{-1} \gamma h) \quad (g, h \in G_{\mathbb{A}})$$

と Eisenstein 級数を用いて, $z \in \mathbb{C}$ に対して積分

$$I(z) = \int_{Z_{\mathbb{A}} G_F \backslash G_{\mathbb{A}}} K_\varphi(g, g) E(z; g) dg$$

を考える. Eisenstein 級数の $z = 1$ での留数は $g \in G_{\mathbb{A}}$ によらない定数になるので, $I(z)$ の $z = 1$ での留数を計算することにより, (定数) $\times \int_{Z_{\mathbb{A}} G_F \backslash G_{\mathbb{A}}} K_\varphi(g, g) dg$ の形が出てきて, Arthur-Selberg の跡公式が復元できるであろうことが想像できる. しかし, この問題は難しく長い間知られていなかったが, 2019 年にようやく Wu([8]) によって復元できることが示された.

Jacquet と Zagier は, コンパクト台を持つような一般のテスト関数 φ に対して, $I(z)$ の幾何サイドを計算した ([3]). Rankin-Selberg の方法により, スペクトルサイドには, $Z_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}$ の既約カスピダル表現 π に付随する対称 2 次 L 関数 $L(s,\pi;\mathrm{Ad})$ の値の和で表すことができる. 従って, Jacquet-Zagier 型跡公式とは, それを軌道積分の和で表す公式となっている. (ここで, 対称 2 次 L 関数を $L(s,\pi;\mathrm{Ad})$ と書いたのは, GL_2 の保型表現 π から, Gelbart, Jacquet らによって構成された GL_3 の保型表現 $\mathrm{Ad}(\pi)$ の保型 L 関数と一致するからである.([2])) Jacquet と Zagier が計算した幾何サイドの公式は抽象的なテスト関数 φ に対して計算していたので, その分結果も抽象的なものに留まっている. 従って, Jacquet-Zagier 型跡公式から既存の跡公式（Zagier, 水本, 高瀬の跡公式）を導くことは別の難しさがあるため, 既存の結果を完全に含んでいるわけではない. しかし, テスト関数 φ が具体的に与えられた Schwartz-Bruhat 関数のときは, 論文中の計算から比較的容易に明示公式を得られることが期待できる.

杉山と都築は, Jacquet-Zagier 型跡公式の一つの応用として, Zagier の公式のレベル付きの Hilbert モジュラー形式への一般化を与えた ([5]). この結果の特筆すべき点は, 総実代数体 F の満たす仮定が, 素数 2 が F で完全分解するというもののみで, 狭義類数については一切条件を課していない. この点は水本, 高瀬らの跡公式と異なる部分である.

彼らは, 有限素点では Hecke 作用素のレゾルベント核, 無限素点では $Z_{\mathbb{R}}\backslash G_{\mathbb{R}}$ の離散系列表現の行列系数を用いて構成されたテスト関数に対しての Jacquet-Zagier 型跡公式を具体的に計算した. この関数の台はコンパクトではないので, 収束性などの議論も論文中で厳密に行なっている.

また, 彼らは Hilbert モジュラー形式に対する保型表現 π に付随する対称 2 次 L 関数の非消滅性を証明した. これは, 固定された $z\in[0,1]$ に対して, ある種の条件を満たす保型表現 π が存在して, $L(\frac{z+1}{2},\pi;\mathrm{Ad})\neq 0$ となるような π が存在するというものである. これはスペクトルパラメーターの重み付きの一様分布性から従うもので, 杉山-都築の跡公式の一つの応用となっており, 大変興味深いものとなっている.

2 主結果

講演で述べた主結果を紹介する. 今回は杉山-都築の跡公式の Hilbert Maass 形式に対する類似を得た. これは, 杉山と都築が構成したテスト関数の無限素点の部分を上半平面 $\mathbb{H}$ 上の Laplace 作用素のレゾルベント核関数にとりかえて, Jacquet-Zagier 型跡公式を計算することにより得られる. Hilbert モジュラー形式の場合は, 擬似係数が存在するので, 固定された重さの Hilbert モジュラー形式のみを取り出すことができるが, Hilbert Maass 形式の場合には, 擬似係数が存在しないため, スペクトルサイドにおける Eisenstein 級数の積分と, 指標の寄与を無視できなくなる. この点は杉山-都築の跡公式よりも複雑になっている.

$\{0\}$ でない $\mathfrak{o}$ のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して $S(\mathfrak{a})$ を, $\mathfrak{a}\mathfrak{o}_v\neq\mathfrak{o}_v$ となる有限素点 v の集合とする. さて, 主結果の説明のため, 以下を仮定する.

- F は拡大次数 d_F の総実代数体で, 素数 2 は F で完全分解する.

- $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{o}$ は $\{0\}$ でない square-free なイデアルで, $S(\mathfrak{n})$ は even な素点を含まないとする.
- $S \subset \Sigma_{\mathrm{fin}}$ は有限集合で, $S \cap S(\mathfrak{n}) = \emptyset$ かつ even な素点を含まないとする.

$v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ に対して, $\mathbf{K}_0(\mathfrak{n}\mathfrak{o}_v) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; c \in \mathfrak{n}\mathfrak{o}_v \right\}$ とおく.

以下で使われる記号は杉山と都築の論文 ([5]) の記号を参考にしている．記号の簡略化のため, G_{F_v} を G_v と書くことにする (B_v や Z_v も同様).

$Z_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}}$ の既約カスピダル表現の集合 $\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{n})$ を

$$\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{n}) = \left\{ \pi \cong \otimes'_{v \in \Sigma_F} \pi_v \;\middle|\; \pi_v^{\mathbf{K}_0(\mathfrak{n}\mathfrak{o}_v)} \neq \{0\} \ (v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}),\ \pi_v^{SO(2)} \neq \{0\} \ (v \in \Sigma_\infty) \right\}$$

で定義する．$v \in \Sigma_F$ と擬指標 $\chi : F_v \to \mathbb{C}^\times$ に対して, $Z_v \backslash G_v$ の表現 $I(\chi)$ を, 一般主系列表現 $\mathrm{Ind}_{B_v}^{G_v}(\chi \boxtimes \chi^{-1})$ で定める.

既約カスピダル表現 $\pi \cong \otimes'_{v \in \Sigma_F} \pi_v \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{n})$ の導手を $\mathfrak{f}_\pi$ とおくと, 各 $v \in \Sigma_F - S(\mathfrak{f}_\pi)$ に対して,

$$\pi_v \cong \begin{cases} I\left(|\cdot|_v^{\frac{\nu_v(\pi_v)}{2}} \right) & (v \in \Sigma_{\mathrm{fin}} - S(\mathfrak{f}_\pi)) \\ I\left(|\cdot|_v^{\frac{\nu_v(\pi_v)}{2}} \right) \text{ or } I\left(\mathrm{sgn}(\cdot) |\cdot|_v^{\frac{\nu_v(\pi_v)}{2}} \right) & (v \in \Sigma_\infty), \end{cases}$$

$$\nu_v(\pi_v) \in \begin{cases} \sqrt{-1}[0, 2\pi(\log q_v)^{-1}] \cup (\{0, 2\pi\sqrt{-1}(\log q_v)^{-1}\} + (0,1)) & (v \in \Sigma_{\mathrm{fin}} - S(\mathfrak{f}_\pi)) \\ \sqrt{-1}\mathbb{R}_+ \cup (0,1) & (v \in \Sigma_\infty) \end{cases}$$

を満たすような複素数 $\nu_v(\pi)$ を取ることができ, これを v におけるスペクトルパラメーターと呼ぶ.

イデールノルム $|\cdot|$ の核を $\mathbb{A}^1 \subset \mathbb{A}^\times$ とすると, $\mathbb{A}^\times = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{R}_+$ と分解できる. これに対して, 指標 $\chi = \prod_{v \in \Sigma_F} \chi_v : \mathbb{A}^\times \to S^1$ で, $\chi(F^\times) = 1$, $\chi(\mathbb{R}_+) = 1$, $\chi_v(\mathfrak{o}_v^\times) = 1$ $(\forall v \in \Sigma_{\mathrm{fin}})$ を満たすもの全体を Ξ と書くことにする.

次に, Riemann 面 $\mathfrak{X}_v := \begin{cases} \mathbb{C}/4\pi\sqrt{-1}(\log q_v)^{-1}\mathbb{Z} & (v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}) \\ \mathbb{C} & (v \in \Sigma_\infty) \end{cases}$ 上の 1 次微分形式 $d\mu_v(s)$ を

$$d\mu_v(s) = \begin{cases} 2^{-1}(\log q_v)(q_v^{\frac{s+1}{2}} - q_v^{\frac{-s+1}{2}})ds & (v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}) \\ s\ ds & (v \in \Sigma_\infty) \end{cases}$$

で定め, $\mathfrak{X}_v$ 上の正則関数で

- $\alpha(s) = \alpha(-s)$
- $v \in \Sigma_\infty$ のとき, 任意の $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\ell > 0$ に対して $|\alpha(s)| \ll_{a,b,\ell} (1 + |\mathrm{Im}(s)|)^{-\ell}$, $\mathrm{Re}(s) \in [a,b]$

を満たすもの全体の空間を $\mathcal{A}_v$ とする.

以下, $c > 1$ を十分大きく取っておくことにする．$\alpha = \otimes_{v \in S \cup \Sigma_\infty} \alpha_v \in \otimes_{v \in S \cup \Sigma_\infty} \mathcal{A}_v$ と, $-1 <$

$\mathrm{Re}(z)<1$ なる $z\in\mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned}\mathbb{I}^0_{\mathrm{cusp}}(\alpha|\mathfrak{n};z) =& C^{(z)}(\mathfrak{n})\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{cus}}(\mathfrak{n})} W^{(z)}_{\mathfrak{n}}(\pi)\frac{L(\frac{z+1}{2},\pi;\mathrm{Ad})}{L(1,\pi;\mathrm{Ad})}\alpha(\nu_{S\cup\Sigma_\infty}(\pi)),\\ \mathbb{I}^0_{\mathrm{Eis}}(\alpha|\mathfrak{n};z) =& \frac{\mathrm{vol}(\mathbb{A}^1/F^\times)^{-1}}{8\pi\sqrt{-1}}\sum_{\chi\in\Xi}\int_{\sqrt{-1}\mathbb{R}}\mathbb{I}^0_{\mathrm{Eis},\chi}(\alpha;u,z)du,\\ \mathbb{I}^0_{\mathrm{res}}(\alpha|\mathfrak{n};z) =& \frac{1}{2}D_F^{\frac{z}{4}}\sum_{\substack{\chi\in\Xi\\ \chi^2=1}}\{\mathbb{I}^0_{\mathrm{res},\chi}(\alpha;z)+\mathbb{I}^0_{\mathrm{res},\chi}(\alpha;-z)\}\end{aligned}$$

とおく. ここで, $\nu_{S\cup\Sigma_\infty}(\pi)=(\nu_v(\pi_v))_{v\in S\cup\Sigma_\infty}$ はスペクトルパラメーターの族で,

$$C^{(z)}(\mathfrak{n})=\frac{(-1)^{\#S}}{2}D_F^{z-\frac{3}{2}}\prod_{v\in S(\mathfrak{n})}(1+q_v)^{-1},$$

$$W^{(z)}_{\mathfrak{n}}(\pi)=\mathrm{N}(\mathfrak{f}_\pi)^{\frac{z-1}{2}}\prod_{v\in S(\mathfrak{n}\mathfrak{f}_\pi^{-1})}\left(1+\frac{(q_v^{\frac{z}{2}}+q_v^{-\frac{z}{2}})(q_v^{\frac{1}{2}}+q_v^{-\frac{1}{2}})-(q_v^{\frac{\nu_v(\pi_v)}{2}}+q_v^{-\frac{\nu_v(\pi_v)}{2}})^2}{(q_v^{\frac{1}{2}}+q_v^{-\frac{1}{2}})^2-(q_v^{\frac{\nu_v(\pi_v)}{2}}+q_v^{-\frac{\nu_v(\pi_v)}{2}})^2}\right),$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{I}^0_{\mathrm{Eis},\chi}(\alpha;u,z)\\ &=2^{d_F}D_F^{z-2}\frac{\zeta_F(\frac{z+1}{2})L_F(\frac{z+1}{2}+u,\chi^2)L_F(\frac{z+1}{2}-u,\chi^{-2})}{L_F(1+u,\chi^2)L_F(1-u,\chi^{-2})}\\ &\times\prod_{v\in S(\mathfrak{n})}\left[(q_v^{\frac{1}{2}}-q_v^{-\frac{1}{2}})(1-q_v^{-\frac{3}{2}})+(q_v^{-\frac{1}{2}}+q_v^{-1})\left\{q_v^{\frac{z}{2}}+q_v^{-\frac{z}{2}}-q_v^{-u}\chi_v(\varpi_v)^2-q_v^{u}\chi_v(\varpi_v)^{-2}\right\}\right]\\ &\qquad\qquad\qquad\times(1+q_v)^{-\frac{3}{2}}L_v(1+u,\chi_v^2)L_v(1-u,\chi_v^{-2})\\ &\times\prod_{v\in S}\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_{c-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\log q_v}}^{c+\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\log q_v}}\left(-q_v^{-\frac{s_v+1}{2}}\right)L_v\left(\tfrac{s_v+u}{2},\chi_v\right)L_v\left(\tfrac{s_v-u}{2},\chi_v^{-1}\right)\alpha_v(s)d\mu_v(s)\\ &\times\prod_{v\in\Sigma_\infty}\alpha_v(u+2\sqrt{-1}a(\chi_v)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{I}^0_{\mathrm{res},\chi}(\alpha;z) =& 2^{d_F}D_F^{\frac{z}{4}-1}\frac{\zeta_F(z+1)}{\zeta_F(\frac{z+3}{2})}\prod_{v\in S(\mathfrak{n})}\frac{(1-q_v^{-1})(1+q_v^{-\frac{z+1}{2}})}{q_v+1}\zeta_v(\tfrac{z+3}{2})\\ &\times\prod_{v\in S}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{\zeta_v(\frac{z+1}{2})}{\zeta_v(\frac{z+3}{2})}\int_{c-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\log q_v}}^{c+\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\log q_v}}\mathcal{S}_{\mathrm{res},v,\chi_v}(s,z)\alpha_v(s)d\mu_v(s)\prod_{v\in\Sigma_\infty}\alpha_v(\tfrac{z+1}{2}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}_{\mathrm{res},v,\chi_v}(s_v,z)\\ =&\tfrac{-q_v^{-\frac{s_v+1}{2}}}{1-q_v^{-s_v}}\times\Big[L_v(\tfrac{s_v}{2}-\tfrac{z+1}{4},\chi_v)L_v(\tfrac{s_v}{2}+\tfrac{z+1}{4},\chi_v)\left\{1+q^{-s}-2q_v^{-s-1}-\chi_v(\varpi_v)q_v^{-\frac{s}{2}-\frac{z+1}{4}}(1-q_v^{-1})\right\}\\ &+(1-q_v^{-1})\zeta_v(\tfrac{z+1}{2})\zeta_v(s_v+\tfrac{z+1}{2})\left\{q_v^{-\frac{z+1}{2}}(1+2q_v^{-s})-q_v^{-s-z-1}+2\chi_v(\varpi_v)q_v^{-\frac{s}{2}-\frac{z+1}{4}}\right\}\Big]\end{aligned}$$

としている. また, $a(\chi_v)\in\mathbb{R}$ は $\chi_v(x)=|x|^{\sqrt{-1}a(\chi_v)}$ $(x\in\mathbb{R}_+)$ で定めており $L_F(s,\chi)$ は完備化された Hecke-L 関数であり, $\zeta_v(s)$ と $L_v(s,\chi)$ はそれぞれ $\zeta_F(s)$ と $L_F(s,\chi)$ の v-因子である.

上で定義した 3 つの関数 $\mathbb{I}^0_{\mathrm{cusp}}(\alpha|\mathfrak{n};z)$, $\mathbb{I}^0_{\mathrm{Eis}}(\alpha|\mathfrak{n};z)$, $\mathbb{I}^0_{\mathrm{res}}(\alpha|\mathfrak{n};z)$ はスペクトルサイドに相当するものである. 幾何サイドを記述するために, 以下の関数を導入する.

$\mathrm{Re}(s)>\frac{\mathrm{Re}(z)-1}{2}$ を満たす $z,s\in\mathbb{C}$ と, $\epsilon\in\{0,1\}$, $\delta,a\in F_v^\times$, $\alpha=\otimes_{v\in S\cup\Sigma_\infty}\alpha_v\in\otimes_{v\in S\cup\Sigma_\infty}\mathcal{A}_v$ に対して,

(i) $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ のとき

$$\mathcal{O}^{\delta,(z)}_{v,\epsilon}(a)=\frac{\zeta_v(-z)}{L_v(\frac{-z+1}{2},\varepsilon_\delta)}\left(\frac{1+q_v^{\frac{z+1}{2}}}{1+q_v}\right)^{\epsilon}|a|_v^{\frac{-z+1}{4}}+\frac{\zeta_v(z)}{L_v(\frac{z+1}{2},\varepsilon_\delta)}\left(\frac{1+q_v^{\frac{-z+1}{2}}}{1+q_v}\right)^{\epsilon}|a|_v^{\frac{z+1}{4}},$$

$$\mathcal{S}^{\delta,(z)}_v(s;a)=\begin{cases}-q_v^{-\frac{s+1}{2}}\frac{\zeta_v(s+\frac{z+1}{2})\zeta_v(s+\frac{-z+1}{2})}{L_v(s+1,\varepsilon_\delta)}|a|_v^{\frac{s+1}{2}} & (|a|_v\le 1)\\ -q_v^{-\frac{s+1}{2}}\left\{\frac{\zeta_v(-z)\zeta_v(s+\frac{z+1}{2})}{L_v(\frac{-z+1}{2},\varepsilon_\delta)}|a|_v^{\frac{-z+1}{4}}+\frac{\zeta_v(z)\zeta_v(s+\frac{-z+1}{2})}{L_v(\frac{z+1}{2},\varepsilon_\delta)}|a|_v^{\frac{z+1}{4}}\right\} & (|a|_v>1),\end{cases}$$

$$\hat{\mathcal{S}}^{\delta,(z)}_v(\alpha_v;a)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\log q_v}}^{c+\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\log q_v}}\mathcal{S}^{\delta,(z)}_v(s;a)\alpha_v(s)d\mu_v(s)\qquad(v\in S)$$

とおく. ここで, ε_δ は局所類体論で $F_v(\sqrt{\delta})/F_v$ に対応する $F_v^\times$ の指標である. さらに, $\Delta\in F^\times$ と, $\{0\}$ でない分数イデアル $\mathfrak{a}\subset F$ に対して,

$$\mathbf{B}^{(z)}_{\mathfrak{n}}(\alpha|\Delta;\mathfrak{a})=\prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}-(S\cup S(\mathfrak{n}))}\mathcal{O}^{\Delta,(z)}_{v,0}(a_v)\prod_{v\in S(\mathfrak{n})}\mathcal{O}^{\Delta,(z)}_{v,1}(a_v)\prod_{v\in S}\hat{\mathcal{S}}^{\Delta,(z)}_v(\alpha_v;a_v)$$

とおく. ここで $(a_v)_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}}$ は $\mathfrak{a}$ に対応する有限イデールとする.

(ii) $v\in\Sigma_\infty$ のとき

$$\mathcal{O}^{+,(z)}_v(s;a)=\frac{\pi^{-\frac12}}{4}|a|_v|1-a^{-2}|_v^{\frac{s+1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{z+1}{4})\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{z-1}{4})}{\Gamma(s+1)}\delta(a>1)\\ \times F_3^{(1,0)}\left({\textstyle\frac{s}{2}+\frac{z+1}{4},\frac{s}{2}-\frac{z-1}{4},\frac{s+1}{2};\frac{z+1}{4},\frac{-z+1}{4} \atop s+1;\frac{s+1}{2}};1-a^{-2},1-a^2\right),$$

$$\mathcal{O}^{-,(z)}_v(s;a)=(a^2+1)\frac{\Gamma(\frac{s+1}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{z+1}{4})\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{z-1}{4})}{\Gamma(s+1)\Gamma(\frac{s}{2}+1)}\\ \times F_3^{(1,0)}\left({\textstyle\frac{s}{2}+\frac{z+1}{4},\frac{s}{2}-\frac{z-1}{4},\frac{s+1}{2};\frac{z+3}{4},\frac{-z+3}{4} \atop s+1;\frac{s}{2}+1};1,-a^2\right)$$

とおく. ここで $F_3^{(1,0)}$ は第 3 種 Appell 超幾何関数 F_3 (cf. ([1])) の一般化で, パラメーター $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,a_1',c\in\mathbb{C}$ に対して,

$$F_3^{(1,0)}\left({\textstyle a_1 a_2,a_3;b_1',b_2' \atop a_1';c};x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_m(a_2)_m(a_3)_m(b_1)_n(b_2)_n}{(a_1')_m(c)_{m+n}}x^m y^n$$

で定義される．ここで，$(\alpha)_m = \frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)}$ は Pochhammer 記号で，$a'_1, c \neq 0, -1, -2, \ldots$ とする．$\sigma = \mathrm{Re}(a_1 + a_2 + a_3 - a'_1 - c)$, $\tau = \mathrm{Re}(b_1 + b_2 - c)$ とおくと，$F_3^{(1,0)}$ は，

$$\begin{aligned}
&\sigma < 0, \tau < 0 \text{ のとき}, |x| \leq 1, |y| \leq 1,\\
&\sigma < 0, \tau \geq 0 \text{ のとき}, |x| \leq 1, |y| < 1,\\
&\sigma \geq 0, \tau < 0 \text{ のとき}, |x| < 1, |y| \leq 1,\\
&\sigma \geq 0, \tau \geq 0 \text{ のとき}, |x| < 1, |y| < 1
\end{aligned}$$

の範囲で絶対収束し，x を固定したとき，y に関して領域 $\mathbb{C} - [1, +\infty)$ に解析接続することができる（x についても同様）．

さらに

$$\hat{\mathcal{O}}_v^{\pm,(z)}(\alpha; a) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\sqrt{-1}\infty}^{c+\sqrt{-1}\infty} \mathcal{O}_v^{\pm,(z)}(s; a)\alpha(s) d\mu_v(s),$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon^{(z)}(\alpha) = &\prod_{v \in S} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\log q_v}}^{c+\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\log q_v}} \frac{-q_v^{-\frac{s+1}{2}}}{1-q_v^{-s-\frac{z+1}{2}}} \alpha_v(s) d\mu_v(s)\\
&\times \prod_{v \in \Sigma_\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\sqrt{-1}\infty}^{c+\sqrt{-1}\infty} \frac{\Gamma(\frac{s}{2} + \frac{z+1}{4})}{\Gamma(\frac{s}{2} - \frac{z-3}{4})} \alpha_v(s) d\mu_v(s),
\end{aligned}$$

とおく．以下が今回の主結果である．

Theorem 2.1. $-1 < \mathrm{Re}(z) < 1$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ と $\alpha = \otimes_{v \in S \cup \Sigma_\infty} \alpha_v \in \otimes_{v \in S \cup \Sigma_\infty} \mathcal{A}_v$ に対して，

$$\mathbb{I}^0_{\mathrm{cusp}}(\alpha|\mathfrak{n}; z) + \mathbb{I}^0_{\mathrm{Eis}}(\alpha|\mathfrak{n}; z) + \mathbb{I}^0_{\mathrm{res}}(\alpha|\mathfrak{n}; z) = \mathbb{J}^0_{\mathrm{uni}}(\alpha|\mathfrak{n}; z) + \mathbb{J}^0_{\mathrm{hyp}}(\alpha|\mathfrak{n}; z) + \mathbb{J}^0_{\mathrm{ell}}(\alpha|\mathfrak{n}; z)$$

が成立する．右辺の 3 つの関数はそれぞれ放物元，双曲元，楕円元の寄与であり，以下で定義される．

(i)

$$\mathbb{J}^0_{\mathrm{uni}}(\alpha|\mathfrak{n}; z) = D_F^{\frac{z}{4}} \left\{ \Lambda_F(-z) \hat{\mathbb{J}}^1_{\mathrm{uni}}(\alpha|\mathfrak{n}; z) + \Lambda_F(z) \hat{\mathbb{J}}^1_{\mathrm{uni}}(\alpha|\mathfrak{n}; -z) \right\}$$

ここで，

$$\hat{\mathbb{J}}^1_{\mathrm{uni}}(\alpha|\mathfrak{n}; z) = \left\{ 2^{-\frac{z+3}{2}} \pi^{-\frac{z+3}{4}} \Gamma\left(\tfrac{-z+1}{4}\right) \right\}^{n_F} D_F^{-\frac{z+2}{4}} \zeta_F(-z) \Upsilon^{(z)}(\alpha) \prod_{v \in S(\mathfrak{n})} \frac{1 + q_v^{\frac{z+1}{2}}}{1 + q_v}.$$

とおいている．

(ii)

$$\mathbb{J}^0_{\mathrm{hyp}}(\alpha|\mathfrak{n}; z) = \frac{1}{2} D_F^{\frac{-1}{2}} \zeta_F\left(\frac{-z+1}{2}\right) \sum_{a \in \mathfrak{o}(S)^\times_+ - \{1\}} \mathbf{B}^{(z)}_{\mathfrak{n}}\left(\alpha \middle| 1; \frac{a}{(a-1)^2}\mathfrak{o}\right) \prod_{v \in \Sigma_\infty} \hat{\mathcal{O}}_v^{+,(z)}\left(\alpha_v; \frac{a+1}{a-1}\right).$$

ここで, $\mathfrak{o}(S)_+^\times$ は総正な S-単数の集合.

(iii)

$$\mathbb{J}_{\mathrm{ell}}^0(\alpha|\mathfrak{n};z) = \frac{1}{2}D_F^{\frac{z-1}{2}}\sum_{(t:n)_F}\mathrm{N}(\mathfrak{d}_\Delta)^{\frac{z+1}{4}}L\left(\frac{z+1}{2},\varepsilon_\Delta\right)\mathbf{B}_{\mathfrak{n}}^{(z)}\left(\alpha|\Delta;n\mathfrak{f}_\Delta^{-2}\right)$$
$$\times\prod_{v\in\Sigma_\infty}\hat{\mathcal{O}}_v^{\mathrm{sgn}(\Delta^{(v)}),(z)}\left(\alpha_v;t|\Delta|_v^{\frac{-1}{2}}\right),$$

ここで,

- $\Delta = t^2-4n$
- ε_Δ : 大域類体論で $F(\sqrt{\Delta})/F$ に対応する $\mathbb{A}^\times$ の指標.
- $\mathfrak{d}_\Delta$: $F(\sqrt{\Delta})/F$ の相対判別式
- $\mathfrak{f}_\Delta$: $\Delta\mathfrak{o}=\mathfrak{d}_\Delta\mathfrak{f}_\Delta^2$ となる $\mathfrak{o}$ のイデアル

$(t;n)_F$ は, 集合 $\{(t,n)\in F\times F \mid t^2-4n\in F^\times-(F^\times)^2\}$ 上の同値関係

$$(t,n)\sim(t',n') \iff \exists c\in F^\times, t'=ct, n'=c^2n$$

による商集合の元で, 次を満たすものをわたる.

- $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}-S$ に対して, $(t,n)\in\left\{(c_vt_v,c_v^2n)\in F_v\times F_v \mid c_v\in F_v^\times, t_v\in\mathfrak{o}_v, n\in\mathfrak{o}_v^\times\right\}$
- ε_Δ の v-因子 $\varepsilon_{\Delta,v}$ が不分岐な $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ に対して, $\mathrm{ord}_v(n\mathfrak{f}_\Delta^{-1})<0$

主結果は以上である. この式は $F=\mathbb{Q}$, $\mathfrak{n}=\mathbb{Z}$ とおくと, Maass 波動形式に対する Zagier の公式 ([10]) を復元できることが少しの計算でわかる. したがって, この結果はその Hilbert Maass 形式への一般化とみなすことができる.

3 $L(s,\pi;\mathrm{Ad})$ の非消滅性

今回紹介した主結果の系として, Hilbert Maass 形式に対する対称 2 次 L 関数 $L(s,\pi;\mathrm{Ad})$ の非消滅性を証明できると考えている. これは主結果の式を見るかぎり大いに期待できるのだが, 残念ながらまだ厳密な証明を与えていないため, 予想という形で述べさせていただく.

まず, 次の命題を考える.

(P) 任意の $z\in[0,1)$, 素イデアル $\mathfrak{n}\subset\mathfrak{o}$, $\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{n})$ に対して, $L(\frac{z+1}{2},\pi;\mathrm{Ad})\geq 0$ が成り立つ.

これは $L(s,\pi;\mathrm{Ad})$ についての一般 Riemann 予想を仮定すると, 中間値の定理から成り立つ. なぜなら $z\in[0,1]$ で $L(\frac{z+1}{2},\pi;\mathrm{Ad})$ は実数であり, $L(1,\pi;\mathrm{Ad})>0$ だからである (cf. 例えば ([7, 2.8]) など).

Conjecture 3.1. (P) を仮定する. $z \in [0,1)$ と $\mathbb{R}$ の部分区間の族 $(J_v)_{v \in S \cup \Sigma_\infty}$ で, $v \in S$ に対して $J_v \subset [-2,2]$, $v \in \Sigma_\infty$ に対して $J_v \subset [\frac{1}{4}, +\infty)$ を満たすものを任意に与える. このとき, 次を満たす $M > 0$ が存在する.

$\mathrm{N}(\mathfrak{n}) > M$ を満たす任意の素イデアル $\mathfrak{n}$ に対して,

- $\mathfrak{f}_\pi = \mathfrak{n}$
- $L(\frac{z+1}{2}, \pi; \mathrm{Ad}) \neq 0$
- $v \in S$ に対して, $q_v^{\frac{\nu_v(\pi_v)}{2}} + q_v^{-\frac{\nu_v(\pi_v)}{2}} \in J_v$
- $v \in \Sigma_\infty$ に対して, $\frac{1-\nu_v(\pi_v)^2}{4} \in J_v$

を満たす $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}(\mathfrak{n})$ が存在する.

この予想は, 杉山と都築による Hilbert モジュラー形式に対する対称 2 次関数の非消滅性の Hilbert Maass 形式の類似にあたるものである. 今後はこれの厳密な証明を与える予定である.

謝辞

今回の講演の機会を与えてくださった世話人の赤塚広隆氏, 山崎義徳氏に深く感謝申し上げます. また, 本研究は JSPS 科研費 JP19J20176 の助成を受けています.

参考文献

[1] P. Appell, *Sur les séries hypergéométriques de deux variables et sur des équations différentielles linéaires aux dérivées partielles*. C. R. Acad. Sci. **90** (1880) 296–298, 731–735.

[2] S. Gelbart, H. Jacquet, *A relation between automorphic representations of $GL(2)$ and $GL(3)$*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **11** (1978) no. 4, 471–542.

[3] H. Jacquet, D. Zagier, *Eisenstein series and the Selberg trace formula II*. Trans. Amer. Math. Soc. **300** (1) (1987) 1–48.

[4] S. Mizumoto, *On the second L-functions attached to Hilbert modular forms*. Math. Ann. **269** (1984) 191–216.

[5] S. Sugiyama, M. Tsuzuki, *An explicit trace formula of Jacquet-Zagier type for Hilbert modular forms*. J. Funct. Anal. **275** (2018), no. 11, 2978–3064.

[6] K. Takase, *On the trace formula of the Hecke operators and the special values of the second L-functions attached to the Hilbert modular forms*. Manuscripta Math. **55** (1986) 137–170.

[7] M. Tsuzuki, *Spectral means of central values of automorphic L-functions for $GL(2)$*. Mem. Amer. Math. Soc. **235** (2015), no. 1110.

[8] H. Wu, *Deducing Selberg trace formula via Rankin-Selberg method for GL_2*. (English summary) Trans. Amer. Math. Soc. **372** (2019), no. 12, 8507–8551.

[9] D. Zagier, *Modular Forms Whose Fourier Coefficients Involve Zeta-Functions of Quadratic Fields*, Lecture Notes in Math., vol. 627, Springer, 1977, 105–169.

[10] D. Zagier, *Eisenstein series and the Selberg trace formula I*, in: Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic, Tata Institute, Bombay, 1979, 303–355.