

# Schur 多重ゼータ関数の Pieri 公式

東京理科大学理学研究科 武田 渉

Wataru Takeda

Department of Applied Mathematics,  
Tokyo University of Science

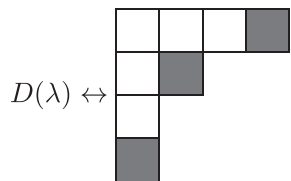
## 概要

本研究は中筋麻貴氏 (上智大学) との共同研究である. 本稿は 2021 年度 RIMS 共同研究 (公開型) 「解析的整数論とその周辺」における著者の講演に基づくものである. 本稿では Schur 多重ゼータ関数に対して, pushing rule を導入し, Schur 多重ゼータ関数に対して Pieri 公式を与える.

## 1 Schur 多重ゼータ関数

まず, [NPY] において Schur 関数の類似として導入された Schur 多重ゼータ関数について説明する. 正の整数  $n$  に対して,  $r$  個の整数の組  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  で  $n = \lambda_1 + \dots + \lambda_r$  と  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$  を満たすものを  $n$  の分割と呼ぶ. この分割  $\lambda$  に対して, Young 図形  $D(\lambda)$  を  $D(\lambda) = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq \lambda_i\}$  のように左揃えで  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  個の箱を上から順に横に並べたものと同一視する. また,  $(i, j) \in D(\lambda)$  が  $\lambda$  の角であるとは  $(i, j+1) \notin D(\lambda)$  かつ  $(i+1, j) \notin D(\lambda)$  を満たすときを言い,  $\lambda$  の角全体のなす集合を  $C(\lambda)$  とする. 例えば, 分割  $\lambda = (4, 2, 1, 1)$  に対して, Young 図形  $D(\lambda)$  は以下の通りであり, 灰色部が  $C(\lambda)$  の要素,  $\lambda$  の角である:

例 1.1 ( $\lambda = (4, 2, 1, 1)$ ).



ある集合  $X$  に対し, Young 図形  $D(\lambda)$  の各々の成分  $(i, j)$  に  $t_{ij} \in X$  を対応させ

た組  $(t_{ij})$  を形  $\lambda$  の  $X$ -値 Young tableau(盤) と言い,  $T(\lambda, X)$  を形  $\lambda$  の  $X$ -値 Young tableau(盤) の集合とする. さらに, 正の整数からなる Young 盤  $(m_{ij})$  が行に関しては非減少  $m_{ij} \leq m_{i(j+1)}$  であり, 列に関しては狭義増加  $m_{ij} < m_{(i+1)j}$  であるとき,  $(m_{ij})$  を半標準 Young 盤と呼び,  $SSYT(\lambda)$  を形  $\lambda$  の半標準 Young 盤の集合とする.

例 1.2 ( $\lambda = (2, 1)$ ).

$$\mathbf{s} = \begin{array}{|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} \\ \hline s_{21} & \\ \hline \end{array}, SSYT(\lambda) = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \dots, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \dots \right\},$$

以上の準備の下, Schur 多重ゼータ関数は以下のように定義される. 変数  $\mathbf{s} = (s_{ij}) \in T(\lambda, \mathbb{C})$  に対し,

$$\zeta_\lambda(\mathbf{s}) = \sum_{M \in SSYT(\lambda)} \prod_{(i,j) \in D(\lambda)} \frac{1}{m_{ij}^{s_{ij}}}.$$

ここで  $M = (m_{ij})_{(i,j) \in D(\lambda)} \in SSYT(\lambda)$  を表す. この関数の収束域については [NPY] において考察されており,

$$W_\lambda = \left\{ \mathbf{s} = (s_{ij}) \in T(\lambda, \mathbb{C}) \mid \begin{array}{l} (i,j) \in D(\lambda) \setminus C(\lambda) \text{ に対して, } \Re(s_{ij}) \geq 1, \\ (i,j) \in C(\lambda) \text{ に対して, } \Re(s_{ij}) > 1 \end{array} \right\}$$

により定まる  $W_\lambda$  内で絶対収束することが示されている. また, 混乱がないときは  $\zeta_\lambda(\mathbf{s})$  を省略して,  $\mathbf{s}$  と表すこともある.

例 1.3 ( $\lambda = (2, 1)$  (cf. 例 1.2)). 変数  $\mathbf{s} = (s_{ij}) \in W_\lambda$  において,

$$\begin{array}{|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} \\ \hline s_{21} & \\ \hline \end{array} = \zeta_\lambda \left( \begin{array}{|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} \\ \hline s_{21} & \\ \hline \end{array} \right) = \frac{1}{1^{s_{11}} 1^{s_{12}} 2^{s_{21}}} + \frac{1}{1^{s_{11}} 2^{s_{12}} 2^{s_{21}}} + \dots + \frac{1}{2^{s_{11}} 2^{s_{12}} 3^{s_{21}}} + \dots$$

ここで, 分割  $\underbrace{(1, \dots, 1)}_r = (\{1\}^r)$ ,  $(r)$  に対する Schur 多重ゼータ関数はそれぞれ以下のように定まる Euler-Zagier 型の多重ゼータ関数  $\zeta$  や多重ゼータスター関数  $\zeta^*$  となること分かる:

$$\zeta(s_1, \dots, s_r) = \sum_{1 \leq n_1 < \dots < n_r} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}}, \quad \zeta^*(s_1, \dots, s_r) = \sum_{1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}}.$$

これにより, Schur 多重ゼータ関数は Euler-Zagier 型の多重ゼータ関数  $\zeta$  や多重ゼータスター関数  $\zeta^*$  を補間する関数として見ることもできる. また, Schur 多重ゼータ関数は和がわたる整数の大小を考えて分解することで Euler-Zagier 型の多重ゼータ関数

や多重ゼータスター関数の線形和として表すことができる。例えば、 $\lambda = (2, 1)$  のとき、 $(m_{ij})$  間は、 $m_{11} = m_{12} < m_{21}, m_{11} < m_{12} < m_{21}, m_{11} < m_{12} = m_{21}$  および  $m_{11} < m_{21} < m_{12}$  という大小関係に分解できることから、

$$\begin{aligned} \zeta_\lambda(\mathbf{s}) &= \sum_{\substack{m_{11} \leq m_{12} \\ \wedge \\ m_{21}}} \frac{1}{m_{11}^{s_{11}} m_{12}^{s_{12}} m_{21}^{s_{21}}} \\ &= \zeta(s_{11} + s_{12}, s_{21}) + \zeta(s_{11}, s_{12}, s_{21}) + \zeta(s_{11}, s_{12} + s_{21}) + \zeta(s_{11}, s_{21}, s_{12}) \\ &= \zeta^*(s_{11}, s_{12}, s_{21}) - \zeta^*(s_{11}, s_{12} + s_{21}) + \zeta^*(s_{11}, s_{21}, s_{12}) - \zeta^*(s_{11} + s_{21}, s_{12}) \end{aligned}$$

と分解できる。

## 2 Pieri 公式

### 2.1 Schur 多項式に対する Pieri 公式

本稿では Schur 多項式に対する Pieri 公式の類似を Schur 多重ゼータ関数に対して与えることが目標であるため、Schur 多項式に対する Pieri 公式をまず復習する。ここでは Pieri 公式のみを紹介するが、文献 [F, M]などを参照すると、Schur 多項式や Schur 関数にはより多くの性質があることもわかる。分割  $\lambda$  に対して、その  $m$  変数 Schur 多項式は以下のように定義される：

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_m) = \sum_{M \in SSYT_m(\lambda)} \prod_{(i,j) \in D(\lambda)} x_{m_{ij}}$$

ここで  $SSYT_m(\lambda)$  は  $SSYT(\lambda)$  の元で各箱に入る整数が  $m$  以下の Young 盤の集合である。

例 2.1 ( $\lambda = (2, 2), m = 3$ ).

$$SSYT_m(\lambda) = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array} \right\}$$

であるため、

$$s_{(2,2)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2$$

となることが分かる。

このとき, Schur 多項式に対する Pieri 公式は以下である:

定理 2.2 (Pieri 公式). 分割  $\lambda$  と正の整数  $m$  に対して以下が成立する.

1.

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_m) \cdot s_{(r)}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\mu} s_{\mu}(x_1, \dots, x_m). \quad (2.3)$$

ここで右辺の和は  $D(\lambda)$  に対して  $r$  個の箱を同じ列に 2 つ以上加えないように加えて得られる Young 図形  $D(\mu)$  の形  $\mu$  をすべてわたる.

2.

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_m) \cdot s_{(\{1\}^r)}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\mu} s_{\mu}(x_1, \dots, x_m). \quad (2.4)$$

ここで右辺の和は  $D(\lambda)$  に対して  $r$  個の箱を同じ行に 2 つ以上加えないように加えて得られる Young 図形  $D(\mu)$  の形  $\mu$  をすべてわたる.

例 2.5 ( $\lambda = (2, 1), r = 1, m = 3$ ).

$$s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}}(\mathbf{x}) s_{\begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \\ \hline \end{array}}(\mathbf{x}) = s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \blacksquare & \\ \hline \end{array}}(\mathbf{x}) + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \blacksquare \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}}(\mathbf{x}) + s_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \blacksquare \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}}(\mathbf{x}).$$

ここで, それぞれ以下のように計算できることから, 具体的に上の式が成立していることが確認できる.

$$\begin{aligned} s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}}(\mathbf{x}) &= x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + 2x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2, \\ s_{\begin{array}{|c|} \hline \blacksquare \\ \hline \end{array}}(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2 + x_3, \\ s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \blacksquare & \\ \hline \end{array}}(\mathbf{x}) &= x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3), \\ s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \blacksquare \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}}(\mathbf{x}) &= x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2, \\ s_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \blacksquare \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}}(\mathbf{x}) &= x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2^2 + 2x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^3 + 2x_1 x_2^2 x_3 + 2x_1 x_2 x_3^2 \\ &\quad + x_1^3 x_3 + x_1^2 x_3^2 + x_1 x_3^3 + x_2^3 x_3 + x_2^2 x_3^2 + x_2 x_3^3. \end{aligned}$$

定理 2.2 は, 一般の Schur 多項式  $s_\lambda$  に分割  $(\{1\}^r)$  または  $(r)$  に対する Schur 多項式をかけたものを単純な規則により得られる Schur 多項式の和で表したものであった. 先に述べたように分割  $(\{1\}^r), (r)$  に対する Schur 多重ゼータ関数はそれぞれ  $\zeta, \zeta^*$  であるため, Schur 多重ゼータ関数の Pieri 公式は一般の  $\zeta_\lambda$  に  $\zeta$  または  $\zeta^*$  をかけたものを考えることとなる. ここで Schur 多項式では現れなかった問題が発生する. それは Schur 多重ゼータ関数は変数にも Young 盤があるということである. 具体的には例

2.5のように、 $\zeta_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} \left( \begin{array}{|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} \\ \hline s_{21} & \square \\ \hline \end{array} \right) \zeta_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}} \left( \begin{array}{|c|} \hline t_1 \\ \hline \end{array} \right)$  の積には  $\zeta_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}}$  という形の Schur 多重ゼータ関数が和に現れることが想像される。しかし、一般には

$$\zeta_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} & t_1 \\ \hline s_{21} & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \neq \zeta_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}} \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline t_1 & s_{11} & s_{12} \\ \hline s_{21} & \square & \square \\ \hline \end{array} \right)$$

であるため、どの変数をどこに入れるかという問題が発生する。それを統一するものとして、pushing rule を定義する。

## 2.2 Pushing rule

以下では、Pieri 公式を記述するために必要な pushing rule を  $\zeta, \zeta^*$  それぞれによる積に対して定義する。まず、(2.3) に対応するもの、つまり  $\zeta^*$  に関する pushing rule を定義する。もとの Young 盤  $\mathbf{s} \in T(\lambda, \mathbb{C})$  に対して、 $\mathbf{t} = [t_1 \cdots t_r] \in T((r), \mathbb{C})$  を以下のように押し出す (push) ことにより、新しい Young 盤たちを構成する。

1. まず、 $t_1$  を  $\mathbf{s}$  のいずれかの列の 1 番上または 1 行目の最も右の箱の右隣に置く。

例えば、 $\lambda = (3, 1), \mathbf{s} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ \hline s_{21} & \square & \square \\ \hline \end{array}$  であるとき、 $t_1$  を加える操作を行うと以下の 4 つを得る：

$$\begin{array}{|c|} \hline t_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ \hline s_{21} & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & t_1 & \square \\ \hline s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ \hline s_{21} & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} & t_1 \\ \hline s_{21} & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} & s_{13} & t_1 \\ \hline s_{21} & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}.$$

2. 得られた盤が Young 盤でないとき、つまり、 $t_1$  がもとの Young 盤の上に乗っているとき、その列を下向きに全て押してずらすことで Young 盤を作る。この操作により、Young 盤でないものが現れた場合、その盤は無視する。また、1 行目の最も右の箱の右隣に置いて得られた Young 盤はそのまま残す。

先の例に対して今の押し出し操作を行うと以下の結果を得る：

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline t_1 & s_{12} & s_{13} \\ \hline s_{11} & \square & \square \\ \hline s_{21} & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline s_{11} & t_1 & s_{13} \\ \hline s_{21} & s_{12} & \square \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} & t_1 \\ \hline s_{21} & \square & s_{13} \\ \hline \end{array} \text{ (無視)}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} & s_{13} & t_1 \\ \hline s_{21} & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}.$$

3. 以上の操作を  $[t_2], [t_3], \dots, [t_r]$  の順で行う。ただし、 $1 \leq i \leq r-1$  に対して、各  $[t_{i+1}]$  は必ず  $[t_i]$  よりも右側にあるように操作を行う。

ここで  $U_H$  をこの pushing rule で得られる新たな Young 盤すべての集合とすると、以下のような例を得る。

例 2.6 ( $\lambda = (3, 2, 1), r = 2$ ).

$$U_H = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline t_1 & t_2 & s_{13} \\ \hline s_{11} & s_{12} & \\ \hline s_{21} & s_{22} & \\ \hline s_{31} & & \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|} \hline t_1 & s_{12} & t_2 \\ \hline s_{11} & s_{22} & s_{13} \\ \hline s_{21} & & \\ \hline s_{31} & & \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline t_1 & s_{12} & s_{13} & t_2 \\ \hline s_{11} & s_{22} & & \\ \hline s_{21} & & & \\ \hline s_{31} & & & \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|} \hline s_{11} & t_1 & t_2 \\ \hline s_{21} & s_{12} & s_{13} \\ \hline s_{31} & s_{22} & \\ \hline \end{array} , \right. \\ \left. \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{11} & t_1 & s_{13} & t_2 \\ \hline s_{21} & s_{12} & & \\ \hline s_{31} & s_{22} & & \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} & t_1 & t_2 \\ \hline s_{21} & s_{22} & s_{13} & \\ \hline s_{31} & & & \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} & s_{13} & t_1 & t_2 \\ \hline s_{21} & s_{22} & & & \\ \hline s_{31} & & & & \\ \hline \end{array} \right\}.$$

続いて、 $\zeta$  に関する pushing rule を定義する。もとの Young 盤  $s \in T(\lambda, \mathbb{C})$  に対

して、 $t = \begin{array}{|c|} \hline t_1 \\ \hline \vdots \\ \hline t_r \\ \hline \end{array} \in T(\{\{1\}^r, \mathbb{C}\})$  を以下のように押し出す (push) ことにより、新しい Young 盤たちを構成する。

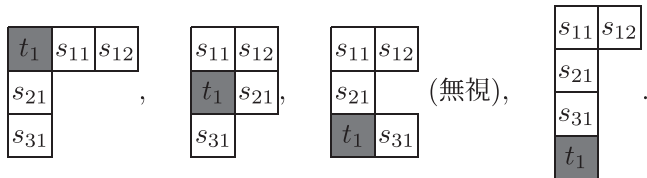
1. まず、 $t_1$  を  $s$  のいずれかの行の 1 番左または 1 列目の最も下の箱の下隣に置く。

例えば、 $\lambda = (2, 1, 1), s = \begin{array}{|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} \\ \hline s_{21} & \\ \hline s_{31} & \\ \hline \end{array}$  であるとき、 $t_1$  を加える操作を行うと以下の 4 つを得る：

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline t_1 & s_{11} & s_{12} \\ \hline s_{21} & & \\ \hline s_{31} & & \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|} \hline & s_{11} & s_{12} \\ \hline t_1 & s_{21} & \\ \hline & s_{31} & \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|c|} \hline & s_{11} & s_{12} \\ \hline & s_{21} & \\ \hline t_1 & s_{31} & \\ \hline \end{array} , \begin{array}{|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} \\ \hline s_{21} & \\ \hline s_{31} & \\ \hline t_1 & \\ \hline \end{array} .$$

2. 得られた盤が Young 盤でないとき、つまり、 $t_1$  がもとの Young 盤の左に乗っているとき、その列を右向きに全て押しつづらすことで Young 盤を作る。この操作により、Young 盤でないものが現れた場合、その盤は無視する。また、1 列目の最も下の箱の下隣に置いて得られた Young 盤はそのまま残す。

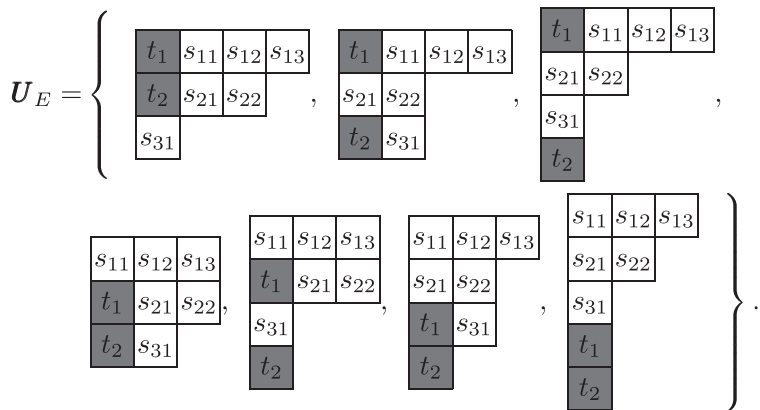
先の例に対して今の押し出し操作を行うと以下の結果を得る:



3. 以上の操作を  $t_2, t_3, \dots, t_r$  の順で行う. ただし,  $1 \leq i \leq r - 1$  に対して, 各  $t_{i+1}$  は必ず  $t_i$  よりも下側にあるように操作を行う.

ここで  $U_E$  をこの pushing rule で得られる新たな Young 盤すべての集合とすると, 先の例同様に以下の例を得る.

例 2.7 ( $\lambda = (3, 2, 1), r = 2$ ).



### 2.3 Schur 多重ゼータ関数に対する Pieri 公式

定理 2.8. 正の整数  $\ell, m$  と非負整数  $k$  に対して  $p = \min\{m, \ell - 1\}$  とする. このとき,

$$\sum_{\text{sym}} \zeta_{(\ell, \{1\}^k)} \left( \begin{array}{c} y_1 \cdots y_\ell \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{array} \right) \cdot \zeta_{(m)} \left( z_1 \ z_2 \ \cdots \ z_m \right) = \sum_{\text{sym}} \sum_{\mathbf{u}_\mu \in U_H} \zeta_\mu(\mathbf{u}_\mu).$$

ここで  $\sum_{\text{sym}}$  は集合  $\{y_1, \dots, y_\ell, z_1, \dots, z_p\}$  の元を変数として置換するものすべてをわたり, 右辺の内側の和は pushing rule によって得られる Young 盤  $\mathbf{u}_\mu \in U_H$  をすべてわたる.

定理 2.9. 正の整数  $k, m$  と非負整数  $\ell$  に対して  $q = \min\{m, k-1\}$  とする. このとき,

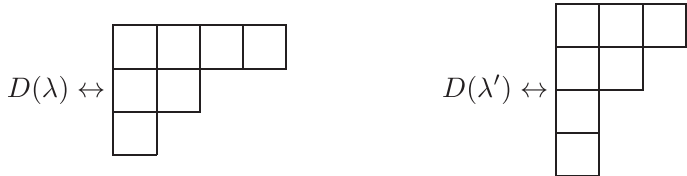
$$\sum_{\text{sym}} \zeta_{(\ell+1, \{1\}^{k-1})} \left( \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_1 & y_1 & \cdots & y_\ell \\ \hline x_2 & & & \\ \hline \vdots & & & \\ \hline x_k & & & \\ \hline \end{array} \right) \cdot \zeta_{(\{1\}^m)} \left( \begin{array}{|c|} \hline z_1 \\ \hline z_2 \\ \hline \vdots \\ \hline z_m \\ \hline \end{array} \right) = \sum_{\text{sym}} \sum_{\mathbf{u}_\mu \in \mathbf{U}_E} \zeta_\mu(\mathbf{u}_\mu).$$

ここで  $\sum_{\text{sym}}$  は集合  $\{x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, z_q\}$  の元を変数として置換するものすべてをわたり, 右辺の内側の和は pushing rule によって得られる Young 盤  $\mathbf{u}_\mu \in \mathbf{U}_E$  をすべてわたる.

### 3 Jacobi-Trudi 公式

本章では定理 2.8, 2.9 の証明の鍵となる Jacobi-Trudi 公式を Schur 多重ゼータ関数に対して拡張されたものを紹介する. まず, 分割  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  に対して,  $\lambda$  の共役  $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_s)$  を  $\lambda'_i = \#\{j \mid \lambda_j \geq i\}$  と定義する. Young 図形を考えると, 主対角線において  $D(\lambda)$  と  $D(\lambda')$  は線対称になっている.

例 3.1. 分割  $\lambda = (4, 2, 1)$  に対して, その共役は  $\lambda' = (3, 2, 1, 1)$  である.



ここで Jacobi-Trudi 公式とは Schur 関数の特殊な Schur 関数  $(s_{(r)}, s_{\{1\}^r})$  による行列式表示を与えるものであり, すでに [NPY] によって, ある条件を満たす Schur 多重ゼータ関数に対しては以下が与えられている:

定理 3.2 ([NPY]). 分割  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  とその共役  $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_s)$  に対して,  $\mathbf{s} = (s_{ij}) = (a_{j-i}) \in T(\lambda, \mathbf{C})$  と仮定する. このとき, 以下が成立する.

1.  $\Re(s_{i\lambda_i}) > 1$  ( $1 \leq i \leq r$ ) を仮定すると,

$$\zeta_\lambda(\mathbf{s}) = \det [\zeta^*(a_{-j+1}, a_{-j+2}, \dots, a_{-j+(\lambda_i-i+j)})]_{1 \leq i, j \leq r}.$$

2.  $\Re(s_{\lambda'_i}) > 1$  ( $1 \leq i \leq s$ ) を仮定すると,

$$\zeta_\lambda(\mathbf{s}) = \det [\zeta(a_{j-1}, a_{j-2}, \dots, a_{j-(\lambda'_i-i+j)})]_{1 \leq i, j \leq s}.$$



上の定理の仮定は Young 盤の各対角部分に入る変数が等しいということの意味している。

例 3.3 ( $\lambda = (3, 2)$ ).  $\mathbf{s} \in W_\lambda$ ,  $\Re(a_{-1}) > 1$  を仮定する. このとき, 以下が成立する.

$$\begin{aligned} & \zeta_\lambda \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_0 & a_1 & a_2 \\ \hline a_{-1} & a_0 & \\ \hline \end{array} \right) \\ &= \begin{vmatrix} \zeta(a_0, a_{-1}) & \zeta(a_1, a_0, a_{-1}) & \zeta(a_2, a_1, a_0, a_{-1}) \\ \zeta(a_0) & \zeta(a_1, a_0) & \zeta(a_2, a_1, a_0) \\ 0 & 1 & \zeta(a_2) \end{vmatrix} \quad (\zeta \text{ver.}) \\ &= \begin{vmatrix} \zeta^*(a_0, a_1, a_2) & \zeta^*(a_{-1}, a_0, a_1, a_2) \\ \zeta^*(a_0) & \zeta^*(a_{-1}, a_0) \end{vmatrix} \quad (\zeta^* \text{ver.}). \end{aligned}$$

[NPY] において定理 3.2 の証明は Gessel-Viennot([GV]) の方法, つまり格子点上の道の重み付き和と各被加数を対応させることにより行われる. 本稿で与える拡張された Jacobi-Trudi 公式の証明も同様に [NPY] によって構成されたその対応を用いて行う. [NPY] と異なる点是对角成分が等しくない場合の誤差を対角成分を等しくすることで消すか, 対角成分の和をとることで減らすかの違いである.

拡張された Jacobi-Trudi 公式について詳しく述べる準備として, 主要項と誤差項に対応するものを定義する. 以下では変数が多く並ぶことを防ぐために  $s_{ia}, s_{i(a+1)}, \dots, s_{ib}$  を  $\underline{s}_{ia}^{ib}$  と省略し,  $s_{aj}, s_{(a+1)j}, \dots, s_{bj}$  を  $\underline{s}_{aj}^{bj}$  と省略して書く. まず, 分割  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  に対して, 主要項  $\text{JT}^*$  を以下のように定める.

$$\text{JT}^*(\lambda_1, \dots, \lambda_r; \underline{s}_{11}^{1\lambda_1}, \dots, \underline{s}_{r1}^{r\lambda_r}) = \det[s^\lambda(i, j)]_{1 \leq i, j \leq r}.$$

ここで, 各成分は

$$s^\lambda(i, j) = \begin{cases} \zeta^*(\underline{s}_{j1}^{j\lambda_j}, \underline{s}_{(j-1)\lambda_j}^{(j-1)\lambda_{j-1}}, \dots, \underline{s}_{i\lambda_{i+1}}^{i\lambda_i}) & i \leq j \text{ のとき,} \\ \zeta^*(\underline{s}_{j1}^{j(\lambda_i - i + j)}) & i > j \text{ かつ } \lambda_j > i - j \text{ のとき,} \\ 1 & i > j \text{ かつ } \lambda_j = i - j \text{ のとき,} \\ 0 & i > j \text{ かつ } \lambda_j < i - j \text{ のとき,} \end{cases}$$

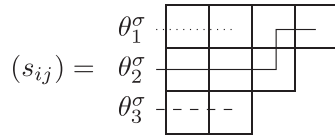
である. また, 誤差項  $\text{JTE}^*$  を以下のように定める.

$$\begin{aligned} & \text{JTE}^*(\lambda_1, \dots, \lambda_r; \underline{s}_{11}^{1\lambda_1}, \dots, \underline{s}_{r1}^{r\lambda_r}) \\ &= \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \prod_{i=1}^r \zeta^*(\theta_i^{\sigma}(\mathbf{s})) - \text{JT}^*(\lambda_1, \dots, \lambda_r; \underline{s}_{11}^{1\lambda_1}, \dots, \underline{s}_{r1}^{r\lambda_r}). \end{aligned}$$

ここで, 和の  $\sigma$  は対称群  $\mathfrak{S}_r$  の適切な元をわたり, それに対応する形で  $\zeta^*(\theta_i^{\sigma}(\mathbf{s}))$  も定める. これらはすべて [NPY] によって与えられた Schur 多重ゼータ関数の被加数と

格子上の道の重み付き和の対応によって定まる. 変数  $\theta_i^\sigma(\mathbf{s})$  の詳しい定義は [NPY] によってされているが, Young 盤を “リボン” 型と呼ばれる Young 盤たちに分解して得られる “リボン” 型 Young 盤に対して定まる. 例えば, 以下のようになる.

例 3.4 ( $\lambda = (4, 3, 2)$ ). 分割  $\lambda = (4, 3, 2), \sigma = (1\ 2)$  とする. このとき,  $\theta_i^\sigma$  は以下のような経路により変数をとることに対応する.



見やすさのため上の図では変数を省略している. このとき, それぞれの  $\theta_i^\sigma(\mathbf{s})$  は

$$\theta_1^\sigma(\mathbf{s}) = \boxed{s_{11} s_{12}}, \theta_2^\sigma(\mathbf{s}) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & s_{13} & s_{14} \\ \hline s_{21} & s_{22} & s_{23} & \\ \hline \end{array}, \theta_3^\sigma(\mathbf{s}) = \boxed{s_{31} s_{32}}$$

となり, それぞれの  $\zeta^*(\theta_i^\sigma(\mathbf{s}))$  は

$$\zeta^*(\theta_1^\sigma(\mathbf{s})) = \zeta^*(\underline{s}_{11}^{12}), \zeta^*(\theta_2^\sigma(\mathbf{s})) = \zeta^*(\underline{s}_{21}^{23}, \underline{s}_{13}^{14}), \zeta^*(\theta_3^\sigma(\mathbf{s})) = \zeta^*(\underline{s}_{31}^{32})$$

となる. また,  $JT^*, JTE^*$  はそれぞれ

$$JT^*(4, 3, 2; \underline{s}_{11}^{14}, \underline{s}_{21}^{23}, \underline{s}_{31}^{32}) = \begin{vmatrix} \zeta^*(\underline{s}_{11}^{14}) & \zeta^*(\underline{s}_{21}^{23}, \underline{s}_{13}^{14}) & \zeta^*(\underline{s}_{31}^{32}, \underline{s}_{22}^{23}, \underline{s}_{13}^{14}) \\ \zeta^*(\underline{s}_{11}^{12}) & \zeta^*(\underline{s}_{21}^{23}) & \zeta^*(\underline{s}_{31}^{32}, \underline{s}_{22}^{23}) \\ 1 & \zeta^*(s_{31}) & \zeta^*(\underline{s}_{31}^{32}) \end{vmatrix},$$

$$JTE^*(4, 3, 2; \underline{s}_{11}^{14}, \underline{s}_{21}^{23}, \underline{s}_{31}^{32}) = \begin{vmatrix} \zeta^*(s_{21}, \underline{s}_{11}^{14}) - \zeta^*(\underline{s}_{21}^{23}, \underline{s}_{13}^{14}) & \zeta^*(\underline{s}_{31}^{32}, \underline{s}_{22}^{23}, \underline{s}_{13}^{14}) \\ \zeta^*(s_{21}, \underline{s}_{11}^{12}) - \zeta^*(\underline{s}_{21}^{23}) & \zeta^*(\underline{s}_{31}^{32}, \underline{s}_{22}^{23}) \end{vmatrix}$$

となることが分かる.

上で定義したものは Schur 多重ゼータ関数を  $\zeta^*$  の行列式表示で与える Jacobi-Trudi 公式に対応するものである. 本稿では定理 2.8 の証明に焦点を置いて説明するため紹介しないが, Schur 多重ゼータ関数を  $\zeta$  の行列式表示を与える Jacobi-Trudi 公式も与えられている [NT].

先に述べたように, 本研究では各対角成分に関する和を考えるが具体的には以下のような和を考える:

$$\sum_{\text{diag}} = \sum_{\substack{\sigma_j \in S_j \\ j \in \mathbb{Z}}} \prod_{i \in \mathbb{Z}} \sigma_i.$$

ここで  $S_j$  は集合  $I(j) = \{(k, l) \in D(\lambda) \mid l - k = j\}$  の元を並びかえる置換全てからなる集合である。つまり、 $\sum_{\text{diag}}$  は各対角成分の変数を並びかえたものすべてに関する和となる。また、分割  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  に対して、和  $\sum_{\text{diag}}$  は

$$\sum_{\substack{\sigma_j \in S_j \\ j \in \mathbb{Z}}} \prod_{i \in \mathbb{Z}} \sigma_i = \sum_{j \in \mathbb{Z} \cap [1-r, \lambda_1-1]} \prod_{i=1-r}^{\lambda_1-1} \sigma_i$$

と書き換えることができるため、実際は有限積の有限和であることもわかる。

今回得た Jacobi-Trudi 公式を紹介する前に分解や並び替えをすることを踏まえ、改めて収束領域  $W_{\lambda, H}$  を定義する。

$$W_{\lambda, H} = \left\{ \mathbf{s} = (s_{ij}) \in T(\lambda, \mathbb{C}) \mid \begin{array}{l} (i, j) \in D(\lambda) \setminus H(\lambda) \text{ に対して, } \Re(s_{ij}) \geq 1, \\ (i, j) \in H(\lambda) \text{ に対して, } \Re(s_{ij}) > 1 \end{array} \right\}.$$

ここで、 $H(\lambda) = \{(i, j) \in D(\lambda) \mid i - j \in \{i - \lambda_i \mid 1 \leq i \leq r\}\}$  とする。この収束領域は [NPY] の Jacobi-Trudi 公式 (Theorem 3.2) において収束のためにされていた仮定を並び替えた Young 盤が毎回満たしていることを意味している。収束領域  $W_{\lambda, H}$  において、以下の定理が成立する。

**定理 3.5** ([NT]). 正の整数  $X \geq 2$  と分割  $\lambda = (m, n, \{1\}^{X-2})$  に対して、 $(s_{ij}) \in W_{\lambda, H}$  とする。このとき、以下が成立する。

$$\sum_{\text{diag}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} & \cdots & \cdots & \cdots s_{1m} \\ \hline s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} & \\ \hline s_{31} & & & & \\ \hline \vdots & & & & \\ \hline s_{X1} & & & & \\ \hline \end{array} = \sum_{\text{diag}} \text{JT}^*(m, n, \{1\}^{X-2}; \underline{s}_{11}^{1m}, \underline{s}_{21}^{2n}, \underline{s}_{31}^{X1}).$$

**定理 3.6** ([NT]). 正の整数  $X \geq 2$  と分割  $\lambda = (m, n, \{2\}^{X-2})$  に対して、 $(s_{ij}) \in W_{\lambda, H}$  とする。このとき、以下が成立する。

$$\sum_{\text{diag}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} & \cdots & \cdots & \cdots s_{1m} \\ \hline s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} & \\ \hline s_{31} & s_{32} & & & \\ \hline \vdots & \vdots & & & \\ \hline s_{X1} & s_{X2} & & & \\ \hline \end{array}$$

$$= \sum_{\text{diag}} [\text{JT}^*(m, n, \{2\}^{X-2}; \underline{s}_{11}^{1m}, \underline{s}_{21}^{2n}, \underline{s}_{31}^{32}, \dots, \underline{s}_{X1}^{X2}) + \text{JTE}^*(m, n, \{2\}^{X-2}; \underline{s}_{11}^{1m}, \underline{s}_{21}^{2n}, \underline{s}_{31}^{32}, \dots, \underline{s}_{X1}^{X2})].$$

ここで  $\text{JTE}^*(m, n; \underline{s}_{11}^{1m}, \underline{s}_{21}^{2n}) = 0$  であり,  $X \geq 3$  に対して, 誤差項  $\text{JTE}^*$  は以下の漸化式を満たす:

$$\begin{aligned} & \text{JTE}^*(m, n, \{2\}^{X-2}; \underline{s}_{11}^{1m}, \underline{s}_{21}^{2n}, \underline{s}_{31}^{32}, \dots, \underline{s}_{X1}^{X2}) \\ &= \zeta^*(\underline{s}_{11}^{1m}) \text{JTE}^*(n, \{2\}^{X-2}; \underline{s}_{21}^{2n}, \underline{s}_{31}^{32}, \dots, \underline{s}_{X1}^{X2}) \\ & - \zeta^*(\underline{s}_{11}^{1(n-1)}) \text{JTE}^*(m+1, \{2\}^{X-2}; \underline{s}_{21}^{2n}, \underline{s}_{1n}^{1m}, \underline{s}_{31}^{32}, \dots, \underline{s}_{X1}^{X2}) \\ & - \text{JT}^*(m+1, n+1, \{2\}^{X-3}; \underline{s}_{21}^{2n}, \underline{s}_{1n}^{1m}, \underline{s}_{31}^{32}, \underline{s}_{22}^{2n}, \underline{s}_{41}^{42}, \dots, \underline{s}_{X1}^{X2}) \\ & + \text{JT}^*(m+1, n+1, \{2\}^{X-3}; \underline{s}_{21}^{2n}, \underline{s}_{11}^{1m}, \underline{s}_{31}^{32}, \underline{s}_{22}^{2n}, \underline{s}_{41}^{42}, \dots, \underline{s}_{X1}^{X2}) \\ & + \text{JTE}^*(m+1, n+1, \{2\}^{X-3}; \underline{s}_{21}^{2n}, \underline{s}_{11}^{1m}, \underline{s}_{31}^{32}, \underline{s}_{22}^{2n}, \underline{s}_{41}^{42}, \dots, \underline{s}_{X1}^{X2}). \end{aligned}$$

ここで, [NPY] の仮定の下では  $\text{JTE}^* = 0$  となることが簡単にわかるため, 上の定理 3.5,3.6 から [NPY] の結果の一部を得ることができる.

例 3.7 ( $\lambda = (3, 2, 2)$ ).  $(s_{ij}) \in W_{\lambda, H}$  に対して, 以下が成立する.

$$\begin{aligned} \sum_{\text{diag}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ \hline s_{21} & s_{22} & \\ \hline s_{31} & s_{32} & \\ \hline \end{array} &= \sum_{\text{diag}} \left[ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \zeta^*(s_{11}, s_{12}, s_{13}) & \zeta^*(s_{21}, s_{22}, s_{12}, s_{13}) & \zeta^*(s_{31}, s_{32}, s_{22}, s_{12}, s_{13}) \\ \hline \zeta^*(s_{11}) & \zeta^*(s_{21}, s_{22}) & \zeta^*(s_{31}, s_{32}, s_{22}) \\ \hline 1 & \zeta^*(s_{21}) & \zeta^*(s_{31}, s_{32}) \\ \hline \end{array} \right] \\ & + (\zeta^*(s_{21}, s_{11}, s_{12}, s_{13}) - \zeta^*(s_{21}, s_{22}, s_{12}, s_{13})) \zeta^*(s_{31}, s_{32}, s_{22}) \\ & - (\zeta^*(s_{21}, s_{11}) - \zeta^*(s_{21}, s_{22})) \zeta^*(s_{31}, s_{32}, s_{22}, s_{12}, s_{13}). \end{aligned}$$

### 4 特殊な場合の証明の概略

本稿の結びとして, 以下の  $\zeta_{(2,1)}\zeta_{(2)}$  に関する Pieri 公式の証明を行う.

例 4.1 ( $\zeta_{(2,1)}\zeta_{(2)}$  に関する Pieri 公式). 各 Young 盤が収束領域  $W_\lambda$  に入る仮定に加え,  $\Re(y_1), \Re(z_1) > 1$  も仮定する. このとき, 以下が成立する.

$$\sum_{\text{sym}} \begin{array}{|c|c|} \hline y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline z_1 & z_2 \\ \hline \end{array} = \sum_{\text{sym}} \left[ \begin{array}{|c|c|} \hline z_1 & z_2 \\ \hline y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline z_1 & y_2 & z_2 \\ \hline y_1 & & \\ \hline x_1 & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline y_1 & z_1 & z_2 \\ \hline x_1 & y_2 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline y_1 & y_2 & z_1 & z_2 \\ \hline x_1 & & & \\ \hline \end{array} \right]. \quad (4.2)$$

ここで,  $\sum_{\text{sym}}$  は集合  $\{y_1, y_2, z_1\}$  の元を変数として置換するものすべてをわたる.

証明. Schur 多重ゼータ関数に対する Jacobi-Trudi 公式 (定理 3.2) により, (4.2) の左辺は以下のように分解できる.

$$\sum_{\text{sym}} \begin{array}{|c|c|} \hline y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline z_1 & z_2 \\ \hline \end{array} = \sum_{\text{sym}} \zeta^*(y_1, y_2) \zeta^*(x_1) \zeta^*(z_1, z_2) - \zeta^*(x_1, y_1, y_2) \zeta^*(z_1, z_2).$$

一方, (4.2) の右辺は拡張された Jacobi-Trudi 公式 (定理 3.5) により, それぞれの項は以下のような行列式表示を得る.

$$\begin{aligned} \sum_{\text{sym}} \begin{array}{|c|c|} \hline z_1 & z_2 \\ \hline y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & \\ \hline \end{array} &= \sum_{\text{sym}} \begin{vmatrix} \zeta^*(z_1, z_2) & \zeta^*(y_1, y_2, z_2) & \zeta^*(x_1, y_1, y_2, z_2) \\ \zeta^*(z_1) & \zeta^*(y_1, y_2) & \zeta^*(x_1, y_1, y_2) \\ 0 & 1 & \zeta^*(x_1) \end{vmatrix}, \\ \sum_{\text{sym}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline y_1 & z_1 & z_2 \\ \hline x_1 & y_2 & \\ \hline \end{array} &= \sum_{\text{sym}} \begin{vmatrix} \zeta^*(y_1, z_1, z_2) & \zeta^*(x_1, y_2, z_1, z_2) \\ \zeta^*(y_1) & \zeta^*(x_1, y_2) \end{vmatrix}, \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline z_1 & y_2 & z_2 \\ \hline y_1 & & \\ \hline x_1 & & \\ \hline \end{array} &= \begin{vmatrix} \zeta^*(z_1, y_2, z_2) & \zeta^*(y_1, z_1, y_2, z_2) & \zeta^*(x_1, y_1, z_1, y_2, z_2) \\ 1 & \zeta^*(y_1) & \zeta^*(x_1, y_1) \\ 0 & 1 & \zeta^*(x_1) \end{vmatrix}, \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline y_1 & y_2 & z_1 & z_2 \\ \hline x_1 & & & \\ \hline \end{array} &= \begin{vmatrix} \zeta^*(y_1, y_2, z_1, z_2) & \zeta^*(x_1, y_1, y_2, z_1, z_2) \\ 1 & \zeta^*(x_1) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

よって, (4.2) の右辺は以下の和となる.

$$\begin{aligned} &\sum_{\text{sym}} \left[ \begin{array}{|c|c|} \hline z_1 & z_2 \\ \hline y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline z_1 & y_2 & z_2 \\ \hline y_1 & & \\ \hline x_1 & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline y_1 & z_1 & z_2 \\ \hline x_1 & y_2 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline y_1 & y_2 & z_1 & z_2 \\ \hline x_1 & & & \\ \hline \end{array} \right] \\ &= \sum_{\text{sym}} \zeta^*(y_1, y_2) \zeta^*(x_1) \zeta^*(z_1, z_2) - \zeta^*(x_1, y_1, y_2) \zeta^*(z_1, z_2) \\ &\quad + \sum_{\text{sym}} \zeta^*(x_1, y_1, y_2, z_2) \zeta^*(z_1) - \zeta^*(x_1, y_2, z_1, z_2) \zeta^*(y_1) \\ &\quad + \sum_{\text{sym}} \zeta^*(z_1, y_2, z_2) \zeta^*(y_1) \zeta^*(x_1) - \zeta^*(y_1, y_2, z_2) \zeta^*(z_1) \zeta^*(x_1) \\ &\quad + \sum_{\text{sym}} \zeta^*(y_1, z_1, z_2) \zeta^*(x_1, y_2) - \zeta^*(z_1, y_2, z_2) \zeta^*(x_1, y_1) \\ &\quad + \sum_{\text{sym}} \zeta^*(x_1, y_1, z_1, y_2, z_2) - \zeta^*(x_1, y_1, y_2, z_1, z_2) \\ &\quad + \sum_{\text{sym}} \zeta^*(y_1, y_2, z_1, z_2) \zeta^*(x_1) - \zeta^*(y_1, z_1, y_2, z_2) \zeta^*(x_1). \end{aligned}$$

ここで, 1 つ目の和以外は  $x_1, z_2$  の位置が同じであることから  $\{y_1, y_2, z_1\}$  の元を変数

として置換することで 0 になることがわかる. よって, 右辺も

$$\sum_{\text{sym}} \zeta^*(y_1, y_2) \zeta^*(x_1) \zeta^*(z_1, z_2) - \zeta^*(x_1, y_1, y_2) \zeta^*(z_1, z_2)$$

となり, 等式が示される. □

## 謝辞

2021 年度 RIMS 共同研究 (公開型) 「解析的整数論とその周辺」における講演の機会を与えてくださった赤塚広隆先生, 山崎義徳先生にこの場をお借りして感謝いたします. 本研究は JSPS 科研費 JP18K03223, JP19J10705 の助成を受けたものです.

## 参考文献

- [F] W. Fulton. *Young tableaux: with applications to representation theory and geometry*. No. 35 Cambridge University Press, (1997).
- [GV] I.M. Gessel and G.X. Viennot. Binomial determinants, paths, and hook length formulae *Advances in Mathematics*, **58** (3) (1985), 300–321.
- [M] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford university press, (1998).
- [NPY] M. Nakasuji, O. Phuksuwan and Y. Yamasaki. On Schur multiple zeta functions: A combinatoric generalization of multiple zeta functions, *Advances in Mathematics*, **333** (2018), 570–619.
- [NT] M. Nakasuji and W. Takeda, *The Pieri formulas for hook type Schur multiple zeta functions*, arXiv : 2105.12418.